SUR LA STABILITÉ D'UNE DYNAMIQUE SINGULIÈRE DE VORTEX

VALERIA BANICA

Résumé. On étudie la stabilité de la dynamique singulière de vortex filamentaire décrite dans [13], qui engendre un coin en temps fini. On montre que sous certaines perturbations petites et régulières, le coin est encore formé. Notre approche utilise le flot binormal et la transformation de Hasimoto. On se ramène aux propriétés de scattering longue portée pour une équation de type Gross-Pitaesvski avec coefficients variables en temps. Ce travail a été obtenu en collaboration avec Luis Vega.

1. La modélisation des vortex filamentaires par L.I.A.

Dans ce travail on étudie la stabilité des solution autosimilaires du flot géométrique

$$\chi_t = \chi_x \wedge \chi_{xx}, \tag{1}$$

où t la variable temps et $\chi(t,x)$ est une courbes de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par longeur d'arc x. Cette équation a été proposée par Da Rios en 1906 [10] et réécrite par Arms et Hama en 1965 [1] pour approximer la dynamique d'un vortex filamentaire dans un fluide 3-dimensionnel, non visqueux et incompressible. Ce modèle est obtenu à l'aide de la loi de Biot-Savart en évaluant la vitesse du fluide aux points près du filament. Seulement les effets locaux sont pris en compte, et le développement de Taylor obtenu ainsi autour d'un point du filament nous donne, en passant à la limite, l'équation (1), connue habituellement sous le nom de Localized Induction Approximation (LIA). On envoie le lecteur à [3] et [18] pour une description détaillée du modèle, et à [17] pour un survey de l'oeuvre de DaRios.

On rappelle que la tangente T, la normale n et la binormale b d'une courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et vérifient le système de Frenet

$$\begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

où c représente la courbure et τ la torsion de la courbe [19]. Il s'en suit que (1) peut être réécrit comme

$$\chi_t = cb, \tag{3}$$

ce qui explique aussi la dénomination de ce modèle par le flot binormal : la courbe se déplace en direction binormale, avec une vitesse proportionnelle à la torsion.

Si on considère maintenant la tangente d'une courbe solution de (1), elle va être solution de

$$T_t = T \wedge T_{xx}. \tag{4}$$

Comme la courbe est paramétrée par longueur d'arc, $T(t,x) \in \mathbb{S}^2$, et on retrouve le "Schrödinger map" sur la sphère. De plus, (4) est reliée à l'équation du ferromagnétisme [9].

En utilisant de plus les équations des dérivées en temps de la normale et de la binormale, si la courbure et la torsion ne s'annulent pas leurs équations s'écrivent

$$\begin{cases} c_t = -2c_x\,\tau - c\,\tau_x, \\ \tau_t = \left(\frac{c_{xx} - c\,\tau^2}{c}\right)_x + c_x\,c. \end{cases} \tag{5}$$

Ce système, connu aussi sous le nom d'équations intrinsèques, a été trouvé par DaRios en 1906 [10] et rédérivé par Betchov en 1956 [4].

Finalement, Hasimoto a mis en évidence en 1972 [14] le lien avec l'équation de Schrödinger, par la transformation suivante qui porte son nom,

$$u(t,x) = c(t,x)\exp\left\{ i\int_0^x \tau(t,x')dx' \right\}. \tag{6}$$

Cette nouvelle fonction u, appelée fonction filament, bien définie quand la courbure et la torsion ne s'annulent pas, vérifie

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{2}\left(|u|^2 - A(t)\right)u = 0, \tag{7}$$

où

$$A(t) = \left(2\frac{c_{xx} - c\,\tau^2}{c} + c^2\right)(t,0). \tag{8}$$

Réciproquement, si u est une fonction qui s'annule pas, solution de (7) avec $A(t)$ un coefficient dépendant du temps donné, alors on peut définir à partir de u des fonctions réelles c et τ qui vérifient le système (5) et l'identité (8). On peut voir la transformation de Hasimoto comme une inverse de la transformée de Madelung.

Un exemple très simple pour voir le lien entre (7) et (1) est de considérer (7) avec le coefficient $A(t) = 1$, et la solution $u = 1$. Il s'en suit que la courbure est constante égale à 1 et la torsion est constante égale à 0. On est donc en présence des vortex appelés "ronds de fumée", qui sont des cercles de longueur constante se propageant en direction binormale.

On va rappeler maintenant ce qui est connu sur les solutions autosimilaires de (1). Comme $\lambda^{-1}\chi(\lambda^2 t, \lambda x)$ est le seul changement d'échelle qui préserve la longueur d'arc, les solutions autosimilaires sont cherchées sous la forme $\chi(t,x) = \sqrt{t}G(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Il s'en suit que

$$(c_a, \tau_a)(t,x) = \left(\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{x}{2t}\right), \tag{9}$$

pour un paramètre réel positif a ([7], [8], [5]). Les informations concernant la limite de la courbe quand t tend vers 0 ont été données par Gutierrez-Rivas-Vega dans [13]. On a entre autres le résultat suivant.
Théorème (Gutierrez-Rivas-Vega) *Soit a un nombre réel strictement positif. Il existe χ_a solution de* (1) *telle que*

$$\left|\chi_a(t,x) - xA_a^+\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) - xA_a^-\mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x)\right| \leq 2a\sqrt{t},$$

où $A_a^\pm \in \mathbb{S}^2$ sont deux vecteurs distincts et non-opposés, dont l'angle sous-entendu θ est déterminé par

$$\cos\frac{\theta}{2} = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

En particulier, on déduit que

$$\chi_a(0,x) = xA_a^+\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) + xA_a^-\mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x),$$

ce qui traduit le fait que la courbe $\chi_a(t,x)$, régulière pour tout $t>0$, présente un coin à $t=0$.

Remarque 1.1. *Le flot binormal* (1) *où le produit $u\wedge v$ est remplacé par* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u\wedge v$ *correspond au "Schrödinger map" sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Ses solutions autosimilaires ont été décrites récemment par de la Hoz* [11]*, dans le même esprit que le théorème cité ci-dessus. Aussi, l'équation* (7) *est défocalisante dans ce cas.*

2. Approche et résultats

Dans le but d'étudier les perturbations du flot de courbes χ_a, on va d'abord considérer les perturbation à temps positifs de sa fonction filament,

$$u_a(t,x) = a\frac{e^{i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{it}},$$

solution de

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{2}\left(|u|^2 - \frac{a^2}{t}\right)u = 0.$$

La formation du coin pour le flot de courbes χ_a correspond à la limite $a\delta_{x=0}$ de u_a quand le temps tend vers 0. On va traiter plus généralement l'équation

$$iu_t + u_{xx} \pm \left(|u|^2 - \frac{a^2}{t}\right)u = 0. \tag{10}$$

Dans notre travail précédent [2], on a commencé l'étude de cette équation en regardant le comportement en temps grands de la transformée pseudo-conforme v définie par

$$u(t,x) = \mathcal{T}v(t,x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{it}}\overline{v}\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right). \tag{11}$$

L'équation de v est

$$iv_t + v_{xx} \pm \frac{1}{t}\left(|v|^2 - a^2\right)v = 0, \tag{12}$$

et la constante a est la solution particulière correspondant à u_a. Notons que cette équation a une énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int |v_x(t)|^2\,dx \mp \frac{1}{4t}\int (|v(t)|^2 - a^2)^2\,dx. \tag{13}$$

qui obeit à la loi

$$\partial_t E(t) \mp \frac{1}{4t^2}\int (|v|^2 - a^2)^2\,dx = 0. \tag{14}$$

Dans le cas défocalisant, ceci nous a permis d'obtenir un bon contrôle en temps de la norme L^2_x de $v(t) - a$ et de déduire l'existence globale.

On considère la perturbation $w(t) = v(t) - a$, solution de

$$iw_t + w_{xx} \pm \frac{1}{t}\left(|w+a|^2 - a^2\right)(w+a) = 0. \tag{15}$$

Comme les termes d'ordre un de l'équation (15) ont des coefficients qui décroissent en $\frac{1}{t}$, et la perturbation est faite autour d'une fonction constante, il y aura des similitudes avec les effets de longue portée de l'équation de Schrödinger 1-D cubique ([16],[6],[15]) et avec la stabilité de la solution constante 1 de Gross-Pitaevski 2-D [12].

On va chercher maintenant des opérateurs d'ondes pour la perturbation $w(t)$, c'est à dire qu'on va chercher des solutions de cette équation qui en temps grand se comportent comme un $w_1(t,x)$ donné. Ceci revient à faire un point fixe, dans un espace bien choisi autour de w_1, pour l'application

$$Aw = w_1 + i\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(\mp\frac{(|w+a|^2 - a^2)(w+a)}{\tau} - (i\partial_\tau + \partial_x^2)w_1\right)d\tau.$$

Si on veut que w se comporte comme une solution libre $e^{it\partial_x^2}\,u_+$, en général les pires termes source sont ceux linéaires

$$\pm\frac{a^2}{t}w \qquad , \qquad \pm\frac{a^2}{t}\overline{w}.$$

Il faut alors arriver à contrôler les termes de Duhamel correspondants,

$$a^2\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\,e^{i\tau\partial_x^2}\,u_+\frac{d\tau}{\tau} \qquad , \qquad a^2\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\,e^{-i\tau\partial_x^2}\,\overline{u}_+\frac{d\tau}{\tau}. \tag{16}$$

Clairement, le premier ne présente aucune oscillation et n'est pas contrôllable. Pour éliminer ce terme, on considère l'équation pour

$$(v(t) - a)\,e^{\mp ia^2\log t}.$$

On va chercher donc w proche de

$$w_1(t,x) = e^{\pm ia^2\log t}\,e^{it\partial_x^2}\,u_+(x). \tag{17}$$

On note

$$v_1(t,x) = a + w_1(t,x), \tag{18}$$

et en utilisant les inégalités de Strichartz inhomogènes on obtient notre premier résultat.

Théorème 2.1. *Soit $t_0 > 0$. Il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a < a_0$, et pour tout u_+ petit dans $L^1 \cap L^2$ par rapport à a_0 et à t_0, l'équation (12) a une unique solution*

$$v - v_1 \in \mathcal{C}([t_0,\infty), L^2(\mathbb{R})) \cap L^4([t_0,\infty), L^\infty(\mathbb{R})),$$

satisfaisant, quand t tend vers l'infini,

$$\|v(t) - v_1(t)\|_{L^2} + \|v - v_1\|_{L^4((t,\infty),L^\infty)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{4}}). \tag{19}$$

Cependant cette décroissance ne suffit pas pour construire le flot binormal ; par exemple on ne sait pas si v s'annule pas. On va exploiter mieux les oscillations du terme linéaire, en se plaçant dans des espaces de Sobolev.

Théorème 2.2. *Soit $t_0 > 0$ et $s \in \mathbb{N}^*$. Il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a < a_0$, et pour tout u_+ petit dans $\dot H^{-2} \cap H^s \cap W^{s,1}$ par rapport à a_0 et à t_0, l'équation (12) a une unique solution*

$$v - v_1 \in \mathcal{C}([t_0,\infty), H^s(\mathbb{R})),$$

satisfaisant, quand t tend vers l'infini, pour tout entier $0 < k \le s$,

$$\|(v - v_1)(t)\|_{L^2} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \ , \ \|\nabla^k (v - v_1)(t)\|_{L^2} = \mathcal{O}(t^{-1}). \tag{20}$$

La différence de taux de décroissance vient maintenant des termes quadratiques

$$\frac{2a}{t}|w|^2 \qquad , \qquad \frac{a}{t}w^2.$$

Le moins oscillant est le premier, qui donne le taux $t^{-\frac{1}{2}}$, mais ses dérivées s'estiment mieux. Les nouveaux taux de décroissance du Théorème 2.2 nous ont permis de reconstruire le flot binormal et d'obtenir des informations sur sa limite quand t tend vers 0. On montre que le courbe filament au temps $t = 0$ est proche de $\chi_a(0,x)$. En particulier on obtient pour ces perturbations la persistance de formation de singularité à temps 0.

Théorème 2.3. *Soient $\epsilon > 0$, $t_0 > 0$, $0 < a < a_0$, où a_0 est la constante du Théorème 2.2. Soit u_+ petit dans $\dot H^{-2} \cap H^3 \cap W^{3,1}$ avec $x^2 u_+$ petit dans H^1 par rapport à ϵ, a et t_0, et soit v la solution correspondante du Théorème 2.2. Alors il existe $\chi(t,x)$ flot de courbes correspondant à $u = \mathcal{T}(v)$ via la transformation de Hasimoto, solution de (1) pour tout $1/t_0 > t > 0$, tel qu'il existe une unique courbe $\chi_0(x)$ vérifiant*

$$|\chi(t,x) - \chi_0(x)| < Ca\sqrt{t}$$

uniformément en $x \in (-\infty,\infty)$.
De plus,

$$|\chi_0(x) - \chi_0(0) - xA_a^+ \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) - xA_a^- \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x)| < \epsilon\,|x|,$$

avec $A_a^{\pm}$ *sont deux vecteurs distincts et non-opposés, dont l'angle sous-entendu* θ *est déterminé par*

$$\cos\frac{\theta}{2} = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

3. Quelques détails de la preuve du Théorème 2.3

En vue de la transformée de Hasimoto (6), et de la transformation pseudo-conforme (11),

$$c(t,x) = |u(t,x)| = \frac{1}{\sqrt{t}}\left|v\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right)\right|,$$

et

$$\tau(t,x) = \Im\frac{u_x(t,x)}{u(t,x)} = \Im\frac{\frac{ix}{2t}\overline{v}\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right) + \partial_x\overline{v}\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right)}{\overline{v}\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right)}.$$

On a $v \in H^3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R})$, ce qui nous assure que la courbure et la torsion vont être suffisamment régulières. Par définition,

$$v(t,x) = a + e^{\pm ia^2\log t}e^{it\partial_x^2}u_+(x) + (v-v_1)(t,x).$$

La décroissance de $v - v_1$ du Théorème 2.2 combinée avec la formule explicite de l'évolution libre de Schrödinger nous permet d'obtenir que (c,τ) est proche de (c_a,τ_a), avec des taux de décroissance explicites, dépendant de u_+.

A partir de (c,τ) on va construire le flot binormal comme suit. On fixe la donnée initiale à temps $\tilde{t}_0 = 1/t_0$, $(T,n,b)(\tilde{t}_0,0)$, comme étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui est en particulier la valeur de $(T_a,n_a,b_a)(t,0)$. On définit $(T,n,b)(t,0)$ en imposant que ses dérivées en temps satisfassent le même système que la tangente, normale et binormale d'un flot binormal vérifierait. Après, à partir de $(T,n,b)(t,0)$ on construit $(T,n,b)(t,x)$ en intégrant le système de Frenet à t fixé. On impose donc

(21)

$$\begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}(t,x) = \begin{pmatrix} T_a \\ n_a \\ b_a \end{pmatrix}(t,0) - \int_t^{\tilde{t}_0} \begin{pmatrix} 0 & -c\,\tau & c_x \\ c\,\tau & 0 & \left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) \\ -c_x & -\left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}(t',0)dt'$$

$$+\int_0^x \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}(t,s)ds.$$

Ce faisant, T va bien vérifier (4)

$$T_t = T \wedge T_{xx}.$$

Une fois T construite, pour une donnée $\chi(\tilde{t}_0,0)$, on définit, pour tout $\tilde{t}_0 > t > 0$,

$$\chi(t,x) = \chi(\tilde{t}_0,0) - \int_t^{\tilde{t}_0}(cb)(t',0)dt' + \int_0^x T(t,s)ds.$$

En utilisant le système de Frenet,

$$T_t = T \wedge T_{xx} = T \wedge (cn)_x = T \wedge (c_x n + c\tau b) = -c\tau n + c_x b,$$

et il s'en suit que χ vérifie (3).

Finalement, une fois $\chi(t,x)$ obtenue pour $t > 0$, par (3) et l'expression (9) de la courbure c_a de laquelle c est assez proche, on a

$$|\chi(t_1,x) - \chi(t_2,x)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} c(t,x) b(t,x) dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ca}{\sqrt{t}} dt \underset{t_1,t_2 \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En notant $\chi_0(x)$ la limite à $t = 0$, on obtient de façon similaire pour tout $x \in (-\infty, \infty)$,

$$|\chi(t,x) - \chi_0(x)| \leq Ca\sqrt{t}.$$

Pour montrer que $\chi(0,x)$ est proche de $\chi_a(0,x)$, on montre d'abord que la tangente $T(t,x)$ est proche de $T_a(t,x)$, de la façon suivante. Dans un premier temps, on montre que $T(t,0)$ est proche de $T_a(t,0)$, puis que $T(t,x)$ est proche de $T_a(t,x)$. Pour la deuxième étape, on va avoir besoin que tout $(T,n,b)(t,0)$ soit proche de $(T_a,n_a,b_a)(t,0)$.

3.1. **Estimations à** $(t,0)$**.** D'après la définition (21) de (T,n,b), pour avoir $(T,n,b)(t,0)$ proche de $(T_a,n_a,b_a)(t,0)$ il suffit de montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & |c\,\tau| & |c_x| \\ |c\,\tau| & 0 & \left|\frac{c_{xx} - c\tau^2}{c}\right| \\ |c_x| & \left|\frac{c_{xx} - c\tau^2}{c}\right| & 0 \end{pmatrix} (t,0)$$

est intégrable à t près de 0. En vue du bon taux de décroissance obtenu pour $(c,\tau) - (c_a,\tau_a)$, on arrive à traiter assez facilement les termes $c\tau$ et c_x. Pour le troisième, on utilise la relation (8), qui nous donne l'information supplémentaire à $x = 0$

$$\left| \frac{c_{xx} - c\tau^2}{c} \right| \approx \left| \frac{c_a^2 - c^2}{2} \right|.$$

Ceci nous ramène à une quantité facile à estimer, et on a bien que $(T,n,b)(t,0)$ reste proche de $(T_a,n_a,b_a)(t,0)$.

3.2. **Estimations à** (t,x)**.** Le fait que $T(t,x)$ est proche de $T_a(t,x)$ est plus technique, et on va le traiter de deux façons différentes : une pour $x \geq M\sqrt{t}$ et une autre pour $x \leq M\sqrt{t}$, avec M choisi assez grand par rapport à $1/\epsilon$.

D'après (21),

$$T(t,x) - T(t,x') = \int_{x'}^{x} (cn)(t,s) ds,$$

qu'on va écrire

$$T(t,x) - T(t,x') = \int_{x'}^{x} \left(c\frac{\tau_a - \tau}{\tau_a} n + \frac{c}{\tau_a} \tau n \right) (t,s) ds.$$

Comme $\tau n = (-b)_s$, on a, en intégrant par parties,

$$T(t,x) - T(t,x') = \left[-\frac{c}{\tau_a} b\right]_{x'}^{x} + \int_{x'}^{x} \left(c\frac{\tau_a - \tau}{\tau_a} n + \left(\frac{c}{\tau_a}\right)_s b\right)(t,s)ds.$$

T_a va vérifier le même type de relation, et en les soustrayant, on obtient comme terme à estimer, parmi d'autres,

$$\left[\frac{c_a}{\tau_a}(b - b_a)\right]_{x'}^{x} = \left[\frac{2a\sqrt{t}}{\cdot}(b - b_a)\right]_{x'}^{x}.$$

Pour pouvoir traiter ce terme on choisit M assez grand par rapport à $1/\epsilon$ et on prend $x' = M\sqrt{t}$ et $x \geq M\sqrt{t}$. On montre que $T(t,x)$ reste proche de $T_a(t,x)$, si on sait que $T(t, M\sqrt{t})$ est proche de $T_a(t, M\sqrt{t})$. On conclut en montrant que $T(t,x)$ reste proche de $T_a(t,x)$ quel que soit $x \leq M\sqrt{t}$. Pour ce faire, il faut prendre en compte les variations de la normale $n(t,x)$. On considère alors le vecteur

$$N = n + ib,$$

et la fonction

$$\Sigma^2(t,x) = |T - T_a|^2(t,x) + |N - N_a|^2(t,x).$$

En calculant la dérivée en espace de Σ^2, on montre que $\Sigma(t,x)$ est assez petit pour $x \leq M\sqrt{t}$.

Au final on obtient que pour tout $\epsilon > 0$, si u_+ est assez petit,

$$|(T - T_a)(t,x)| \leq \epsilon. \tag{22}$$

En particulier, pour $x > 0$,

$$\chi(t,x) - \chi(t,0) = \int_0^x T(t,s)ds = A_a^+ x + \int_0^x (T - T_a)(t,s)ds + \int_0^x T_a(t,s) - A_a^+ ds.$$

Le troisième terme tend vers 0 quand t tend vers 0, uniformément en x [13]. En utilisant aussi (22) et en faisant t tendre vers 0, on obtient l'information voulue

$$|\chi_0(x) - \chi_0(0) - xA_a^+| \leq \epsilon x.$$

4. Quelques détails des preuves des Théorème 2.1 et 2.2

Dans cette section on va donner quelques estimées des contributions des termes linéaires et quadratiques dans les termes de Duhamel, ceux cubiques ne posant pas de problèmes. Ces contributions sont essentielles pour pouvoir faire un point fixe dans les espaces considérés afin d'obtenir l'existence des opérateurs d'ondes.

4.1. **Terme linéaire.** Pour le Théorème 2.1 on utilise les inégalités de Strichartz inhomogènes,

$$\left\|\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(a^2\frac{\overline{w_1}(\tau)}{\tau}\right)d\tau\right\|_{L^2} = a^2\left\|\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(e^{-i\tau\partial_x^2}\frac{\overline{u_+}}{\tau^{1\pm ia^2}}\right)d\tau\right\|_{L^2}$$
$$= a^2\left\|\int_t^\infty e^{-i2\tau\partial_x^2}\left(\frac{\overline{u_+}}{\tau^{1\pm ia^2}}\right)d\tau\right\|_{L^2}$$
$$\leq Ca^2\left\|\frac{\overline{u_+}}{\tau}\right\|_{L^{p'}((t,\infty),L^{q'})} = Ca^2\left\|u_+\right\|_{L^{q'}}\left\|\frac{1}{\tau}\right\|_{L^{p'}(t,\infty)} = Ca^2\left\|u_+\right\|_{L^{q'}}\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}.$$

Les couples admissibles (p,q) en une dimension sont compris entre $L^\infty L^2$ et L^4L^∞, donc si on suppose $u_+\in L^1\cap L^2$ la meilleure décroissance qu'on peut obtenir de cette façon est $t^{-\frac{1}{4}}$.

Pour le Théorème 2.2, où on impose plus de contraintes sur la donnée initiale, on écrit le terme en Fourier

$$\int_t^\infty e^{i(t-2\tau)\partial_x^2}\left(\frac{\overline{u_+}}{\tau^{1\pm ia^2}}\right)d\tau = \int_t^\infty\int\frac{e^{-i(t-2\tau)\xi^2}}{\tau^{1\pm ia^2}}\,e^{ix\xi}\hat{u_+}(-\xi)d\xi d\tau,$$

et en faisant une intégration par parties en τ on obtient

$$= \int\frac{e^{it\xi^2}}{t^{1\pm ia^2}}\,e^{ix\xi}\frac{\hat{u_+}(-\xi)}{2i\xi^2}d\xi + (1\pm ia^2)\int_t^\infty\int\frac{e^{-i(t-2\tau)\xi^2}}{\tau^{2\pm ia^2}}\,e^{ix\xi}\frac{\hat{u_+}(-\xi)}{2i\xi^2}d\xi d\tau.$$

Par Plancherel on obtient le contrôle voulu

$$\left\|\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(a^2\frac{\overline{w_1}(\tau)}{\tau}\right)d\tau\right\|_{L^2} \lesssim \frac{a^2}{t}\left\|\frac{\hat{u_+}(-\xi)}{\xi^2}\right\|_{L^2} = \frac{a^2}{t}\|u_+\|_{\dot{H}^{-2}}. \tag{23}$$

Les dérivées ∇^k de ce terme ont la même décroissance en temps $1/t$, mais avec une constante dépendant de la norme $\dot{H}^{-2+k}$ de u_+.

4.2. **Termes quadratiques.** On va traiter ici le pire des deux termes quadratiques, celui qui oscille le moins, $\frac{|w_1|^2}{t}$.

Pour le Théorème 2.1 on va utiliser la dispersion du groupe libre de Schrödinger,

$$\left\|\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(2a\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right)d\tau\right\|_{L^2} = 2a\left\|\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(\frac{|e^{i\tau\partial_x^2}u_+|^2}{\tau}\right)d\tau\right\|_{L^2}$$
$$\leq Ca\int_t^\infty \||e^{i\tau\partial_x^2}u_+|^2\|_{L^2}\frac{d\tau}{\tau} \leq Ca\int_t^\infty \|e^{i\tau\partial_x^2}u_+\|_{L^\infty}\|e^{i\tau\partial_x^2}u_+\|_{L^2}\frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{Ca}{\sqrt{t}}\left\|u_+\right\|_{L^1}\left\|u_+\right\|_{L^2}.$$

Pour le Théorème 2.2 on va utiliser à nouveau les oscillations en Fourier

$$\nabla^k\int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2}\left(\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right)d\tau = \int_t^\infty\int|\xi|^k\frac{e^{-i(t-\tau)\xi^2}}{\tau}\,e^{ix\xi}\widehat{e^{i\tau\partial_x^2}u_+}*\widehat{e^{-i\tau\partial_x^2}\overline{u}_+}\,d\xi\,d\tau$$
$$= \int_t^\infty\int\int\frac{e^{-it\xi^2-i\tau(\eta^2-(\eta-\xi)^2-\xi^2)}}{\tau}\,|\xi|^k\,e^{ix\xi}\hat{u_+}(\eta)\widehat{\overline{u}_+}(\eta-\xi)\,d\eta\,d\xi\,d\tau$$

$$= \int_t^\infty \int\int \frac{e^{-it\xi^2+2i\tau\xi(\eta-\xi)}}{\tau} |\xi|^k e^{ix\xi} \hat{u_+}(\eta)\widehat{\overline{u}_+}(\eta-\xi)\, d\eta\, d\xi\, d\tau.$$

A nouveau on fait une intégration par parties en τ

$$\nabla^k \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right) d\tau = \int\int \frac{e^{-it(\xi^2+2\xi(\eta-\xi))}}{t} |\xi|^k e^{ix\xi} \frac{\hat{u_+}(\eta)\widehat{\overline{u}_+}(\eta-\xi)}{2i\xi(\eta-\xi)}\, d\eta\, d\xi$$

$$+ \int_t^\infty \int\int \frac{e^{-it\xi^2-2i\tau\xi(\eta-\xi)}}{\tau^2} |\xi|^k e^{ix\xi} \frac{\hat{u_+}(\eta)\widehat{\overline{u}_+}(\eta-\xi)}{2i\xi(\eta-\xi)}\, d\eta\, d\xi\, d\tau.$$

On obtient, pour $k \geq 1$,

$$\left\|\nabla^k \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(2a\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right) d\tau\right\|_{L^2} \lesssim \frac{Ca}{t} \left\||\xi|^{k-1}\widehat{u_+} \star \frac{\widehat{\overline{u_+}}}{\cdot}(\xi)\right\|_{L^2}$$

$$= \frac{Ca}{t} \left\|u_+ \widehat{\left(\frac{\widehat{\overline{u_+}}}{\cdot}\right)}(\xi)\right\|_{\dot{H}^{k-1}}.$$

Si $k = 1$, étant en une dimension où la norme L^∞ est majorée par la norme H^1, on obtient comme contrôle

$$\left\|\nabla \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(2a\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right) d\tau\right\|_{L^2} \lesssim \frac{Ca}{t} \|u_+\|_{H^1} \|u_+\|_{\dot{H}^{-1}}.$$

Si $k \geq 2$, H^{k-1} est une algèbre, et on a

$$\left\|\nabla^k \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(2a\frac{|w_1(\tau)|^2}{\tau}\right) d\tau\right\|_{L^2} \lesssim \frac{Ca}{t} \|u_+\|_{H^{k-1}} \left(\|u_+\|_{\dot{H}^{-1}} + \|u_+\|_{\dot{H}^{k-2}}\right).$$

Pour $k = 0$ on utilise le même type d'estimation comme fait ci-dessus pour le Théorème 2.1. En conclusion, les termes de type quadratique sont contrôlés par $C(u_+)/\sqrt{t}$, tandis que leurs dérivées sont contrôlées par $C(u_+)/t$.

Références

[1] R.J. Arms, F.R. Hama, Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring, Phys. Fluids, (1965), 553.

[2] V. Banica, L. Vega, On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations, à paraître Ann. I. H. Poincar, An. Non Lin.

[3] G.K. Batchelor, An Introduction to the Fluid Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

[4] R. Betchov, On the curvature and torsion of an isolated filament, J. Fluid Mech. 22 (1965), 471.

[5] T. F. Buttke, A numerical study of superfluid turbulence in the Self-Induction Approximation, J. of Comp. Physics 76, (1988), 301-326.

[6] R. Carles, Geometric Optics and Long Range Scattering for One-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), no. 1, 41-67.

[7] M. Lakshmanan, M. Daniel, On the evolution of higher dimensional Heisenberg continuum spin systems, Physics A 107, (1981), 533-552 .

[8] M. Lakshmanan, TH. W. Ruijgrok, C.J. Thompson, On the dynamics of a continuum spin system, Physica A 84, (1976), 577-590.

[9] L.D. Landau, Collected papers of L. D. Landau, Gordon and Breach, New York, (1965).

[10] L. S. Da Rios, On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 117.

[11] F. de la Hoz, Self-similar solutions for the 1-D Schrödinger map on the Hyperbolic plane, Math. Z. 257 (2007), 61-80.

[12] S. Gustafson, K. Nakanishi, T.-P. Tsai, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions, arXiv :math/0605655.

[13] S. Gutiérrez, J. Rivas, L. Vega, Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation, Comm. Part. Diff. Eq. 28 (2003), 927-968.

[14] H. Hasimoto, A soliton on a vortex filament, J. Fluid Mech. 51 (1972), 477-485.

[15] N. Hayashi, P. Naumkin, Domain and range of the modified wave operator for Schrödinger equations with critical nonlinearity, Comm. Math. Phys. 267 (2006), no. 2, 477-492.

[16] T. Ozawa, Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, Commun. Math. Phys. 139, no.3 (1991), 479-493.

[17] R.L. Ricca, The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics, Fluid Dynam. Res. 18, no. 5 (1996), 245–268.

[18] P.G. Saffman, Vortex dynamics, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge U. Press, New York, 1992.

[19] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.