

DISPERSION POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER 1-D AVEC PLUSIEURS POTENTIELS DE DIRAC

VALERIA BANICA¹

RÉSUMÉ. Ce texte présente les résultats obtenus dans [BI11, BI14] en collaboration avec Liviu Ignat sur la représentation et les propriétés de dispersion de la solution de l'équation linéaire de Schrödinger sur certains graphes métriques. Le cas de l'équation de Schrödinger sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac découle comme cas particulier.

1. INTRODUCTION

1.1. Historique du problème. Comme nous allons le voir plus tard, le cas de l'équation de Schrödinger sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac est un cas particulier de l'équation de Schrödinger sur un graphe métrique. Nos articles [BI11, BI14] traitent l'équation de Schrödinger dans ce cadre plus général, que nous allons présenter d'abord.¹

La motivation de l'étude de l'équation de Schrödinger sur des réseaux vient en partie de la nanotechnologie, des câbles quantiques qui ont deux dimensions réduites à quelques nanomètres. Le plus simple modèle de conduction à travers un réseau quantique est un Hamiltonien sur un graphe planaire. Les réseaux quantiques sont modélisés par le Laplacien avec conditions de transmission de type Kirchhoff. Plus généralement, les opérateurs différentiels sur les graphes métriques apparaissent dans une grande variété d'applications : nanostructures de carbone, cristaux photoniques, guides d'ondes quantiques, chaos quantique etc.

Par graphe métrique on entend une collection de sommets et d'arêtes paramétrées. Une arête e est ainsi identifiée à un intervalle $I_e = [0, a_e]$ si l'arête est finie de longueur a_e , et à $I_e = [0, \infty[$ sinon. Une fonction \mathbf{u} sur Γ est donnée par une collection de fonctions $u_e : I_e \rightarrow \mathbb{R}$, qui représentent ses restrictions aux arêtes paramétrées par des intervalles I_e de \mathbb{R} . Les espaces d'intégrations usuels $L^p(\Gamma)$, $H^s(\Gamma)$ sont définis en imposant que chaque restriction u_e appartient à l'espace correspondant sur I_e . Il existe plusieurs extensions auto-adjointes du Laplacien, qui agit simplement comme ∂_x^2 sur chaque arête, en fonction des conditions de transmission qu'on impose aux sommets. Une condition très connue est celle de Kirchhoff, de continuité et de somme des dérivées premières nulle en chaque sommet. Pour simplifier la présentation de ces conditions, nous allons considérer le cas simple d'un graphe étoilé, avec un seul sommet duquel partent n arêtes. Les conditions de Kirchhoff au

¹Les articles [BI11, BI14] ont été partiellement financés par les projets ANR "R.A.S." ANR-08-JCJC-0124-01 et "SchEq" ANR-12-JS01-0005-01 et par le projet LEA Franco-Roumain Math-Mode.

sommet sont

$$u_{e_1}(0) = \dots = u_{e_n}(0), \quad \sum_{1 \leq i \leq n} u'_{e_i}(0) = 0.$$

Une classe plus grande de conditions est celle d'interactions type delta,

$$u_{e_1}(0) = \dots = u_{e_n}(0), \quad \sum_{1 \leq i \leq n} u'_{e_i}(0) = \alpha u_1(0),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ désigne l'intensité de l'interaction. Plus généralement, les extensions auto-adjointes du Laplacien sont données par des condition du type

$$A\mathbf{u}(0) + B\mathbf{u}'(0) = 0, \quad \text{rank}(AB) = n, \quad A^t B = B^t A.$$

Il existe une très vaste littérature sur l'étude des propriétés spectrales des opérateurs de Schrödinger (par exemple [Kuc04, Kuc05, Kuc08, KS06, GS06, Exn11]). Au sein de cette communauté on considérait jusqu'à il y a cinq ans comme perspective ouverte l'étude de l'équation de Schrödinger non-linéaire sur un graphe Γ :

$$\begin{cases} i\mathbf{u}_t + \Delta_\Gamma \mathbf{u} \pm |\mathbf{u}|^p \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Et ce n'est que depuis peu d'années que des résultats ont paru dans cette direction. Nous allons les décrire dans la suite.

Un des premiers résultats, [Ign10], donne la dispersion des solutions de l'équation linéaire

$$\|e^{it\Delta_\Gamma} u_0\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\Gamma)}, \quad t \neq 0,$$

qui est un outil de base pour la compréhension de l'équation non-linéaire. Ce résultat est sous l'hypothèse des arbres réguliers : même nombre d'arêtes, ayant de plus la même longueur, émergeant de chaque sommet d'une génération. Cette structure permet dans [Ign10] de se réduire à l'équation de Schrödinger sur la droite avec un Laplacien à coefficient une fonction en escalier. Ce cadre laminaire est celui de [Ban03] où la dispersion avait été démontrée, permettant ainsi de la transcrire sur le graphe.

Une analyse détaillée est faite dans [CH10] sur l'équation linéaire et celle cubique avec des conditions de Kirchhoff, pour de données initiales et des graphes sujets à certaines symétries qui permettent une réduction à l'équation de Schrödinger sur la demi-droite avec certaines conditions au bord.

Dans [AMAN12] la dispersion est démontrée pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel sur un arbre étoilé avec conditions Kirchhoff. Dans ce cas d'arbre étoilé l'approche consiste à une réduction à un système d'équations sur \mathbb{R} .

Enfin, nous rapellons la série d'articles [ACFN11, ACFD12, ACFN12a, ACFN12b, ACFN14, AST14] concernant l'existence et les propriétés des états fondamentaux sur les graphes ainsi que la description de la propagation des solitons pour l'équation cubique sur un graphe étoilé, avec conditions de type δ .

1.2. Résultats obtenus dans [BI11, BI14]. Usuellement l'inégalité de dispersion est obtenue à l'aide de l'analyse de Fourier, mais sur des graphe il n'y a pas en général une telle analyse. Néanmoins, nous avons trouvé dans [BI11, BI14] une façon d'écrire la résolvante du Laplacien avec conditions de transmission de type δ qui nous permet de déduire la dispersion.

Notre cadre est celui des arbre à nombre fini de sommets, sans cycles, avec au moins deux arêtes émergeant de chaque sommet.

Dans notre premier article [BI11] nous avons considéré le cas des conditions Kirchhoff aux sommets, et nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.1. *La solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur un arbre avec conditions Kirchhoff aux sommets est de la forme*

$$e^{it\Delta_\Gamma} u_0(x) = \sum_\lambda \frac{a_\lambda}{\sqrt{|t|}} \int_{I_\lambda} e^{i\frac{\phi_\lambda(x,y)}{t}} u_0(y) dy,$$

avec $\phi_\lambda(x, y) \in \mathbb{R}$, $I_\lambda \in \{I_e\}_{e \in E}$, $\sum_\lambda |a_\lambda| < \infty$. Elle satisfait l'inégalité de dispersion

$$\|e^{it\Delta_\Gamma} u_0\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\Gamma)}, \quad t \neq 0.$$

Ensuite, dans [BI14], nous avons abordé le cas plus général de conditions de type δ , qui s'est avéré plus délicat. Nous ne disposons plus d'une représentation de la solution comme dans le cas Kirchhoff, mais nous obtenons toujours la dispersion. Pour présenter notre résultat dans toute sa généralité, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Soit $\Gamma = \Gamma_p$ un arbre à p sommets, sans cycles, avec au moins deux arêtes émergeant de chaque sommet, avec conditions aux sommets de type δ d'intensités α_j , $1 \leq j \leq p$. Nous pouvons regarder l'arbre Γ_p comme étant obtenu à partir d'un arbre Γ_{p-1} avec $p-1$ sommets, auquel on a greffé un nouveau $p^{\text{ème}}$ sommet v_p avec condition type δ d'intensité α_p sur une arête infinie, à distance a_{p-1} du sommet v_{p-1} de Γ_{p-1} . On définit la fonction $f_p(\omega) = \det D_p(\omega)$, où $\det D_p(\omega)$ est déterminé par les formules de récurrence (10) en fonction des longueurs des arêtes finies et des intensités dans les sommets.

Enfin, nous rappelons que dans la présence d'intensités négatives, des valeurs propres positives du Laplacien peuvent apparaître, mais elles seront qu'un nombre fini, au plus p .

Théorème 1.2. *Si*

$$(1) \quad \partial_\omega^{p-1} f(\omega)|_{\omega=0} \neq 0,$$

alors la solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur un arbre avec conditions de type δ aux sommets satisfait l'inégalité de dispersion

$$\|e^{it\Delta_\Gamma} P u_0\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\Gamma)}, \quad t \neq 0,$$

où P est le projecteur spectral en dehors du spectre discret du Laplacien.

Dans le cas où toutes les intensités sont positives, la condition (2) est vérifiée et la solution de l'équation de Schrödinger linéaire satisfait l'inégalité de dispersion

$$\|e^{it\Delta_\Gamma} u_0\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\Gamma)}, \quad t \neq 0.$$

En vue de la forme explicite de $f_p(\omega)$, la condition (2) est vérifiée génériquement. Typiquement, la seule situation à éviter pour le cas d'arbre avec 2 sommets ayant chacun deux arêtes émergentes est celle lorsque la distance a entre les sommets vérifie $a = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}$, ce qui est précisément la situation de présence de zéro résonances.

Dans la deuxième section de ce texte nous allons donner une esquisse des preuves de ces deux théorèmes.

1.3. Un cas particulier : l'équation sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac. Les propriétés spectrales du Laplacien avec plusieurs potentiels de type Dirac ont été intensément étudiées ; nous renvoyons le lecteur au livre [AGHKH05]. L'équation de Schrödinger linéaire avec des potentiels de type Dirac a été aussi considérée depuis plusieurs dizaines d'années dans le cas d'un seul potentiel de Dirac [GS86, Man89, AS05, DH09], ou de deux potentiels de Dirac symétriques ou sous certaines conditions [KS10, APF14]. En particulier, dans ces cas la dispersion a été démontrée. Dans le cas de plusieurs potentiels de Dirac seulement une version faible de la dispersion a été mise en évidence dans [DMW11]. Enfin, notons qu'en ce qui concerne l'équation de Schrödinger non-linéaire, dans le cas d'un seul potentiel de Dirac, des résultats ont été obtenus sur l'existence et les propriétés des états fondamentaux [FJ08, FOO08, LCF⁺08, ANV13, AN14], et sur la dynamique en temps des solitons [HMZ07a, HZ07, HMZ07b, DH09].

Nous remarquons que le cadre de l'équation de Schrödinger sur la droite en présence de p potentiels de type Dirac d'intensités $\alpha_j, 1 \leq j \leq p$ revient au cas d'un arbre Γ avec p sommets, sans cycles, avec deux arêtes émergent de chaque sommet et avec conditions de type δ d'intensités $\alpha_j, 1 \leq j \leq p$. Effectivement, en prenant $p = 1$ pour simplifier, d'une fonction $f \in \{f \in H^2(\Gamma), f_1(0) = f_2(0), f'_1(0) + f'_2(0) = \alpha_1 f_1(0)\}$ on obtient, en posant $g(x) = f_1(-x)1_{x \leq 0} + f_2(x)1_{x \geq 0}$, une fonction $g \in \{H^2(\mathbb{R}^*), g(0^+) = g(0^-), g'(0^+) - g'(0^-) = \alpha_1 g(0)\}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, $-\infty < x_1 < \dots < x_p < \infty$ et H le Laplacien sur la droite avec p potentiels de Dirac localisés aux points x_j et d'intensités $\alpha_j \in \mathbb{R}$:

$$H = \Delta - \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta(x - x_j).$$

Nous notons $f(\omega) = f_p(\omega)$ où la fonction $f_p(\omega)$ est construite de la manière récurrente suivante

$$f_p(\omega) = \frac{2\omega + \alpha_p}{\omega + \alpha_p} e^{\omega(x_p - x_{p-1})} f_{p-1}(\omega) \left(1 - \frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega(x_p - x_{p-1})} g_{p-1}(\omega) \right), \quad f_1(\omega) = \frac{2\omega + \alpha_1}{\omega + \alpha_1},$$

avec g_p définie de façon récurrente par

$$g_1(\omega) = \frac{\alpha_1}{2\omega + \alpha_1}, \quad g_p(\omega) = \frac{\frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} - \frac{-2\omega + \alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega(x_p - x_{p-1})} g_{p-1}(\omega)}{1 - \frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega(x_p - x_{p-1})} g_{p-1}(\omega)}.$$

Avec ces notations le Théorème 1.2 nous donne le résultat suivant.

Théorème 1.3. *Si*

$$(2) \quad \partial_\omega^{p-1} f(\omega)|_{\omega=0} \neq 0,$$

alors la solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur la droite avec p potentiels de Dirac satisfait l'inégalité de dispersion

$$\|e^{itH} P u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad t \neq 0,$$

où P est le projecteur spectral en dehors du spectre discret de H .

Dans le cas où toutes les intensités sont positives, la condition (2) est vérifiée et la solution de l'équation de Schrödinger linéaire satisfait l'inégalité de dispersion

$$\|e^{itH} u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad t \neq 0.$$

Dans la suite nous allons donner une esquisse des preuves des Théorèmes 1.1 et 1.2. Dans §2.1 nous allons présenter les principales étapes de la preuve, qui est basée sur une représentation de la résolvante du Laplacien, similaire à celle dans [Ban03]. Ensuite dans §2.2 nous allons détailler la façon de représenter la résolvante. Pour s'habituer avec cette approche nous allons calculer dans §2.3 la résolvante et obtenir la dispersion dans la cas simple, déjà connu, d'un arbre avec un sommet et deux arêtes, ce qui correspond au cas du Laplacien sur la droite avec un potentiel de Dirac. Pour simplifier la présentation, dans §2.4 nous allons faire la partie essentielle du calcul de la résolvante du Laplacien sur un arbre dans le cadre plus simple d'arbre correspondant au Laplacien sur la droite en présence de p potentiels de type Dirac. Enfin, dans la dernière sous-section nous reviendrons au cas d'un arbre général pour esquisser la fin des preuves.

2. ESQUISSE DES PREUVES

2.1. Les étapes de la preuve. Nous considérons pour $\omega > 0$ et $\mathbf{u}_0 = P \mathbf{u}_0$ la résolvante

$$R_\omega \mathbf{u}_0 = (-\Delta_\Gamma + \omega^2 I)^{-1} \mathbf{u}_0.$$

Le calcul spectral nous permet d'écrire

$$e^{it\Delta_\Gamma} \mathbf{u}_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} ((\Delta_\Gamma - (s - i\epsilon)I)^{-1} \mathbf{u}_0 - (\Delta_\Gamma - (s + i\epsilon)I)^{-1} \mathbf{u}_0) \frac{ds}{2i\pi}.$$

En utilisant le fait que le spectre continu de Δ_Γ est $] -\infty, 0]$ et que le spectre discret est contenu dans $]0, \infty[$, l'intégration se restreint à $] -\infty, 0]$. Par le changement de variable

$s = -\tau^2$ nous avons

$$\begin{aligned} e^{it\Delta_\Gamma} \mathbf{u}_0(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-it\tau^2} \tau \left((-\Delta_\Gamma + (-\tau^2 + i\epsilon)I)^{-1} \mathbf{u}_0 - (-\Delta_\Gamma - (-\tau^2 - i\epsilon)I)^{-1} \mathbf{u}_0 \right) \frac{d\tau}{i\pi} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-it\tau^2} \tau \left(R_{\frac{\epsilon}{2\tau\epsilon} + i\tau\epsilon} \mathbf{u}_0 - R_{\frac{\epsilon}{2\tau\epsilon} - i\tau\epsilon} \mathbf{u}_0 \right) \frac{d\tau}{i\pi}, \end{aligned}$$

avec $\tau_\epsilon = \sqrt{\frac{\sqrt{\tau^2 + \epsilon^2} + \tau^2}{2}}$. Nous allons montrer d'une part que $\omega R_\omega \mathbf{u}_0(x)$ peut être continuée analytiquement jusqu'à l'axe imaginaire. De ce fait, nous pouvons écrire

$$(3) \quad e^{it\Delta_\Gamma} \mathbf{u}_0(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-it\tau^2} \tau R_{i\tau} \mathbf{u}_0(x) \frac{d\tau}{i\pi}.$$

D'autre part, nous allons montrer que $\tau R_{i\tau} \mathbf{u}_0(x)$ est une somme finie de termes de type

$$(4) \quad g(\tau) \int_I \mathbf{u}_0(y) e^{i\tau(\pm x \pm y)} dy,$$

appropriés pour obtenir l'inégalité de dispersion à travers l'estimation d'intégrale oscillante classique

$$\left| \int_{-\infty}^\infty e^{-it\tau^2} e^{i\tau a} g(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|t|}} (\|g\|_{L^\infty} + \|g'\|_{L^1}).$$

2.2. La formule générale de la résolvante. Nous allons faire une analyse 1-D ramifiée dans le sens suivant. Nous considérons un arbre avec un nombre fini p de sommets, sans cycles, avec au moins deux arêtes émergeant de chaque sommet, avec conditions de type δ d'intensités α_j , $1 \leq j \leq p$. Sur chaque arête paramétrisée par I_e l'équation de la résolvante se résout facilement et nous obtenons pour $x \in I_e$

$$(5) \quad R_\omega \mathbf{u}_0(x) = c_e e^{\omega x} + \tilde{c}_e e^{-\omega x} + \frac{t_e(x, \omega)}{\omega},$$

avec

$$t_e(x, \omega) = \frac{1}{2} \int_{I_e} \mathbf{u}_0(y) e^{-\omega|x-y|} dy.$$

Les conditions de continuité de $R_\omega \mathbf{u}_0$ et de transmission de $\partial_x R_\omega \mathbf{u}_0$ aux sommets d'un arbre nous donnent le système d'équations des inconnues c_e et \tilde{c}_e :

$$(6) \quad D(\omega) \times (\text{colonne des } c, \tilde{c}) = T(\omega),$$

où la colonne des termes source $T(\omega)$ est une combinaison de $\frac{t_{e'}(0, \omega)}{\omega}$ et de $\frac{t_{e'}(a_{e'}, \omega)}{\omega}$, si l'arête $I_{e'}$ est paramétrisée par $[0, a_{e'}]$. En résolvant ce système nous déduisons

$$(7) \quad R_\omega \mathbf{u}_0(x) = \frac{\det M^{c_e}(\omega)}{\det D(\omega)} e^{\omega x} + \frac{\det M^{\tilde{c}_e}(\omega)}{\det D(\omega)} e^{-\omega x} + \frac{t_e(x, \omega)}{\omega}.$$

où $M^{c_e}(\omega)$ est la matrice des coefficients $D(\omega)$ avec la colonne des coefficients de c_e remplacée par la colonne $T(\omega)$. Il s'ensuit que

$$(8) \quad \omega R_\omega \mathbf{u}_0(x) = \sum_{e'} \frac{f_{e'}^1(\omega)}{\det D(\omega)} e^{\omega x} t_{e'}(0, \omega) + \sum_{|e'|=a_{e'}} \frac{f_{e'}^2(\omega)}{\det D(\omega)} e^{\omega x} t_{e'}(a_{e'}, \omega)$$

$$+ \sum_{e'} \frac{\tilde{f}_{e'}^1(\omega)}{\det D(\omega)} e^{-\omega x} t_{e'}(0, \omega) + \sum_{|e'|=a_{e'}} \frac{\tilde{f}_{e'}^2(\omega)}{\det D(\omega)} e^{-\omega x} t_{e'}(a_{e'}, \omega) + t_e(x, \omega),$$

où $f_{e'}^1(\omega)$ est le coefficient de $t_{e'}(0, \omega)$ dans $\omega M^{c_e}(\omega)$, $\tilde{f}_{e'}^1(\omega)$ est le coefficient de $t_{e'}(0, \omega)$ dans $\omega M^{\tilde{c}_e}(\omega)$, et pour les arêtes de longueur finie $a_{e'}$, $f_{e'}^2(\omega)$ est le coefficient de $t_{e'}(a_{e'}, \omega)$ dans $\omega M^{c_e}(\omega)$, $\tilde{f}_{e'}^2(\omega)$ est le coefficient de $t_{e'}(a_{e'}, \omega)$ dans $\omega M^{\tilde{c}_e}(\omega)$.

Il s'agit donc maintenant, afin de décrire la résolvante, de comprendre la matrice $D(\omega)$. Dans ce qui suit, pour simplifier la présentation, on va calculer la résolvante dans le cas le plus simple d'arbre, avec plusieurs sommets, chacun engendrant deux arêtes, avec condition de transmission de type δ . Comme déjà remarqué, ce cadre correspond à celui de l'équation de Schrödinger sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac.

2.3. Le cas d'un arbre avec un sommet et deux arêtes. Nous considérons dans cette sous-section, pour commencer, le cas déjà connu de la dispersion sur un arbre avec un sommet, deux arêtes paramétrées par $[0, \infty[$ et une condition de transmission au sommet de type δ avec intensité α_1 . En suivant (5), la résolvante s'écrit, pour tout $x \in [0, \infty[$,

$$(R_\omega \mathbf{u}_0)_1(x) = \tilde{c}_1 e^{-\omega x} + \frac{t_1(x, \omega)}{\omega}, \quad (R_\omega \mathbf{u}_0)_2(x) = \tilde{c}_2 e^{-\omega x} + \frac{t_2(x, \omega)}{\omega},$$

avec

$$t_j(x, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{u}_0)_j(y) e^{-\omega|x-y|} dy.$$

Les conditions de continuité au sommet $(R_\omega \mathbf{u}_0)_1(0) = (R_\omega \mathbf{u}_0)_2(0)$ donne

$$\tilde{c}_1 + \frac{t_1(0, \omega)}{\omega} = \tilde{c}_2 + \frac{t_2(0, \omega)}{\omega},$$

et celle de transmission au niveau de la dérivée $(R_\omega \mathbf{u}_0)'_1(0) + (R_\omega \mathbf{u}_0)'_2(0) = \alpha_1 (R_\omega \mathbf{u}_0)_1(0)$ donne

$$-\tilde{c}_1 \omega + t_1(0, \omega) - \tilde{c}_2 \omega + t_2(0, \omega) = \alpha_1 \tilde{c}_1 + \alpha_1 \frac{t_1(0, \omega)}{\omega}.$$

Le système (6) devient alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{\omega}{\omega + \alpha_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_2(0, \omega) - t_1(0, \omega)}{\omega} \\ \frac{\omega - \alpha_1}{\omega + \alpha_1} \frac{t_1(0, \omega)}{\omega} + \frac{\omega}{\omega + \alpha_1} \frac{t_2(0, \omega)}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice du système est

$$\det D_1(\omega) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{\omega}{\omega + \alpha_1} \end{pmatrix} = \frac{2\omega + \alpha_1}{\omega + \alpha_1}.$$

En particulier il existe $\epsilon, C > 0$ tels que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\Re \omega| \leq \epsilon$,

$$(9) \quad |\det D_1(\omega)| \geq C.$$

Aussi, en vue de (7), la résolvante s'écrit sur une arête, et similairement sur l'autre,

$$(R_\omega \mathbf{u}_0)_1(x) = \frac{\det M^{\tilde{c}_1}(\omega)}{\det D_1(\omega)} e^{-\omega x} + \frac{t_1(x, \omega)}{\omega},$$

où

$$M^{\tilde{c}_1}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{t_2(0,\omega)-t_1(0,\omega)}{\omega} & -1 \\ \frac{\omega-\alpha_1}{\omega+\alpha_1} \frac{t_1(0,\omega)}{\omega} + \frac{\omega}{\omega+\alpha_1} \frac{t_2(0,\omega)}{\omega} & \frac{\omega}{\omega+\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la matrice $M^{\tilde{c}_1}(\omega)$ sont uniformément bornés sur $\{\omega \in \mathbb{C}, \Re\omega \geq 0\}$. Ceci, avec (9) implique le fait que $\omega R_\omega \mathbf{u}_0$ peut se prolonger analytiquement jusqu'à l'axe imaginaire, ce qui était notre premier but, en vue de pouvoir utiliser la formule spectrale (3). Il s'ensuit aussi que

$$i\tau(R_{i\tau} \mathbf{u}_0)_1(x) = \frac{\tilde{f}_1^1(i\tau)}{\det D_1(i\tau)} e^{-i\tau x} t_1(0, i\tau) + \frac{\tilde{f}_2^1(i\tau)}{\det D_1(i\tau)} e^{-i\tau x} t_2(0, \omega) + t_1(x, i\tau),$$

avec

$$\tilde{f}_1^1(i\tau) = \frac{-\alpha_1}{i\tau + \alpha_1}, \quad \tilde{f}_2^1(i\tau) = \frac{2i\tau}{i\tau + \alpha_1}.$$

Nous retrouvons ainsi une écriture du type (4) recherchée pour avoir la dispersion. Effectivement, les quotients $\frac{\tilde{f}_j^1(i\tau)}{\det D_1(i\tau)}, j \in \{1, 2\}$ sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$ car $\tilde{f}_j^1(i\tau)$ est bornée et $\det D_1(i\tau)$ vérifie (9). Enfin, pour ces mêmes raisons et le fait que les dérivées de $\tilde{f}_j^1(i\tau)$ et de $\det D_1(i\tau)$ ont une décroissance d'au moins $\frac{1}{\tau^2}$, il s'ensuit que $(\frac{\tilde{f}_j^1(i\tau)}{\det D_1(i\tau)})', j \in \{1, 2\}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$.

2.4. La formule de la résolvante pour le Laplacien sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac. Nous allons considérer maintenant le cas d'un arbre avec plusieurs sommets, chacun engendrant deux arêtes, avec condition de transmission de type δ . Comme déjà remarqué, ce cadre correspond à celui de l'équation de Schrödinger sur la droite avec plusieurs potentiels de Dirac. Dans cette sous-section nous allons trouver une formule de récurrence pour $\det D(\omega)$ définie dans (6).

Nous allons procéder par récurrence, en regardant l'arbre Γ_p avec p sommets comme étant obtenu à partir d'un arbre Γ_{p-1} avec $p-1$ sommets, auquel on a greffé un nouveau $p^{\text{ème}}$ sommet sur la dernière arête infinie. Les inconnues pour la résolvante de Γ_{p-1} sont $\tilde{c}_1, c_2, \tilde{c}_2, \dots, c_{p-1}, \tilde{c}_{p-1}, \tilde{c}_p$, et pour la résolvante de Γ_p nous avons deux de plus, c_p sur la dernière arête de Γ_{p-1} , devenue arête finie pour Γ_p , et \tilde{c}_{p+1} sur la nouvelle arête infinie de Γ_p . Notons a_1, \dots, a_{p-1} les longueurs des arêtes internes de Γ_p . Les conditions de continuité et de transmission d'abord au premier sommet v_1 , ensuite au deuxième v_2 et ainsi de suite jusqu'au dernier sommet v_p , donnent un système pour les inconnues de la résolvante de Γ_p en fonction de celui pour Γ_{p-1} :

$$D_p(\omega) \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{p-1} \\ c_{p-1} \\ \tilde{c}_p \\ c_p \\ \tilde{c}_{p+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ & & & -\frac{\omega}{\omega+\alpha_{p-1}} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & e^{-\omega a_{p-1}} & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-\omega+\alpha_p}{\omega+\alpha_p} e^{-\omega a_{p-1}} & e^{\omega a_{p-1}} & -1 \\ & & & e^{\omega a_{p-1}} & \frac{\omega}{\omega+\alpha_p} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{p-1} \\ c_{p-1} \\ \tilde{c}_p \\ c_p \\ \tilde{c}_{p+1} \end{pmatrix} = T_p(\omega),$$

avec

$$T_p(\omega) = \begin{pmatrix} T_{p-1}(\omega) \\ \frac{t_{p+1}(0,\omega) - t_p(a_{p-1},\omega)}{\omega} \\ \frac{\omega - \alpha_p}{\omega + \alpha_p} \frac{t_p(a_{p-1},\omega)}{\omega} + \frac{\omega}{\omega + \alpha_p} \frac{t_{p+1}(0,\omega)}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que la dernière colonne de $D_{p-1}(\omega)$ est $(0, \dots, 0, -1, \frac{\omega}{\omega + \alpha_{p-1}})^t$ car l'inconnue \tilde{c}_p n'intervient pas dans les conditions aux sommets v_1, \dots, v_{p-2} . Notons $\tilde{D}_{p-1}(\omega)$ la matrice avec la dernière colonne remplacée par $(0, \dots, 0, -1, -\frac{\omega}{\omega + \alpha_{p-1}})^t$.

Nous développons la matrice du système par rapport aux mineurs 2×2 obtenus à partir de ses deux dernières lignes. Il y a trois tels mineurs non-triviaux. La matrice restante de $D_p(\omega)$ lorsqu'on enlève ses dernières deux lignes et ses colonnes d'ordre $2p-2, 2p-1$ n'a que des zéros sur sa dernière colonne. Il ne restent donc que deux termes dans le développement :

$$\begin{aligned} \det D_p(\omega) &= \det D_{p-1}(\omega) \begin{vmatrix} e^{\omega a_{p-1}} & -1 \\ e^{\omega a_{p-1}} & \frac{\omega}{\omega + \alpha_p} \end{vmatrix} - \det \tilde{D}_{p-1}(\omega) \begin{vmatrix} e^{-\omega a_{p-1}} & -1 \\ \frac{-\omega + \alpha_p}{\omega + \alpha_p} e^{-\omega a_{p-1}} & \frac{\omega}{\omega + \alpha_p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2\omega + \alpha_p}{\omega + \alpha_p} e^{\omega a_{p-1}} \det D_{p-1}(\omega) \left(1 - \frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)} \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu une formule de récurrence pour $D_p(\omega)$ faisant intervenir le quotient $\frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}$. De manière similaire on peut développer le déterminant de $\tilde{D}_p(\omega)$, qui est obtenue à partir de $D_p(\omega)$ en changeant de signe son élément présent sur sa dernière ligne et dernière colonne :

$$\begin{aligned} \det \tilde{D}_p(\omega) &= \det D_{p-1}(\omega) \begin{vmatrix} e^{\omega a_{p-1}} & -1 \\ e^{\omega a_{p-1}} & -\frac{\omega}{\omega + \alpha_p} \end{vmatrix} - \det \tilde{D}_{p-1}(\omega) \begin{vmatrix} e^{-\omega a_{p-1}} & -1 \\ \frac{-\omega + \alpha_p}{\omega + \alpha_p} e^{-\omega a_{p-1}} & -\frac{\omega}{\omega + \alpha_p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega + \alpha_p} e^{\omega a_{p-1}} \det D_{p-1}(\omega) \left(\alpha_p - (-2\omega + \alpha_p) e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)} \right). \end{aligned}$$

En particulier, on obtient une formule de récurrence pour le quotient aussi,

$$\frac{\det \tilde{D}_p(\omega)}{\det D_p(\omega)} = \frac{\frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} - \frac{-2\omega + \alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}{1 - \frac{\alpha_p}{2\omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}, \quad \frac{\det \tilde{D}_1(\omega)}{\det D_1(\omega)} = \frac{\alpha_1}{2\omega + \alpha_1}.$$

2.5. Le cas général d'arbre. En procédant d'une manière similaire à celle de la sous-section précédente, nous obtenons les formules suivantes de récurrence, sur un arbre à p sommets, avec $n_j \geq 2$ arêtes émergeant du sommet v_j , avec condition de transmissions de type δ d'intensité $\alpha_j, 1 \leq j \leq p$:

$$(10) \quad \det D_1(\omega) = \frac{n_1 \omega + \alpha_1}{\omega + \alpha_1}, \quad \frac{\det \tilde{D}_1(\omega)}{\det D_1(\omega)} = \frac{(n_1 - 2)\omega + \alpha_1}{n_1 \omega + \alpha_1},$$

$$\det D_p(\omega) = \frac{n_p \omega + \alpha_p}{\omega + \alpha_p} e^{\omega a_{p-1}} \det D_{p-1}(\omega) \left(1 - \frac{(n_p - 2)\omega + \alpha_p}{n_p \omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)} \right),$$

$$\frac{\det \tilde{D}_p(\omega)}{\det D_p(\omega)} = \frac{\frac{(n_p-2)\omega + \alpha_p}{n_p \omega + \alpha_p} - \frac{(n_p-4)\omega + \alpha_p}{n_p \omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}{1 - \frac{(n_p-2)\omega + \alpha_p}{n_p \omega + \alpha_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}.$$

Pour les détails nous renvoyons le lecteur au Lemme 3.1 de [BI14].

2.5.1. *La cas des conditions Kirchhoff* ($\alpha_i = 0$). En présence de conditions de Kirchhoff, les formules de résolvante deviennent

$$\det D_p(\omega) = n_p e^{\omega a_{p-1}} \det D_{p-1}(\omega) \left(1 - \frac{n_p - 2}{n_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)} \right), \quad D_1(\omega) = n_1,$$

$$\frac{\det \tilde{D}_p(\omega)}{\det D_p(\omega)} = \frac{\frac{n_p-2}{n_p} - \frac{n_p-4}{n_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}{1 - \frac{n_p-2}{n_p} e^{-2\omega a_{p-1}} \frac{\det \tilde{D}_{p-1}(\omega)}{\det D_{p-1}(\omega)}}, \quad \frac{\det \tilde{D}_1(\omega)}{\det D_1(\omega)} = \frac{n_1 - 2}{n_1}.$$

En exploitant les propriétés des transformations de type Möbius apparaissant dans la formule de récurrence du quotient nous obtenons dans [BI11] l'existence de $\epsilon, C > 0$ tels que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\Re \omega| \leq \epsilon$,

$$(11) \quad |\det D_p(\omega)| \geq C.$$

Ceci nous permet d'utiliser la formule spectrale (3). Comme de plus $\det D_p(i\tau)$ est une somme finie d'exponentielles avec coefficients constants, son inverse est aussi une fonction presque périodique de Wiener [GRS64] :

$$\frac{1}{\det D_\Gamma(i\tau)} = \sum_\lambda d_\lambda e^{i\tau \lambda}$$

avec $\sum_\lambda |d_\lambda| < \infty$. Il s'ensuit de (7) que

$$\tau R_{i\tau} \mathbf{u}_0(x) = \sum_\lambda b_\lambda e^{i\tau \psi_\lambda(x)} \int_{I_\lambda} \mathbf{u}_0(y) e^{i\tau \beta_\lambda y} dy,$$

avec $\psi_\lambda(x), \beta_\lambda \in \mathbb{R}$, $I_\lambda \in \{I_e\}_{e \in E}$ et $\sum_\lambda |b_\lambda| < \infty$. Les termes de la somme sont bien du type (4), ce qui permet de conclure la dispersion. Aussi, la solution est une superposition de solutions de type Schrödinger libre 1-D.

2.5.2. *La cas des conditions δ* . Dans ce cas, en utilisant les formules de récurrence (10) nous arrivons à borner inférieurement $\det D_p(\omega)$ par une constante positive dans une bande contenant l'axe imaginaire, mais en dehors d'un voisinage de zéro. Pour avoir cette borne, on démontre par récurrence la double propriété (Lemme 3.2 de [BI14]) :

$$\forall \delta > 0, \exists c_p, \epsilon_p > 0, \exists 0 < r_p < 1, \quad |\det D_p(\omega)| > c_p, \quad \left| \frac{\det \tilde{D}_p(\omega)}{\det D_p(\omega)} \right| < r_p,$$

pour tous $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\Re \omega| < \epsilon_{\Gamma_p}$ and $|\Im \omega| > \delta$.

Contrairement au cas des conditions de Kirchhoff, $\omega = 0$ peut maintenant être une racine de $\det D_p(\omega)$. En cas d'intensités positives, nous démontrons que la valeur $\omega = 0$ est une racine d'ordre $p - 1$ de $\det D_p(\omega)$ (Lemme 4.2 de [BI14]). Pour obtenir cette information, nous démontrons par récurrence la double propriété (Lemme 4.1 de [BI14]) :

$$\frac{\det \tilde{D}_p}{\det D_p}(0) = 1 \quad , \quad \partial_\omega \left(\frac{\det \tilde{D}_p}{\det D_p} \right) (0) < 0.$$

Sous l'hypothèse plus générale $\partial_\omega^{(p-1)} D_p(\omega)|_{\omega=0} \neq 0$ la valeur $\omega = 0$ est une racine d'ordre au plus $p - 1$ de $\det D_p(\omega)$. Enfin, dans la section §3.4 de [BI14] nous obtenons qu'en même temps $\omega = 0$ est aussi racine d'ordre au moins $p - 1$ pour les numérateurs $f_e^j(\omega), \tilde{f}_e^j(\omega), j \in \{1, 2\}$ de la formule (8). Il s'ensuit que $\omega R_\omega \mathbf{u}_0$ peut se prolonger analytiquement jusqu'à l'axe imaginaire, et nous pouvons donc utiliser la formule spectrale (3). Finalement, dans la section §3.5 de [BI14] nous démontrons que les quotients dans (8) sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et leur dérivée dans $L^1(\mathbb{R})$, et la dispersion découle comme dans la fin de la sous-section §2.1 ci-dessus.

RÉFÉRENCES

- [ACFD12] R. Adami, C. Cacciapuoti, D. Finco, and Noja D. Stationary states of NLS on star graphs. *Europhysics Letters*, 100(1) :10003, 6p, 2012.
- [ACFN11] R. Adami, C. Cacciapuoti, D. Finco, and D. Noja. Fast solitons on star graphs. *Rev. Math. Phys.*, 23(4) :409–451, 2011.
- [ACFN12a] R. Adami, C. Cacciapuoti, D. Finco, and D. Noja. Constrained energy minimization and orbital stability for the NLS equation on a star graph. *to appear in Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 2012.
- [ACFN12b] R. Adami, C. Cacciapuoti, D. Finco, and D. Noja. On the structure of critical energy levels for the cubic focusing NLS on star graphs. *J. Phys. A*, 45(19) :192001, 7, 2012.
- [ACFN14] Riccardo Adami, Claudio Cacciapuoti, Domenico Finco, and Diego Noja. Variational properties and orbital stability of standing waves for NLS equation on a star graph. *J. Differential Equations*, 257(10) :3738–3777, 2014.
- [AGHKKH05] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable models in quantum mechanics*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005. With an appendix by Pavel Exner.
- [AMAN12] F. Ali Mehmeti, K. Ammari, and S. Nicaise. Dispersive effects and high frequency behaviour for the schrödinger equation in star-shaped networks. 2012.
- [AN14] R. Adami and D. Noja. Exactly Solvable Models and Bifurcations : the Case of the Cubic NLS with a δ or a δ' Interaction in Dimension One. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 9(5) :1–16, 2014.
- [ANV13] R. Adami, D. Noja, and N. Visciglia. Constrained energy minimization and ground states for NLS with point defects. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18(5) :1155–1188, 2013.
- [APF14] J. Angulo Pava and L. C. F. Ferreira. On the Schrödinger equation with singular potentials. *Differential Integral Equations*, 27(7-8) :767–800, 2014.
- [AS05] R. Adami and A. Sacchetti. The transition from diffusion to blow-up for a nonlinear Schrödinger equation in dimension 1. *J. Phys. A*, 38(39) :8379–8392, 2005.
- [AST14] R. Adami, E. Serra, and P. Tilli. Nls ground states on graphs. *ArXiv 1406.4036*, 2014.

- [Ban03] V. Banica. Dispersion and Strichartz inequalities for Schrödinger equations with singular coefficients. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(4) :868–883 (electronic), 2003.
- [BI11] V. Banica and L. I. Ignat. Dispersion for the Schrödinger equation on networks. *J. Math. Phys.*, 52(8) :083703, 14, 2011.
- [BI14] V. Banica and L. I. Ignat. Dispersion for the Schrödinger equation on the line with multiple Dirac delta potentials and on delta trees. *Anal. PDE*, 7(4) :903–927, 2014.
- [CH10] R. C. Cascaval and C. T. Hunter. Linear and nonlinear Schrödinger equations on simple networks. *Libertas Math.*, 30 :85–98, 2010.
- [DH09] K. Datchev and J. Holmer. Fast soliton scattering by attractive delta impurities. *Comm. Partial Differential Equations*, 34(7-9) :1074–1113, 2009.
- [DMW11] V. Duchêne, J. L. Marzuola, and M. I. Weinstein. Wave operator bounds for one-dimensional Schrödinger operators with singular potentials and applications. *J. Math. Phys.*, 52(1) :013505, 17, 2011.
- [Exn11] P. Exner. *Vertex couplings in quantum graphs : approximations by scaled Schrödinger operators*. Proceedings of the ICM Satellite Conference Mathematics in Science and Technology (New Delhi 2010 ; A.H. Siddiqi, R.C. Singh, P. Manchanda, eds.) World Scientific, Singapore, 71–92, 2011.
- [FJ08] R. Fukuizumi and L. Jeanjean. Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(1) :121–136, 2008.
- [FOO08] R. Fukuizumi, M. Ohta, and T. Ozawa. Nonlinear Schrödinger equation with a point defect. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(5) :837–845, 2008.
- [GRS64] I. Gelfand, D. Raikov, and G. Shilov. *Commutative normed rings*. Translated from the Russian, with a supplementary chapter. Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- [GS86] B. Gaveau and L. S. Schulman. Explicit time-dependent Schrödinger propagators. *J. Phys. A*, 19(10) :1833–1846, 1986.
- [GS06] S. Gnutzmann and U. Smilansky. Quantum graphs : Applications to quantum chaos and universal spectral statistics. *Advances in Physics*, 55 :527–625, October 2006.
- [HMZ07a] J. Holmer, J. Marzuola, and M. Zworski. Fast soliton scattering by delta impurities. *Comm. Math. Phys.*, 274(1) :187–216, 2007.
- [HMZ07b] J. Holmer, J. Marzuola, and M. Zworski. Soliton splitting by external delta potentials. *J. Nonlinear Sci.*, 17(4) :349–367, 2007.
- [HZ07] J. Holmer and M. Zworski. Slow soliton interaction with delta impurities. *J. Mod. Dyn.*, 1(4) :689–718, 2007.
- [Ign10] L. I. Ignat. Strichartz estimates for the Schrödinger equation on a tree and applications. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(5) :2041–2057, 2010.
- [KS06] V. Kostykin and R. Schrader. Laplacians on metric graphs : eigenvalues, resolvents and semigroups. In *Quantum graphs and their applications*, volume 415 of *Contemp. Math.*, pages 201–225. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KS10] H. Kovařík and A. Sacchetti. A nonlinear Schrödinger equation with two symmetric point interactions in one dimension. *J. Phys. A*, 43(15) :155205, 16, 2010.
- [Kuc04] P. Kuchment. Quantum graphs. I. Some basic structures. *Waves Random Media*, 14(1) :S107–S128, 2004. Special section on quantum graphs.
- [Kuc05] P. Kuchment. Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs. *J. Phys. A*, 38(22) :4887–4900, 2005.

- [Kuc08] P. Kuchment. Quantum graphs : an introduction and a brief survey. In *Analysis on graphs and its applications*, volume 77 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 291–312. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [LCFF⁺08] S. Le Coz, R. Fukuizumi, G. Fibich, B. Ksherim, and Y. Sivan. Instability of bound states of a nonlinear Schrödinger equation with a Dirac potential. *Phys. D*, 237(8) :1103–1128, 2008.
- [Man89] E. B. Manoukian. Explicit derivation of the propagator for a Dirac delta potential. *J. Phys. A*, 22(1) :67–70, 1989.

(V.Banica) LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET DE MODÉLISATION D'ÉVRY (UMR 8071), DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'ÉVRY, 23 BD. DE FRANCE, 91037 EVRY, FRANCE
E-mail address: Valeria.Banica@univ-evry.fr