

UNIVERSITÉ D'ÉVRY VAL D'ESSONNE

Mémoire présenté pour obtenir

**L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
EN MATHÉMATIQUES**

par

Manuela Valeria Banica

Sujet :

**RÉGIMES ASYMPTOTIQUES POUR L'ÉQUATION DE
SCHRÖDINGER NON-LINÉAIRE ET APPLICATIONS**

Soutenu le 12 novembre 2008 devant le jury composé de :

**Isabelle Gallagher
Patrick Gérard
Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset
Jean-Claude Saut
Luis Vega
Giorgio Velo**

et après rapports de :

**Isabelle Gallagher
Carlos Kenig
Jean-Claude Saut**

Remerciements

Tout d’abord, je tiens à remercier Patrick Gérard. C’est grâce aux beaux sujets qu’il m’a proposés durant mon doctorat et grâce à son talent pédagogique exceptionnel que je me suis passionnée pour les équations aux dérivées partielles. Depuis la fin de ma thèse, il porte un vif intérêt à mes recherches, et nos discussions me sont très précieuses et enrichissantes.

Je tiens à faire part de ma gratitude envers Isabelle Gallagher, Carlos Kenig et Jean-Claude Saut. C’est pour moi un très grand honneur et plaisir qu’ils aient rapporté mon mémoire d’habilitation.

Un très grand merci à Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset d’avoir accepté le rôle de directeur de recherches.

Je remercie chaleureusement Luis Vega et Giorgio Velo de faire part du jury. Leur acceptation m’émeut d’autant plus qu’ils sont venus de Bilbao et de Bologna.

Je dois énormément à mes collaborateurs pour nos échanges fructueux, divers et enrichissants. Muchas gracias à Luis Vega, le premier d’entre eux, dont j’apprécie énormément la façon de faire la recherche : ouverte, relaxée et persévérante. Non seulement il m’a beaucoup appris, mais il m’a aussi ouvert une porte vers la mécanique des fluides, dont je rêvais d’approcher. Je suis reconnaissante envers Rémi Carles, qui m’a notamment appris les bases du scattering et diverses subtilités du domaine. Il m’a aussi beaucoup aidé lors de mes premières années à Evry. Grazie tanto à Gigliola Staffilani : c’est lors de son invitation à Boston que j’ai appris la force et la beauté des inégalités de type Morawetz. Enfin, un très grand merci à Thomas Duyckaerts, pour la joie que j’ai à faire des maths avec lui ; nos discussions quasi journalières sont constructives et les projets communs ne manquent pas. Je le remercie aussi pour la patience avec laquelle il a relu la première version de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Vladimir Georgiev, Fulvio Ricci et Luis Vega pour leur accueil chaleureux lors de mes stages post-doctoraux à Pise et à Bilbao.

C’est grâce au projet de l’ANR “Étude qualitative des ÉDP” que j’ai pu avoir une totale liberté de mouvement ces quatre dernières années. Merci à Nikolay Tzvetkov d’avoir coordonné ce projet, et aussi pour nos discussions mathématiques toujours intéressantes. La relève est prise par le projet de l’ANR “RAS” : merci à Rémi Carles d’en avoir pris l’initiative et d’avoir conçu le projet. Enfin, je dois au projet de l’ANR “Équations de Gross-Pitaevski, d’Euler, et phénomènes de concentration”, dirigé par Étienne Sandier, d’avoir pu apprendre de façon vraiment agréable les problématiques liées à l’équation de Gross-Pitaevski.

Merci aux organisateurs et aux participants des sessions des GdR “Analyse des équations aux dérivées partielles”, MOAD et ÉAPQ. Ce furent pour moi d’excellentes occasions de rencontrer beaucoup de chercheurs et de découvrir leurs thématiques de recherche.

Je remercie tous les membres du Département de Mathématiques d’Evry pour la très bonne ambiance qui y règne. Merci aux participants de notre séminaire d’analyse, et à notre directeur d’équipe, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset. Je tiens à remercier mes co-organisateurs du séminaire, anciens et présents, et en particulier Lucilla Corrias. Un grand merci à Vincent Torri et à Gilles Lacombe pour leurs présences importantes au sein du laboratoire. Un merci spécial à notre secrétaire Valérie Picot pour son dynamisme et sa bonne humeur.

Un grand merci au Laboratoire Jacques-Louis Lions pour son accueil lors de ma délégation en 2007-2008 et pour les excellentes conditions de travail que j'y ai eu. Je garde de ce semestre un cher souvenir.

Cette thèse a été réalisée avec le soutien affectif de mes amis et de ma famille. Je suis en particulier reconnaissante à mon frère Teodor, qui m'a toujours donné des bons conseils et m'a continûment encouragée dans mon évolution dans le monde de la recherche.

Enfin, je remercie Gaëtan de partager ma vie, et avec elle, inévitablement, les joies et les soucis de ma vie professionnelle.

Résumé

Ce mémoire concerne l'étude du comportement de l'équation de Schrödinger non-linéaire près du temps d'existence maximal. Le premier chapitre est un passage en revue des notions de l'équation de Schrödinger qui vont être reprises au long du mémoire. Trois thématiques seront ensuite abordées dans les chapitres 2, 3 et 4 : l'étude de l'équation de Schrödinger en géométries de courbure négative ([10],[13],[14],[11]), l'explosion pour l'équation de Schrödinger hors du cadre \mathbb{R}^n ([10],[12]) et l'étude de la dynamique des tourbillons filamentaires dans un fluide ([16],[15]). Les travaux effectués durant ma thèse de doctorat ([7],[8],[9]), soutenue en septembre 2003 sous la direction de P. Gérard, seront présents dans le texte mais ne feront pas l'objet d'une description détaillée. Dans la suite je vais décrire très brièvement les résultats obtenus, ainsi que leur motivation, les techniques utilisées et les perspectives.

L'équation de Schrödinger en géométrie de courbure négative. Depuis une quinzaine d'années l'équation de Schrödinger est considérée aussi dans des géométries autres que celle de \mathbb{R}^n . Dans des cas de courbure positive, comme la sphère, on a mis en évidence la "mauvaise influence" de ce type de géométrie sur les propriétés qualitatives de la solution : les propriétés dispersives sont moins fortes et des phénomènes d'instabilité apparaissent, plus que dans le cas de courbure nulle du tore plat ou de \mathbb{R}^n . Il est donc naturel de s'interroger sur ce qu'il advient dans le cas de la courbure négative, et d'abord sur l'espace hyperbolique, qui est l'exemple typique de variété différentielle de courbure négative.

Cette direction de recherche, commencée lors de mon stage post-doctoral à Pise, a été aussi motivée par les deux premières parties de ma thèse sur l'équation à coefficients variables. Dans [7] j'ai considéré l'équation en 1-D avec coefficients fonctions en escalier, bornées entre deux constantes positives. Dans le cas d'un nombre fini de discontinuités, la résolvante se calcule explicitement, et en faisant appel à la théorie des fonctions presque-périodiques de Wiener, j'ai montré la dispersion et les inégalités de Strichartz globales. Aussi, pour certains coefficients périodiques, la théorie de Floquet permet de montrer que l'inégalité de dispersion locale en temps n'est pas vérifiée. La deuxième partie de ma thèse [8] contient une description précise de l'évolution par l'équation cubique posée sur la sphère de dimension deux de certaines harmoniques sphériques concentrées sur des géodésiques. Cela précise des résultats d'instabilité de N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov.

Dans [10], j'ai commencé l'étude de l'équation de Schrödinger sur l'espace hyperbolique et l'influence de la courbure négative sur les propriétés qualitatives des solutions, par rapport à celles connues sur l'espace euclidien. Je donne une représentation exacte des solutions linéaires et je montre que la dispersion est vérifiée, avec un poids supplémentaire en espace, exponentiel à l'infini. Les preuves utilisent l'analyse harmonique sur l'espace hyperbolique, qui permet de relier la représentation de la solution de l'équation libre aux fonctions de Legendre. L'estimation des solutions porte sur des calculs d'intégrales oscillantes.

Avec R. Carles et G. Staffilani nous nous sommes intéressés dans [13] à la question du comportement en temps grand pour l'équation non-linéaire. Nous avons mis en évidence l'absence de phénomène longue portée dans le cas radial, grâce aux meilleures estimations dispersives de l'équation linéaire. En conclusion, contrairement à l'équation posée sur \mathbb{R}^n , les non-linéarités correspondant à de petites puissances n'ont pas d'influence dans le comportement en temps

grand, qui reste qualitativement le même que dans le cas linéaire. Les techniques utilisées sont des estimations de Strichartz avec des couples d'exposants plus souples que sur \mathbb{R}^n , et des inégalités de Morawetz d'interaction, encore valables en courbure négative.

Avec T. Duyckaerts nous avons répondu dans [14] à la question naturelle qui est de savoir si les résultats positifs obtenus ci-dessus dépendent de la riche structure du groupe d'isométries de l'espace hyperbolique. La réponse est non, et nous donnons une large famille de variétés de révolution pour lesquelles l'évolution libre vérifie des inégalités de Strichartz à poids. En fonction de la croissance de l'élément volume à l'infini, qui est reliée à la courbure négative, le seuil pour l'existence des opérateurs d'ondes baisse par rapport à celui de \mathbb{R}^n . Les preuves reposent sur l'étude de l'équation sur \mathbb{R}^n avec un certain type de potentiel, pour laquelle nous obtenons des inégalités de Strichartz via des estimations de résolvante.

Dans [11] nous revenons avec R. Carles et T. Duyckaerts sur la question de la complétude asymptotique en dimension $n \geq 4$, question laissée ouverte dans [13] dans le cas de l'espace hyperbolique pour cause d'impossibilité d'utilisation des estimations de Morawetz d'interaction. Nous montrons des résultats de complétude asymptotique dans le cas radial en dimension $n \geq 4$ sur l'espace hyperbolique et plus généralement, sur des variétés de révolution qui font le lien entre l'espace euclidien et l'espace hyperbolique. On voit de cette façon comment baisse la puissance critique, de celle euclidienne à celle attendue, et maintenant confirmée, pour l'espace hyperbolique. Les démonstrations utilisent cette fois-ci l'inégalité de Morawetz simple et les inégalités de Strichartz à poids obtenues précédemment.

Dans la suite on se propose de mieux comprendre le lien entre la croissance de l'élément de volume d'une variété et les propriétés dispersives de l'équation linéaire posée sur cette variété, ainsi que les comportements en temps grand de l'équation non-linéaire correspondante.

Explosion pour l'équation de Schrödinger non-linéaire. L'étude de solutions explosives en temps fini de l'équation de Schrödinger non-linéaire est liée aux phénomènes de focalisation pour les lasers. Les phénomènes d'explosion ont été très peu étudiés en dehors du cadre euclidien \mathbb{R}^n , car les outils connus sont très instables par changements de géométrie.

Cette problématique a fait l'objet de la dernière partie de ma thèse [9], et reste un sujet qui me passionne. Dans [9] l'explosion est considérée dans un domaine, et j'obtiens que la vitesse d'explosion en masse critique est au moins en $1/t$, et plus rapide que $1/t$ si l'explosion est supposée avoir lieu sur le bord d'un domaine. Cette dernière condition semble peu probable, et de plus, dans des cas particuliers comme le demi-plan, l'explosion au bord ne peut pas être possible en masse critique.

Dans [10] je montre que la géométrie apparaît aussi dans les phénomènes d'explosion pour l'équation non-linéaire. Plus précisément, dans le cas de l'espace hyperbolique, en suivant l'approche de Glassey, je montre un critère d'explosion faisant intervenir une constante géométrique dont la valeur diffère de son analogue sur \mathbb{R}^n . En fait, la courbure négative n'est pas assez puissante pour empêcher les phénomènes d'explosion. Au contraire, on a plus de solutions explosives que dans le cas euclidien, notamment pour les données initiales d'énergie nulle. Ce nouveau phénomène de concentration est probablement dû à la meilleure dispersion à l'infini.

Dans un travail en cours [12] avec R. Carles et T. Duyckaerts nous essayons de mettre en évidence des solutions pour l'équation sur des surfaces, avec puissance critique pour l'explosion, avec une vitesse d'explosion en $1/t$ et masse critique. Ce type d'explosion est très instable, même sur \mathbb{R}^n . De façon générale, il reste de nombreux problèmes ouverts sur l'explosion en dehors du cadre euclidien, même dans le cas des domaines de \mathbb{R}^n .

Dynamique des tourbillons filamentaires dans un fluide. Une des motivations physiques de l'étude de l'équation de Schrödinger est la dynamique des tourbillons filamentaires de l'équation d'Euler de la mécanique des fluides. Motivés par ce type d'applications nous avons commencé à étudier avec L. Vega la stabilité de l'unique famille de solutions auto-similaires du modèle utilisé. Ces courbes ont la particularité d'être régulières et de développer une singularité en temps fini.

La modélisation que nous utilisons pour la dynamique d'un tourbillon filamentaire isolé dans un fluide 3D incompressible, sans viscosité, est celle proposée par L. da Rios via le flot binormal, connue aussi sous le nom de LIA (Local Induction Approximation). Ce flot donne une loi d'évolution en temps d'une courbe de \mathbb{R}^3 , où se trouve localisé le tourbillon. À partir de la courbure et de la torsion de la courbe du tourbillon, en utilisant la transformation de Hasimoto, qui peut être comprise comme inverse de la transformée de Madelung, le lien est fait avec l'équation de Schrödinger cubique 1-D. Ceci nous a amené à regarder deux problèmes. D'une part, le problème de Cauchy local de l'équation de Schrödinger avec nonlinéarité de type puissance autour d'une solution particulière dont la donnée initiale est une masse de Dirac. D'autre part, l'étude en temps grands d'une équation de type Gross-Pitaevskii à coefficients dépendant du temps.

Dans [16] nous répondons à la première question en montrant le caractère bien posé du problème de Cauchy et nous traitons partiellement la deuxième. Dans [15] nous construisons des opérateurs d'ondes modifiés. Ensuite, en utilisant la transformation de Hasimoto, nous avons construit et décrit des courbes solutions du flot binormal dont le comportement reste proche des solutions auto-similaires, et qui développent une singularité en temps fini. Cela montre que la formation d'une singularité du cas auto-similaire n'est pas un phénomène isolé. Pour obtenir les résultats d'opérateurs d'ondes nous trouvons un ansatz de type longue portée, et nous utilisons l'analyse de Fourier pour faire un argument de point fixe autour de cet ansatz. La description des courbes est faite en intégrant le système de Frenet, à l'aide des taux précis de convergence des opérateurs d'ondes.

Dans la suite nous nous proposons de donner plus d'informations sur ces courbes, et de résoudre la question plus délicate de la complétude asymptotique, qui correspond à un résultat de stabilité plus forte. De façon générale, la modélisation par flot binormal pourrait être utilisée pour traiter d'autres types de dynamiques de tourbillons.

Liste des travaux

Articles (en ordre chronologique, avec les numéros de la bibliographie) :

- [7] *Dispersion and Strichartz Inequalities for Schrödinger Equations with Singular Coefficients*,
SIAM J. Math. Anal. 35 (2003), no. 4, 868-883.
- [8] *On the nonlinear Schrödinger dynamics on \mathbb{S}^2* ,
J. Math. Pures Appl. 83 (2003), no. 1, 77-98.
- [9] *Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain*,
Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. III (2004), 139-170.

- [10] *The nonlinear Schrödinger equation on hyperbolic space*,
Commun. Partial Differ. Equations 32 (2007), no. 10, 1643-1677.
- [16] *On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations*,
avec Luis Vega, Ann. I. H. Poincaré, An. Non Lin. 25 (2008), no. 4, 697-711.
- [13] *Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space*,
avec Rémi Carles et Gigliola Staffilani, Geom. Funct. Anal. 18 (2008), no. 2, 367-399.
- [14] *Weighted Strichartz estimates for radial Schrödinger equation on noncompact manifolds*,
avec Thomas Duyckaerts, Dyn. Partial Differ. Equations. 4 (2007), no. 4, 335-359.
- [11] *On scattering for NLS : from Euclidean to hyperbolic space*,
avec Rémi Carles et Thomas Duyckaerts, arXiv 0801.2227, soumis.
- [15] *On the stability of a singular vortex dynamics*,
avec Luis Vega, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [12] *Remarks on the blow-up for NLS on surfaces*,
avec Rémi Carles et Thomas Duyckaerts, en préparation.

Autres :

- *Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain*,
Actes du colloque international "Journées ÉDP", Forges-les-Eaux (2003) I, 1-14.
- *Sur la stabilité d'une dynamique de vortex singulière*,
Séminaire de l'École Polytechnique "Équations aux dérivées partielles", 2007-2008 Exp.
No. 3, 11 p.

Table des matières

1	Introduction à l'équation de Schrödinger non-linéaire	9
2	L'équation de Schrödinger en géométries de courbure négative	19
2.1	Motivation	19
2.2	Le cas de l'espace hyperbolique	20
2.2.1	Structure de l'espace hyperbolique	20
2.2.2	Résolution de l'équation linéaire	23
2.2.3	Propriétés dispersives de l'équation linéaire	24
2.2.4	Scattering pour l'équation non-linéaire	27
2.3	Le cas des variétés de révolution	29
2.3.1	Propriétés dispersives de l'équation linéaire	30
2.3.2	Le comportement à temps grand	32
3	Explosion pour l'équation de Schrödinger non-linéaire	35
3.1	Motivation, cas d'un domaine	35
3.2	Explosion sur l'espace hyperbolique	36
3.3	Explosion de masse critique en géométries non plates	37
4	Dynamique des tourbillons filamentaires dans un fluide	39
4.1	Motivation et approche du problème	39
4.1.1	La modélisation LIA	39
4.1.2	La transformation de Hasimoto	41
4.1.3	Les courbes auto-similaires	42
4.2	Le problème de Cauchy pour SNL avec donnée initiale de type Dirac	45
4.3	Étude sur la stabilité des courbes auto-similaires	46
4.3.1	Existence d'opérateurs d'onde	46
4.3.2	Description des nouvelles courbes	49

Chapitre 1

Introduction à l'équation de Schrödinger non-linéaire

La **motivation** de l'analyse de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

est due à l'étude de certains phénomènes physiques. Elle est obtenue notamment en théorie quantique des champs, en optique non-linéaire et en mécanique des fluides ; on renvoie le lecteur au livre de C. Sulem et P.-L. Sulem [146]. Du point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles, c'est une équation modèle : elle est dispersive, non-linéaire, conservative et hamiltonienne. C'est la plus simple de ce type.

L'équation de Schrödinger est une équation d'évolution avec une donnée initiale à valeurs complexes. La fonction u est donc une fonction à valeurs complexes dépendant de deux variables, temps et espace. L'espace peut être, selon les cas, \mathbb{R}^n , un domaine de \mathbb{R}^n ou une autre variété différentielle et Δ est le laplacien naturel associé à l'espace. Selon les cas, F est la fonction nulle (nous parlons alors d'équation linéaire) ou une fonction de multiplication (cas d'un potentiel) ou une fonction de type puissance (cas de l'équation non-linéaire standard).

Dans la suite nous allons faire un passage en revue des propriétés de l'équation non-linéaire sur \mathbb{R}^n principalement. Nous allons insister sur les notions qui vont être reprises dans les chapitres suivants. Il va de soi que la bibliographie ne sera pas complète. Pour une description détaillée du sujet on renvoie le lecteur aux textes de T. Cazenave [47], J. Ginibre [70], C. Sulem et P.-L. Sulem [146], J. Bourgain [29] et T. Tao [148].

Le point de départ, dans tous les cas, est la compréhension de l'équation linéaire. Rappelons d'abord les principales **lois de conservations et symétries** qu'elle possède. La masse $\|u(t)\|_{L^2}$, l'énergie $\|\nabla u(t)\|_{L^2}$ et le premier moment $\Im \int \bar{u}(t, x) \nabla u(t, x) dx$ sont des quantités conservées au cours du temps. L'équation est invariante par plusieurs transformations. Si $u(t, x)$ est une solution, alors nous avons aussi comme solutions $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ (changement d'échelle), $e^{-it\nu^2 + i\nu x} u(t, x - 2t\nu)$ (invariance de Galilée) et $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \bar{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right)$ (transformation pseudo-conforme).

La **résolution de l'équation linéaire** se fait en passant l'équation en Fourier dans la variable spatiale. Nous trouvons alors l'expression explicite de $\hat{u}(t)$ et il s'ensuit par la formule

de Fourier inverse que

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

Ceci montre que la vitesse de propagation est infinie et que les solutions régulières se comportent, quand t tend vers l'infini, comme

$$\frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4i\pi t)^{\frac{n}{2}}} \hat{u}_0\left(\frac{x}{2t}\right).$$

Nous obtenons aussi directement l'**inégalité de dispersion**

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{|t|^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

À partir de cette estimation et du fait que la norme L^2 de la solution est conservée, en utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev et des arguments de dualité appelés TT* (voir P.A. Tomas [154]), on obtient les **inégalités de Strichartz**

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où $(p, q) \in [2, \infty] \times [2, \infty]$ définit un couple n -admissible pour l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad (p, q) \neq (2, \infty) \text{ si } n = 2.$$

Ces inégalités ont été démontrées en 1977 dans l'article pionnier de R. Strichartz [145], pour $p = q = 2 + \frac{4}{n}$. Ensuite elles ont été généralisées dans [74] par J. Ginibre et G. Velo pour tous les autres couples avec $p > 2$, dans [166] par K. Yajima pour les estimation inhomogènes et finalement dans [99] par M. Keel et T. Tao pour le endpoint $p = 2$ des dimensions $n \geq 3$. La première condition de couple n -admissible est impliquée par l'invariance d'échelle de l'équation. Le couple $(p, q) = (2, \infty)$, endpoint an dimension $n = 2$, est exclu par le contre-exemple donné dans [119] par S.J. Montgomery-Smith. Par contre, en se restreignant au cas des solutions radiales, les estimations sont meilleures, et notamment celle du endpoint de la dimension $n = 2$ est valable (T. Tao [147], M.C. Vilela [160]).

En dehors du cas euclidien, l'inégalité de dispersion n'est pas souvent vérifiée, même localement en temps, tandis que les inégalités de Strichartz peuvent être vraies. Fort heureusement, il y a d'autres moyens pour retrouver ces dernières, sur des variétés différentielles ou pour des opérateurs de degré deux à coefficients variables.

Une méthode utilisée très souvent est de montrer d'abord l'**effet régularisant**. Ceci est autre propriété importante de l'équation linéaire, mise en évidence à la fin des années 80 par P. Constantin et J.-C. Saut [56], P. Sjölin [140], et L. Vega [159] (voir aussi W. Craig, T. Kappeler et W. Strauss [57], Doi [63], C. Kenig, G. Ponce et L. Vega [101]). Par exemple, dans le cas \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$, l'effet régularisant s'écrit

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}, L_{loc}^2(\mathbb{R}^n))} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce type d'estimation peut être déduite d'estimations de résolvante, par le théorème de T. Kato [96].

Dans certains cadres la solution peut être écrite d’une façon permettant d’estimer directement les normes $L^p L^q$. C’est souvent le cas des espaces ayant une base de fonctions propres du laplacien avec des bonnes propriétés de multiplications entre elles, comme par exemple le tore plat.

Une autre méthode est d’écrire la solution à l’aide d’une parametrix en utilisant l’analyse microlocale. Par exemple, la méthode WKB peut être utilisée pour donner une parametrix de l’évolution de la troncature en fréquences de la donnée initiale sur des intervalles de temps petits, dépendant de la fréquence. Une inégalité de dispersion microlocale peut être ainsi obtenue, qui entraîne des inégalités de type Strichartz. Enfin, il existe aussi de méthodes utilisant des champs de vecteurs qui commutent ou presque avec l’équation.

Dans le cadre non-compact avec absence de trajectoires captées, des résultats ont été obtenus pour des métriques assez régulières et “contrôlables” à l’infini, par exemple plates, asymptotiquement plates, asymptotiquement coniques. Ces résultats sont en général sans perte, mais parfois seulement locaux en temps (G. Staffilani et D. Tataru [143], L. Robbiano et C. Zuily [133], J.-M. Bouclet et N. Tzvetkov [26], [27], A. Hassel, T. Tao et J. Wunsch [88]). Le cas des variétés non-compactes de type hyperbolique sera traité en détail dans le chapitre suivant. Des exemples de variétés ayant une riche structure algébrique, comme les groupes de Heisenberg, ont été également traités (H. Bahouri, P. Gérard et C.-J. Xu [6]). Si aucune conditions géométrique n’est imposée, les inégalités de Strichartz sont valables localement en temps, avec perte de régularité, c’est-à-dire que la norme $L^p L^q$ de la solution est contrôlée par une norme de Sobolev de la donnée initiale, au lieu d’une norme L^2 (N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [37]). On constate aussi des pertes dans des cas de métrique dégénérée (D. Salort [138]). En présence de trajectoires captées, l’effet régularisant classique n’est plus valable. Néanmoins, dans des cas avec “peu” de trajectoires captées, comme par exemple le plan privé de deux disques, l’effet régularisant est valable sous une forme plus faible (N. Burq [33]). De plus, toujours dans des cas avec “peu” de trajectoires captées, on peut obtenir les inégalités de Strichartz sans perte (N. Burq, C. Guillarmou et A. Hassel [39]). Une version faible de ce type de phénomène a été déjà observé sur l’équation en dimension 1 à coefficients variables de type BV ou \mathcal{C}^2 (V. Banica [7], N. Burq et F. Planchon [40], D. Salort [137]).

Dans le cadre compact les choses se passent nettement moins bien. Les résultats ne peuvent être que locaux en temps, et sont en général avec perte de régularité (J. Bourgain [28], N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [37], R. Anton [3], M. Blair, H. Smith et C. Sogge [24]). Le présence de ces pertes est inévitable, en vue des estimations des normes L^p des fonctions propres du Laplacien (C. Sogge [141]).

Enfin, par des méthodes de multiplicateurs, on peut obtenir d’autres estimations de la solution linéaire dans des espaces mixtes, appelées inégalités de Morawetz. Nous allons les présenter plus tard, lors de l’étude en grand temps de l’équation non-linéaire.

À partir des inégalités de Strichartz de l’équation linéaire, nous obtenons les résultats d’existence pour l’équation non-linéaire. Ceci se fait par un argument de point fixe sur

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau,$$

dans des espaces de type $L^p L^q$. Dans la suite F sera une fonction de type puissance $\alpha + 1$ avec $\alpha > 0$. En utilisant les inégalités de Strichartz inhomogènes des évolutions libres et les

inégalités de Hölder, pour tout $\alpha \leq \frac{4}{n}$ et tout couple n -admissible (p_1, q_1) on majore

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L^{p_1}([0,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^n))} \leq c T^\theta \|u\|_{L^{p_2}([0,T], L^{q_2}(\mathbb{R}^n))} \|u\|_{L^{p_3}([0,T], L^{q_3}(\mathbb{R}^n))}^\alpha,$$

pour un certain $\theta \geq 0$ et certains couples n -admissibles (p_2, q_2) et (p_3, q_3) . Dans le cadre H^1 nous avons plus de souplesse grâce aux injections de Sobolev $H^1 \subset L^{2^*}$. Nous obtenons ainsi pour $\alpha \leq \frac{4}{n-2}$ et $0 \leq \beta \leq \alpha$

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L^{p_1}([0,T], W^{1, q_1}(\mathbb{R}^n))} \\ & \leq c T^\theta \|u\|_{L^{p_2}([0,T], W^{1, q_2}(\mathbb{R}^n))} \|u\|_{L^{p_3}([0,T], L^{q_3}(\mathbb{R}^n))}^{\alpha-\beta} \|u\|_{L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^n))}^\beta. \end{aligned}$$

L'existence locale en temps peut être obtenue dans le cadre L^2 pour $\alpha < \frac{4}{n}$ et dans le cadre H^1 pour $\alpha < \frac{4}{n-2}$, et le temps d'existence dépend de la norme de la donnée initiale (J. Ginibre et G. Velo [73], [74], T. Kato [97], T. Cazenave et F. Weissler [48], Y. Tsutsumi [156]). Dans les cas critiques $\alpha = \frac{4}{n}$ et respectivement $\alpha = \frac{4}{n-2}$, traités par T. Cazenave et F. Weissler dans [49], le temps d'existence dépend de la donnée initiale de façon plus compliquée.

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe au-delà de l'existence locale.

La puissance θ peut être choisie zéro seulement pour $\alpha = \frac{4}{n}$ dans le cadre L^2 et seulement pour $\frac{4}{n} \leq \alpha \leq \frac{4}{n-2}$ dans le cadre H^1 . Dans ces cas nous obtenons directement l'existence globale des solutions à donnée initiale petite.

Si la non-linéarité est invariante de jauge, $F(u) = \pm|u|^\alpha u$, nous avons la conservation de la masse

$$M(u(t)) = \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

et de l'énergie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \pm \frac{1}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^n)}^{\alpha+2}.$$

Ceci implique, par itération de l'argument local, l'existence globale dans le cadre L^2 , et dans le cadre H^1 pour le cas défocalisant (signe +). Remarquons que les solutions ainsi obtenues ne sont pas nécessairement dans les espaces $L^p L^q$ globaux en temps.

Dans le cas focalisant, M.I. Weinstein a montré dans [162] que l'existence globale dans H^1 reste valable juste pour $\alpha < \frac{4}{n}$ et pour $\alpha = \frac{4}{n}$ et $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$. Ici Q désigne l'état fondamental de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire l'unique solution radiale positive, à décroissance exponentielle, de l'équation elliptique associée

$$\Delta Q + Q^{\frac{4}{n}+1} = Q,$$

(voir l'article [105] de M.K. Kwong pour la preuve de l'unicité). Ces résultats d'existence globale sont obtenus à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, qui se déduit par interpolation entre l'injection de Sobolev et l'identité sur L^2 ,

$$\|f\|_{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^n)}^{\alpha+2} \leq C_{\alpha+2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2+\frac{\alpha(2-n)}{2}} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha n}{2}}.$$

Dans le cas $\alpha = \frac{4}{n}$, Q est un minimiseur. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet de borner inférieurement l'énergie

$$E(u_0) = E(u(t)) \geq \|\nabla u(t)\|_2^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C_{\alpha+2}}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2+\frac{\alpha(2-n)}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha n}{2}-2} \right).$$

Il s'ensuit que le gradient reste borné si $\alpha < \frac{4}{n}$ ou si $\alpha = \frac{4}{n}$ et $\|u_0\|_{L^2} < \left(\frac{\frac{2}{n}+1}{C^{\frac{4}{n}+2}}\right)^{\frac{n}{4}} = \|Q\|_{L^2}$.

La puissance $\alpha = \frac{4}{n}$ est critique pour l'existence globale de l'équation focalisante, car des phénomènes d'**explosion en temps fini** apparaissent. En faisant le calcul de viriel,

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 |x|^2 dx = 16E(u_0) - \frac{4(\alpha n - 4)}{\alpha + 2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^{\alpha+2} dx,$$

nous obtenons le critère de Glassey [76]. Ceci dit que si $\alpha \geq \frac{4}{n}$, toute donnée initiale de variance finie et d'énergie négative va exploser en temps fini en H^1 (voir aussi V.E. Zacharov [167] et O. Kavian [98]). De plus, $\|Q\|_{L^2}^2$ est la masse critique pour l'explosion si $\alpha = \frac{4}{n}$, car à partir de la solution globale $e^{it}Q(x)$ on peut construire avec la transformation pseudo-conforme une autre solution explicite,

$$\frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}} e^{i\frac{x}{t}} Q\left(\frac{x}{t}\right),$$

dont la norme L^2 du gradient explose à $t = 0$ comme $1/t$. F. Merle a montré que toutes les solutions explosives de masse critique et d'énergie finie sont de ce type, modulo les invariants de l'équation [114]. Cette classification est faite à partir d'un résultat de M.I. Weinstein permettant de comprendre la concentration des solutions explosives de masse critique ([164]). Sont utilisées ensuite les propriétés de type conservatif du premier et du deuxième moment, ainsi que la caractérisation de Q comme étant la seule fonction d'énergie nulle à cette masse. En masse sur-critique, J. Bourgain et W. Wang ont montré dans [31] la persistance de solutions explosives en $1/t$, avec profil du même type. Enfin, l'analyse délicate des solutions explosant en $\sqrt{\frac{\log \log |t|}{|t|}}$, mises en évidence rigoureusement en 1-D par G. Perelman [124], et numériquement par M.J. Landman, G.C. Papanicolaou, C. Sulem et P.-L. Sulem [108], a été menée par F. Merle et P. Raphaël [116],[117],[118]. Pour une discussion sur les résultats d'explosion hors du cadre \mathbb{R}^n avec la métrique standard, on renvoie le lecteur au chapitre §3.

Nous revenons maintenant sur les solutions avec temps maximal d'existence infini. Nous allons donner les résultats principaux de la théorie de la diffusion, connue aussi sous le nom de **scattering**. Nous allons garder le terme anglais pour éviter la confusion avec les équations de réaction-diffusion. Il y a deux questions naturelles qui se posent concernant le comportement en temps grand des solutions globales. D'une part, celle de l'existence des opérateurs d'onde : étant donné un certain profil asymptotique, typiquement une solution de l'équation de Schrödinger linéaire, existe-t-il une solution globale de l'équation de Schrödinger non-linéaire qui lui est proche en temps grand ? D'autre part, une solution globale de l'équation non-linéaire se comporte-t-elle en temps grand comme une évolution type, notamment comme une évolution libre ?

En ce qui concerne l'**existence des opérateurs d'onde**, on obtient une solution de l'équation non-linéaire se comportant en temps grand comme une fonction donnée $v(t, x)$ en construisant un point fixe pour

$$\Phi(u)(t) = v(t) + i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} (F(u(\tau)) - (i\partial_\tau + \Delta)v(\tau)) d\tau.$$

Ceci veut dire que nous faisons un point fixe "à l'infini". En particulier, si $v(t) = e^{it\Delta}v_0$,

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}v_0 + i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau.$$

On appelle ce cas “à courte portée”, car alors la non-linéarité est négligeable en temps grand. Dans le cadre L^2 on cherche la solution dans une intersection d’espaces de type $L^p([T, \infty), L^q)$. Pour contrôler le terme de Duhamel, on utilise des estimations similaires à celles de la preuve de l’existence locale des solutions, quand la puissance θ peut être prise égale à zéro, c’est-à-dire pour $\alpha = \frac{4}{n}$ dans le cadre L^2 . Pour une donnée v_0 grande, une façon d’obtenir alors la stabilité et la contraction de Φ est d’imposer comme rayon de la boule de l’espace de point fixe la condition

$$\|u\|_{L^p([T, \infty), L^q)} \leq 2\|e^{it\Delta}v_0\|_{L^p([T, \infty), L^q)},$$

et de choisir un temps T assez grand. On peut aussi imposer une condition de petitesse sur v_0 , mais nous allons revenir là-dessus lors de la complétude asymptotique. Une fois le point fixe u obtenu, on a en particulier $\|u\|_{L^p([t, \infty), L^q)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ pour $(p, q) \neq (\infty, 2)$. En conclusion, pour $\alpha = \frac{4}{n}$ et $v_0 \in L^2$, on obtient l’existence d’un temps T et d’une solution u de l’équation non-linéaire sur $[T, \infty)$ telle que

$$\|u(t) - e^{it\Delta}v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

En écrivant

$$u(t) - e^{it\Delta}v_0 = i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} (F(u(\tau)) - F(e^{i\tau\Delta}v_0)) d\tau + i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} F(e^{i\tau\Delta}v_0) d\tau,$$

le taux de décroissance est donné par la dernière intégrale. L’inégalité de dispersion nous dit qu’une évolution libre se comporte en norme L^∞ comme $t^{-\frac{n}{2}}$. Comme $\alpha = \frac{4}{n} > \frac{2}{n}$ il s’ensuit que le taux de décroissance est $t^{1-\frac{\alpha n}{2}}$. Remarquons que le point fixe pour l’existence des opérateurs d’onde peut être fait autour de $e^{it\Delta}v_0$ en imposant cette décroissance. De plus, les solutions peuvent être trouvées proches des ordres plus grands du développement asymptotique en temps grand d’une évolution linéaire (voir par exemple l’article récent de S. Masaki [113]).

Dans H^1 on a le résultat similaire pour les puissances $\frac{4}{n} < \alpha < \frac{4}{n-2}$. Enfin, si la non-linéarité est invariante de jauge et de plus défocalisante pour le cas H^1 , on peut prolonger les solutions obtenues sur $[T, \infty)$ à des solutions globales (J. Ginibre et G. Velo [75]).

On peut descendre en-dessous du seuil $\alpha = \frac{4}{n}$, en exploitant mieux la décroissance en temps des normes $\|u(t)\|_{L^p}$ d’une fonction qui se comporte comme une évolution libre. L’argument de point fixe se fait alors dans le cadre des espaces à poids $\Sigma^1 = H^1 \cap \mathcal{FH}^1$. On arrive ainsi en-dessous de $\alpha = \frac{4}{n}$, plus précisément jusqu’à l’indice de Strauss (J. Ginibre et G. Velo [73], T. Cazenave et F. Weissler [50], J. Ginibre, T. Ozawa et G. Velo [72]). L’indice de Strauss $\alpha(n)$ est donné par la relation $\frac{n\alpha}{2} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$. Cette non-linéarité est la seule pour laquelle il existe un p , tel que d’une part l’équation est invariante dans $L^{p'}$, et d’autre part tel que $\| |u|^\alpha u \|_{L^{p'}} = \|u\|_{L^p}^{\alpha+1}$. Par exemple, $\alpha(3) = 1$: en dimension $n = 3$, l’équation quadratique est invariante dans $L^{\frac{3}{2}}$ et on peut faire un point fixe sur la décroissance des normes L^3 .

La valeur $\alpha = \frac{2}{n}$ est critique pour l’existence des opérateurs d’onde. Plus précisément, la seule solution d’énergie finie de l’équation non-linéaire défocalisante avec $\alpha \leq \frac{2}{n}$ qui se comporte à grands temps comme une évolution libre, même juste dans L^2 , est la solution nulle (W. Strauss [144], J.E. Barab [17]). Ce seuil apparaît naturellement en remarquant qu’en cas de courte portée, la non-linéarité se comporte comme un terme linéaire avec potentiel $t^{-\frac{\alpha n}{2}}$, qui n’appartient à L^1 , espace critique pour le scattering linéaire (voir le livre [62] de J. Derezinski et C. Gérard).

Enfin, pour les puissances $\alpha = \frac{2}{n}$ les solutions non-linéaires peuvent se comporter comme des évolutions libres modifiées ; ce sont les phénomènes de longue portée (T. Ozawa [123], J. Ginibre et T. Ozawa [71], R. Carles [43], N. Hayashi et P.I. Naumkin [89]).

On a **complétude asymptotique**, par exemple dans L^2 , quand pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2$, la solution u de l'équation non-linéaire est globale en temps et telle que $e^{-it\Delta}u(t)$ ait une limite $u_+ \in L^2$ quand t tend vers l'infini. Ceci équivaut à avoir, en utilisant la formule de Duhamel,

$$\|e^{-it_1\Delta}u(t_1) - e^{-it_2\Delta}u(t_2)\|_{L^2} = \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t_1, t_2 \rightarrow \infty} 0.$$

Dans ce cas, la vitesse de rapprochement entre $u(t)$ et $e^{it\Delta}u_+$ est obtenue en remplaçant (t_1, t_2) par (t, ∞) . En remplaçant (t_1, t_2) par $(0, \infty)$ nous avons

$$u_+ = u_0 - i \int_0^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau.$$

Montrer que le terme de Duhamel pris entre t_1 et t_2 tend vers zéro dans L^2 est en lien avec la preuve de l'existence des opérateurs d'ondes. Si on sait que u appartient aux espaces L^pL^q globaux en temps on peut donc répéter les estimations utilisées pour le point fixe des opérateurs d'ondes et conclure à la complétude asymptotique.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur l'existence de solutions de l'équation non-linéaire, une donnée initiale u_0 petite dans L^2 permet de construire les solutions directement dans des espaces L^pL^q globaux en temps. Nous avons donc la complétude asymptotique dans L^2 des données petites L^2 pour la puissance $\alpha = \frac{4}{n}$, et, de façon similaire, la complétude asymptotique dans H^1 des données petites H^1 pour les puissances $\frac{4}{n} < \alpha < \frac{4}{n-2}$.

Nous allons traiter dans la suite la complétude asymptotique dans H^1 de l'équation avec non-linéarité invariante de jauge défocalisante $F(u) = |u|^\alpha u$, sans condition de petitesse sur les données initiales. Par construction, si $u_0 \in H^1$, nous avons obtenu l'existence de solutions globalement dans H^1 mais seulement localement dans les espaces L^pL^q . Pour obtenir cette dernière appartenance globalement en temps, des nouvelles estimations de la solution sont obtenues par des méthodes d'énergie, appelées **inégalités de Morawetz**.

Généralement, soit v une solution dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^1)$ de l'équation

$$i\partial_t v + \Delta v = Gv,$$

avec G fonction réelle dépendant éventuellement de v . Alors, par intégrations par parties, nous pouvons faire les calculs de viriel suivants, pour une fonction a réelle assez régulière,

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t^2}{2} \int |v(t, x)|^2 a(x) dx &= \partial_t \Im \int \bar{v}(t, x) \nabla v(t, x) \nabla a(x) dx \\ &= \int (-\Delta^2 a) \frac{|v|^2}{2} + \int \nabla v \text{Hess } a \nabla \bar{v} + \Re \int 2Gv \nabla \bar{v} \cdot \nabla a + \bar{G}|v|^2 \Delta a. \end{aligned}$$

En intégrant en temps,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int (-\Delta^2 a) \frac{|v|^2}{2} + \int \nabla v \text{Hess } a \nabla \bar{v} + \Re \int 2Gv \nabla \bar{v} \cdot \nabla a + \bar{G}|v|^2 \Delta a \right) dt \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1)}^2 \|\nabla a\|_{L^\infty}.$$

Dans notre cas où u est solution de l'équation avec non-linéarité $F(u) = |u|^\alpha u$ sur \mathbb{R}^n , en choisissant $a(x)$ la fonction convexe $|x|$, nous obtenons les inégalités de Morawetz classiques. Par exemple, si $n \geq 3$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{|x|} dx dt \leq c \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n))}^2.$$

Grâce à ces inégalités, et à celle de dispersion de l'équation linéaire, J. Ginibre et G. Velo (voir aussi le livre de T. Cazenave [47]) ont obtenu dans [75] les premiers résultats de scattering dans H^1 sous-critique. Cette méthode suit celle de l'article [120] de C. Morawetz et W. Strauss sur l'équation de Klein-Gordon, appliquée ensuite par J.-E. Lin et W. Strauss dans [109] à l'équation de Schrödinger dans des espaces à poids. Nous allons donner ces résultats après avoir esquissé dans la suite une autre approche, ne faisant pas appel à l'inégalité de dispersion.

Nous allons maintenant introduire les inégalités de Morawetz d'interaction, démontrées dans [54] par J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao (voir aussi la présentation de A. Hassel, T. Tao et J. Wunsch dans [88]). La fonction $v(t, x, y) = u(t, x)u(t, y)$ est solution de l'équation de Schrödinger posée sur \mathbb{R}^{2n} , avec une non-linéarité qui rentre dans le cadre général ci-dessus. En prenant $a(x, y) = |x - y|$, la partie hessienne et la partie non-linéaire sont positives. En gardant juste la partie bilaplacien, on obtient les inégalités de Morawetz d'interaction

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t, x)|^4 dx dt \leq c \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))}^4,$$

et pour $n \geq 4$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|^3} dx dy dt \leq c \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n))}^4.$$

Remarquons ici que des inconvénients dûs au signe bilaplacien de $|x|$ en dimension inférieure peuvent être évités par une autre présentation de ces inégalités donnée récemment par F. Planchon et L. Vega [129]. Par un argument de calcul paradifférentiel, il s'ensuit que la solution u est globalement dans $L^{n+1} L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$, pour $n \geq 4$ également. Cette nouvelle information permet de faire un argument de bootstrap sur la formule de Duhamel de la solution pour obtenir l'appartenance aux espaces $L^p L^q$ globaux en temps si $\frac{4}{n} < \alpha < \frac{4}{n-2}$. La complétude asymptotique dans H^1 s'ensuit pour de telles puissances α (voir T. Tao, M. Visan et X. Zhang [151] pour cette preuve revisitée du résultat de J. Ginibre et G. Velo [75]).

En travaillant dans des espaces à poids, des résultats de complétude asymptotique sont obtenus pour des α en-dessous de $\frac{4}{n}$ et au-dessus de l'indice de Strauss $\alpha(n)$ (J. Ginibre et G. Velo [73], J.-E. Lin et W. Strauss [109], Y. Tsutsumi [155], T. Cazenave et F. Weissler [50], K. Nakanishi et T. Ozawa [121], voir aussi l'article [157] de Y. Tsutsumi et K. Yajima pour la complétude L^2 des données Σ^1).

Les inégalités d'interaction ont été démontrées pour traiter l'équation quintique en dimension 3, cas critique pour l'existence locale dans H^1 , par J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao [54], étendant ainsi le résultat radial de J. Bourgain [30]. D'autres inégalités de type Morawetz ont permis l'étude des cas critiques $\alpha = \frac{4}{n}$ pour L^2 et $\alpha = \frac{4}{n-2}$ pour H^1 . La recherche dans cette direction est intense ces dernières années (voir par exemple les articles E. Ryckman et M. Visan [135], M. Visan [161], Y.F Fang et M.G. Grillakis [65], T. Tao, M. Visan et X. Zhang [150], J. Colliander, J. Holmer, M. Visan et X. Zhang [53]).

Enfin, dans le cas de l'équation focalisante, des résultats de scattering à données avec condition de petitesse optimale ont été obtenus par des stratégies spécifiques (voir par exemple C. Kenig et F. Merle [100] pour le cas critique H^1 , S. Keraani [103], T. Tao, M. Visan et X. Zhang [149] pour le cas critique L^2).

En cas de complétude asymptotique, on peut définir l'opérateur de scattering. Étant donnée u_- , à l'aide des opérateurs d'ondes on considère la solution non-linéaire globale qui se comporte comme $e^{it\Delta}u_-$ quand t tend vers $-\infty$. En utilisant la complétude asymptotique, quand t tend vers $+\infty$, cette solution est proche d'une autre évolution linéaire, $e^{it\Delta}u_+$. L'opérateur de scattering est celui qui associe à u_- la fonction u_+ (voir l'article [46] de R. Carles et I. Gallagher pour l'analyticité).

En dehors du cadre \mathbb{R}^n avec la métrique euclidienne peu de choses sont faites concernant le scattering, car en général les inégalités de Strichartz pour l'équation linéaire sont seulement locales en temps, et de plus les calculs de viriels s'avèrent difficiles à gérer. Dans le chapitre suivant nous allons donner quelques résultats dans cette direction.

Chapitre 2

L'équation de Schrödinger en géométries de courbure négative

2.1 Motivation

Depuis une quinzaine d'années, l'équation de Schrödinger non-linéaire a été intensément étudiée, dans d'autres situations que \mathbb{R}^n avec la métrique euclidienne, et en général via les propriétés dispersives de l'équation linéaire (voir §1).

Les deux premières parties de ma thèse portent sur l'équation à coefficients variables, et ont été une motivation pour la suite de mes recherches. Dans [7] j'avais considéré l'équation en une dimension avec coefficients fonctions en escalier, bornées entre deux constantes positives. Dans le cas d'un nombre fini de discontinuités, la résolvante se calcule explicitement et s'exprime en termes de séries d'exponentielles. En étudiant ces séries dans le cadre de la théorie des fonctions presque-périodiques de Wiener, j'ai montré la dispersion et les inégalités de Strichartz globales. Aussi, pour certains coefficients périodiques, la théorie de Floquet permet de montrer que l'inégalité de dispersion locale en temps n'est pas vérifiée. N. Burq et F. Planchon [40] ont généralisé les inégalités de Strichartz globales au cas des coefficients BV (voir aussi l'article [137] de D. Salort sur les estimées locales en temps pour coefficients \mathcal{C}^2). La deuxième partie de ma thèse [8] contient une description précise de l'évolution par l'équation cubique posée sur la sphère \mathbb{S}^2 de certaines harmoniques sphériques concentrées sur des géodésiques. On précise ainsi des résultats d'instabilité de N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [36].

Nous allons donner un exemple qui montre l'influence de la géométrie sur la dynamique de l'équation. Nous allons considérer l'équation non-linéaire cubique défocalisante posée sur des surfaces.

Dans le cas du tore plat \mathbb{T}^2 , J. Bourgain a montré dans [28] que le problème de Cauchy est bien posé dans $H^\epsilon(\mathbb{T}^2)$, pour tout ϵ positif. D'autre part, dans [36] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov ont montré que sur \mathbb{T}^2 le flot n'est pas uniformément continu sur $H^s(\mathbb{T}^2)$ avec s négatif. Il s'ensuit que l'indice critique de régularité est zéro. Ceci est aussi le cas de \mathbb{R}^n (voir T. Cazenave et F. Weissler [49] et M. Christ, J. Colliander et T. Tao [52] pour les deux arguments correspondants).

Dans le cas de la sphère \mathbb{S}^2 , N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov ont montré que l'indice de régularité critique est $\frac{1}{4}$. D'une part ils ont mis en évidence dans [36] des phénomènes d'instabilité pour $s < \frac{1}{4}$ (voir aussi [8]). D'autre part ils ont montré dans [38] le caractère bien

posé pour $s > \frac{1}{4}$, via des inégalités bilinéaires.

Il y a donc une différence importante entre les deux cas, qui n'est due ni à la compacité, ni à l'existence de trajectoires captées. Il est donc naturel de penser dans le cas de variétés sans bord que la courbure positive est la cause de ce nouveau phénomène, et de s'intéresser aux variétés à courbure négative, où il y a "plus d'espace" pour les trajectoires.

La description de la dynamique de solutions de l'équation de Schrödinger dans des cas de courbure négative est l'objet de ce chapitre.

Le cas le plus simple de variété de courbure négative, l'espace hyperbolique, a été d'abord considéré. Des propriétés dispersives améliorées par rapport à celles de \mathbb{R}^n ont été mises en évidence (V. Banica [10], V. Pierfelice [127], V. Banica, R. Carles et G. Staffilani [13], J.-P. Anker et V. Pierfelice [2], A. Ionescu et G. Staffilani [93]). Ces propriétés ont été étendues dans [127] par V. Pierfelice aux espaces plus généraux de Damek-Ricci, qui ont encore, tout comme l'espace hyperbolique, une riche structure algébrique. À la question naturelle qui est de savoir si cette riche structure algébrique, qui permet par exemple de faire de l'analyse de Fourier, est la cause des améliorations obtenues, la réponse est plutôt négative. Avec T. Duyckaerts nous avons mis en évidence dans [14] une large famille de variétés non-compactes, admettant seulement une symétrie radiale, pour lesquelles les solutions radiales vérifient des inégalités de type Strichartz améliorées de façon plus importante que celles radiales sur \mathbb{R}^n . Dans ce cadre, la courbure sectionnelle et l'élément volume à laquelle elle est reliée de façon intrinsèque ont été mis en relation avec les propriétés dispersives vérifiées par les solutions.

Enfin, une conséquence de ces propriétés dispersives de l'équation linéaire sur l'équation non-linéaire est la complétude asymptotique dans des cas où des phénomènes à longue portée sont incontournables sur \mathbb{R}^n (V. Banica, R. Carles et G. Staffilani [13], V. Banica, R. Carles et T. Duyckaerts [11], A. Ionescu et G. Staffilani [93]).

Comme perspective nous nous proposons de mieux comprendre le lien d'une part entre la courbure sectionnelle et la croissance de l'élément de volume d'une variété, et d'autre part les propriétés dispersives de l'équation linéaire posée sur cette variété, ainsi qu'avec les comportements en temps grands de l'équation non-linéaire correspondante. Rappelons aussi que le cas de variétés compactes de courbure négative reste ouvert.

2.2 Le cas de l'espace hyperbolique

2.2.1 Structure de l'espace hyperbolique

Avant de passer à la structure de variété riemannienne de l'espace hyperbolique, nous allons dire quelques mots sur sa structure algébrique. Nous définissons sur \mathbb{R}^{n+1} la forme quadratique de Lorenz

$$[x, x] = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

et nous rappelons que $SO(n+1)$ est le groupe de transformations linéaires de \mathbb{R}^{n+1} de déterminant 1 qui préservent le produit scalaire standard, et $SO(1, n)$ est celui des transformations linéaires de \mathbb{R}^{n+1} de déterminant 1 qui préservent la forme de Lorenz. Notons e_0 le premier élément de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Tout comme la sphère est l'orbite de e_0 sous l'action de $SO(n+1)$:

$$\mathbb{S}^n = SO(n+1)e_0 \approx \frac{SO(n+1)}{Stab e_0} \approx \frac{SO(n+1)}{SO(n)},$$

l'espace hyperbolique peut être défini comme étant l'orbite de e_0 sous $SO(1, n)$,

$$\mathbb{H}^n = SO(1, n)e_0 \approx \frac{SO(1, n)}{Stab e_0} \approx \frac{SO(1, n)}{SO(n)}.$$

Enfin, rappelons la décomposition polaire de $SO(1, n)$,

$$SO(1, n) = SO(n) A SO(n),$$

où A est un groupe isomorphe à \mathbb{R} . En tant qu'espace quotient, l'espace hyperbolique est un espace symétrique de rang 1.

Nous allons donner un exemple de description de \mathbb{H}^2 , dans le but de faire la lien entre la définition algébrique et la définition en tant que variété riemannienne présentée plus loin. Si nous considérons le groupe isomorphe à \mathbb{R}

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\},$$

nous avons

$$\mathbb{H}^2 = SO(1, 2)e_0 = SO(2) A SO(2) e_0 = SO(2) A e_0 = \left\{ SO(2) \begin{pmatrix} \cosh s \\ \sinh s \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme $SO(2)$ est le groupe de rotations dans le plan engendré par e_1 et e_2 , nous obtenons

$$\mathbb{H}^2 = \{(\cosh s, \sinh s \cos \theta, \sinh s \sin \theta), s \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]\} = \{x \in \mathbb{R}^3, [x, x] = 1, x_0 > 0\}.$$

Nous allons maintenant introduire la structure de variété riemannienne en utilisant le modèle de la branche supérieure de l'hyperboloïde. C'est l'un des trois modèles habituels de l'espace hyperbolique; les deux autres sont celui de la boule et celui du demi-espace. Nous considérons donc l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n comme étant la surface de \mathbb{R}^{n+1} donnée par la paramétrisation

$$\{x = (x_0, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (x_0, \tilde{x}) = (\cosh r, \sinh r \omega), r \geq 0, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

avec la métrique induite par celle de Lorentz sur \mathbb{R}^{n+1} , $dl^2 = -dx_0^2 + d\tilde{x}^2$. Étant donné que

$$dx_0 = \sinh r dr, \quad d\tilde{x} = \cosh r \omega dr + \sinh r d\omega,$$

il s'ensuit que la métrique en coordonnées radiales de l'espace hyperbolique est

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\omega^2,$$

où $d\omega^2$ désigne la métrique sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} . La courbure sectionnelle prend donc partout la valeur -1 , et l'élément volume est $\sinh r^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{H}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r, \omega) \sinh r^{n-1} d\omega dr.$$

Par abus de langage on note l'origine de l'espace hyperbolique $0 = (1, 0_{\mathbb{R}^n})$. La longueur d'une courbe $\gamma(t) = (\cosh r(t), \sinh r(t) \omega(t))$, où t varie entre a et b , est définie comme d'habitude,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|\partial_t(\cosh r(t))|^2 + |\partial_t(\sinh r(t) \omega(t))|^2} dt = \int_a^b \sqrt{|r'(t)|^2 + |\sinh r(t)|^2 |\omega'(t)|^2} dt.$$

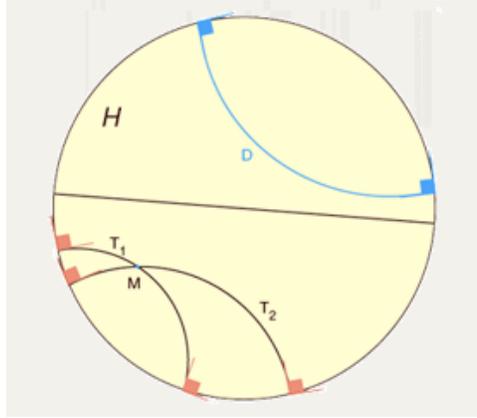
Nous déduisons que la distance d'un point x de coordonnées (r, ω) à l'origine est

$$d(x, 0) = r.$$

Plus généralement, en faisant appel aux isométries de l'espace hyperbolique, nous obtenons la distance entre deux points arbitraires de \mathbb{H}^n ,

$$d(x, y) = \cosh^{-1}([x, y]).$$

Sur le modèle de la boule, obtenu en projetant celui de la branche supérieure de l'hyperboloïde sur $\{x = (x_0, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, x_0 = 0, |\tilde{x}| < 1\}$, les géodésiques sont les arcs de cercles orthogonaux à l'intérieur du disque. Le fait qu'il y ait "plus d'espace" peut être vu par exemple en regardant les géodésiques. Étant donnée une géodésique et un point (D et M respectivement sur la figure suivante), par ce dernier passent une infinité d'autres géodésiques qui n'intersectent pas la première, alors que sur la sphère il n'y en a aucune, et sur l'espace euclidien une seule, la parallèle.



L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété M de métrique (g_{ij}) est

$$\Delta_M = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{|g(x)|}} \partial_i \sqrt{|g(x)|} g^{ij}(x) \partial_j, \text{ où } g = \det(g_{ij}), (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Sachant que dans le cas de \mathbb{H}^n nous avons déjà l'expression explicite en coordonnées polaires

$$(g_{ij})(r, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 r (h_{ij})(\omega) \end{pmatrix},$$

où (h_{ij}) correspond à la métrique sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} , nous obtenons

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \partial_r^2 + (n-1) \frac{\cosh r}{\sinh r} \partial_r + \frac{1}{\sinh^2 r} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Étant donnés λ réel et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto e^{\lambda x \cdot \theta}$ est une fonction propre généralisée du laplacien sur \mathbb{R}^n . De façon similaire, en utilisant d'abord le modèle de la boule, où on visualise mieux l'équivalent de la notion de produit scalaire, on obtient les fonctions propres généralisées de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{H}^n

$$h_{\lambda, \theta}(x) = [x, (1, \theta)]^{i\lambda - \frac{n-1}{2}},$$

qui vérifient

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} h_{\lambda, \theta} = \left(\lambda^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right) h_{\lambda, \theta}.$$

Tout comme sur \mathbb{R}^n , la définition de la transformée de Fourier sur \mathbb{H}^n est

$$\widehat{f}(\lambda, \theta) = \int_{\mathbb{H}^n} h_{\lambda, \theta}(x) f(x) dx,$$

et nous avons la formule de la transformée de Fourier inverse

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \bar{h}_{\lambda, \theta}(x) \widehat{f}(\lambda, \theta) d\theta \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2},$$

où $c(\lambda)$ désigne le coefficient de Harish-Chandra,

$$\frac{1}{|c(\lambda)|^2} = \frac{1}{2(2\pi)^n} \frac{|\Gamma(i\lambda + \frac{n-1}{2})|^2}{|\Gamma(i\lambda)|^2}.$$

Pour plus de détails sur l'espace hyperbolique, on renvoie le lecteur aux livres de S. Helgason [91] et de A. Terras [153].

2.2.2 Résolution de l'équation linéaire

Dans le but de trouver l'expression explicite des solutions linéaires de l'équation de Schrödinger sur l'espace hyperbolique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u = 0, \\ u(0, x) = u_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

j'ai fait appel dans [10], comme sur \mathbb{R}^n , à l'analyse de Fourier. En utilisant la formule de la transformée de Fourier et celle de son inverse sur \mathbb{H}^n , la solution peut s'écrire

$$u(t, x) = e^{-it\frac{(n-1)^2}{4}} \int_{\mathbb{H}^n} u_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda^2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \bar{h}_{\lambda, \theta}(x) h_{\lambda, \theta}(y) d\theta \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} dy,$$

où $h_{\lambda, \theta}$ sont les fonctions propres généralisées de $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$, définies dans la sous-section précédente. Grâce au groupe $SO(1, n)$ d'isométries de l'espace hyperbolique, on se ramène à la formule

$$u(t, x) = e^{-it\frac{(n-1)^2}{4}} \int_{\mathbb{H}^n} u_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda^2} \int_0^\pi (\cosh \rho - \sinh \rho \cos \alpha)^{i\lambda - \frac{n-1}{2}} \sin^{n-2} \alpha d\alpha \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} dy,$$

où $\rho = d_{\mathbb{H}^n}(x, y)$.

Dans le cas de la dimension $n = 3$, l'intégration en α est directe. De plus, dans cette dimension le coefficient de Harish-Chandra vaut $c(\lambda) = \lambda^{-1}$ et l'intégrale oscillante en λ donne la formule exacte de la solution.

Dans les autres dimensions $n \neq 3$, nous faisons appel aux fonctions de Legendre, auxquelles sont liés d'une part l'intégrale en α , et d'autre part, le coefficient de Harish-Chandra. Les propriétés des fonctions de Legendre nous permettent de donner une formule explicite de la solution.

Théorème 1. [10] *La solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur \mathbb{H}^n s'écrit, en dimensions impaires $n \geq 3$,*

$$u(t, x) = c \frac{e^{-it \frac{(n-1)^2}{4}}}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} u_0(y) \left(\frac{\partial_\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{i \frac{\rho^2}{4t}} dy,$$

et en dimensions paires $n \geq 2$

$$u(t, x) = c \frac{e^{-it \frac{(n-1)^2}{4}}}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} u_0(y) \left(\frac{\partial_\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_\rho^\infty \frac{e^{i \frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho}} ds dy.$$

Le comportement en grand temps des solutions radiales de l'équation linéaire a été étudié dans [13] et [11]. Nous avons montré qu'il existe un opérateur \mathcal{L} unitaire de $L_{rad}^2(\mathbb{H}^n)$ vers $L_{rad}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\left\| u(t, x) - e^{-it \frac{n-1}{2}} \left(\frac{r}{\sinh r} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{i \frac{r^2}{4t}}}{t^{n/2}} (\mathcal{L}u_0) \left(\frac{r}{2t} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Pour \mathbb{H}^3 nous avons obtenu une formule similaire à celle du cas euclidien,

$$u(t, x) = W \mathcal{M}_t \mathcal{D}_t \mathcal{F} \mathcal{M}_t u_0,$$

où W et $\mathcal{M}_t(r)$ sont les multiplications par $e^{-it \frac{r}{\sinh r}}$ et par $e^{i \frac{r^2}{4t}}$ respectivement, \mathcal{F} est la transformation de Fourier de \mathbb{H}^3 , et \mathcal{D}_t est le changement d'échelle $\mathcal{D}_t \varphi(r) = \frac{1}{t^{3/2}} \varphi\left(\frac{r}{2t}\right)$, donc dans ce cas \mathcal{L} est la transformation de Fourier.

2.2.3 Propriétés dispersives de l'équation linéaire

Pour découvrir les propriétés dispersives des solutions linéaires, il faut estimer le noyau

$$K_n(t, \rho) = \left(\frac{\partial_\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{i \frac{\rho^2}{4t}}$$

en dimensions impaires, et

$$K_n(t, \rho) = \left(\frac{\partial_\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_\rho^\infty \frac{e^{i \frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho}} ds$$

en dimensions paires. Pour les dimensions impaires, par des arguments combinatoires, le noyau se développe en puissances de t , ce qui donne des estimations. Le cas des dimensions paires est bien plus délicat. À partir d'une formule qui relie les noyaux de dimensions consécutives

$$K^n(t, \rho) = c \int_\rho^\infty \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho}} K^{n+1}(t, s) ds,$$

nous sommes ramenés à faire des estimations d'intégrales oscillantes, notamment pour les petits temps positifs, du type

$$\left| \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{i\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho}} ds \right| \leq c \sqrt{t} \sqrt{\frac{\rho}{\sinh \rho}}.$$

Nous obtenons les inégalités de dispersion suivantes.

Théorème 2. [10] *Pour toute dimension $n \geq 2$, la solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur \mathbb{H}^n vérifie l'inégalité de dispersion locale en temps*

$$|u(t, x)| \leq \frac{c}{|t|^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} |u_0(y)| \left(\frac{\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} dy.$$

À grand temps

$$|u(t, x)| \leq \frac{c}{|t|^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} |u_0(y)| \left(\frac{\rho}{\sinh \rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} dy,$$

avec un facteur supplémentaire $\frac{1+\rho}{\sqrt{\rho}}$ en dimensions paires.

On a donc, par rapport au cas \mathbb{R}^n , une amélioration visible du comportement de la solution en espace. En particulier, on a les mêmes inégalités de dispersion que sur \mathbb{R}^n , locales en temps, et globales pour $n = 3$. Les inégalités de Strichartz qui en découlent par l'argument classique TT* sont sans perte. Ceci est en contraste avec les résultats obtenus sur la sphère par N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov dans [36].

Remarquons que le noyau de l'équation de la chaleur sur l'espace hyperbolique a les mêmes estimations avec un facteur supplémentaire $(1 + \rho)^{-\frac{n-3}{2}}$ pour les grands temps (voir E.B. Davies et N. Mandouvalos [60], J.-P. Anker et L. Ji [1], et aussi le livre [59] de E.B. Davies). Ce facteur supplémentaire pour les grands temps a été récemment mis en évidence pour le noyau de Schrödinger aussi, par J.-P. Anker et V. Pierfelice [2]. Notons aussi que dans le cas de l'équation des ondes sur l'espace hyperbolique, des estimations dispersives améliorées ont été démontrées et utilisées dans [152] par D. Tataru pour traiter l'équation des ondes sur \mathbb{R}^n (voir aussi le livre [68] de V. Georgiev). Enfin, rappelons que les inégalités de Strichartz locales en temps, sans gain, dans le cas d'une variété asymptotiquement hyperbolique ont été récemment démontrées par J.-M. Bouclet dans [25] avec des méthodes d'analyse semi-classique.

En imposant une condition de radialité à la donnée initiale, nous pouvons mieux estimer le noyau, en précisant les inégalités de dispersion.

Théorème 3. [10] *Pour toute dimension $n \geq 3$, dans le cas radial, la solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur \mathbb{H}^n vérifie l'inégalité de dispersion à poids locale en temps*

$$\|u(t) w\|_{L^\infty(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{c}{|t|^{\frac{n}{2}}} \left\| \frac{u_0}{w} \right\|_{L^1(\mathbb{H}^n)},$$

avec

$$w(x) = \left(\frac{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(0, x)}{d_{\mathbb{H}^n}(0, x)} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

ainsi que les inégalités de Strichartz qui en découlent,

$$\left\| u w^{1-\frac{2}{q}} \right\|_{L^p([0,T], L^q(\mathbb{H}^n))} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{H}^n)},$$

pour tout temps T fini et tout couple n -admissible (p, q) . Les estimées sont globales en dimension $n = 3$.

Concernant les inégalités de Strichartz, la contrainte du caractère local en temps pour $n \geq 4$ a été ultérieurement enlevée par V. Pierfelice dans [127], sur les espaces plus généraux de Damek-Ricci, espaces obtenus de façon algébrique à partir des groupes de Heisenberg généralisés. Le nouvel argument consiste à faire un changement de fonction ramenant l'équation linéaire sur \mathbb{H}^n à une équation sur \mathbb{R}^n avec potentiel en $1/r^2$ à l'infini, qui rentre dans le cadre de ceux étudiés par N. Burq, F. Planchon, J.G. Stalker et A.S. Tahvildar Zadeh [41]. Les inégalités de Strichartz obtenues par ces derniers par estimations de résolvante pour $n \geq 3$, retranscrites sur \mathbb{H}^n , sont exactement celles du Théorème 3.

Le cas $n = 2$ du demi-plan de Poincaré a été traité avec R. Carles et G. Staffilani dans [13]. En faisant une analyse plus attentive du noyau, nous avons obtenu des inégalités de dispersion à poids similaires, avec taux de décroissance $t^{-\frac{3}{2}}$ pour tout temps.

En vue de l'étude en temps grand, on exploite dans [13] la présence du poids w . Par exemple, pour tout $d > n \geq 3$, en appliquant l'inégalité de Hölder dans la variable espace

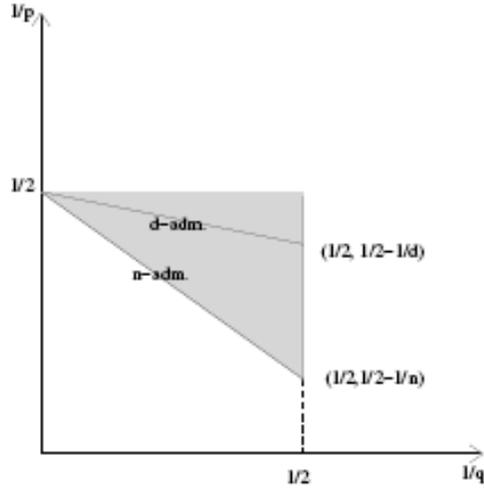
$$\|u\|_{L^2 L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{H}^n)} \leq c \left\| u w^{\frac{2}{n}} \right\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{H}^n)} \left\| w^{-\frac{2}{n}} \right\|_{L^{\frac{nd}{d-n}}(\mathbb{H}^n)}.$$

Nous faisons donc apparaître d'une part une des normes à poids que l'on sait déjà contrôler, et d'autre part une intégrale explicite qui est finie dès que $\frac{nd}{d-n} > n$. Plus généralement, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4. [13] Soit $d \geq n \geq 2$. Dans le cas radial, la solution de l'équation de Schrödinger linéaire posée sur \mathbb{H}^n vérifie, pour tout (p, q) couple d -admissible, les inégalités de Strichartz

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{H}^n))} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}.$$

En d'autres termes, pour \mathbb{H}^n nous avons tout un triangle d'inverses de couples admissibles, $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, dont un côté correspond aux couples n -admissibles, et un autre correspond aux endpoints des dimensions supérieures $d > n$, c'est-à-dire $(p, q) = (2, \frac{2d}{d-2})$, comme sur la figure suivante.



Le fait d'avoir les propriétés caractéristiques à d'autres dimension, et l'absence de comportements longue portée qui en découle pour l'équation non-linéaire, a été déjà mis en évidence dans [44] par R. Carles pour l'équation sur \mathbb{R}^n à potentiel (partiellement) répulsif.

L'hypothèse de radialité de ce théorème a été récemment enlevée indépendamment par J.-P. Anker et V. Pierfelice [2], et par A. Ionescu et G. Staffilani [93]. La démonstration est toujours basée sur une étude du noyau, faisant appel à des outils puissants d'analyse harmonique, comme le phénomène de Kunze-Stein.

Les estimations dispersives obtenues sur \mathbb{H}^n ont d'abord des conséquences naturelles sur l'équation de Schrödinger non-linéaire sur \mathbb{H}^n avec nonlinéarité de type puissance $\alpha + 1$, dans le même esprit que sur \mathbb{R}^n . Les estimations classiques du Théorème 2 impliquent le caractère bien posé du problème de Cauchy local H^s sous-critique, $s > s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{\alpha}$. Celles à poids du Théorème 3 ont été utilisées par V. Pierfelice dans [128] pour obtenir des résultats d'existence dans $L^p L^q(w^{q-2} dx)$ pour l'équation linéaire avec un potentiel dans un espace à poids correspondant. La notion de l'indice critique pour le caractère bien posé dans H^s , a priori pas évidente faute de scaling sur \mathbb{H}^n , a été traitée dans [13]. Par un argument similaire à celui de M. Christ, J. Colliander et T. Tao [52] (voir aussi R. Carles [45]) nous avons mis en évidence des phénomènes d'instabilité permettant de conclure que l'indice critique est s_c , le même que sur \mathbb{R}^n .

Les conséquences les plus frappantes de ces nouvelles estimations dispersives sont celles qui concernent le comportement en temps grands, que nous allons décrire dans la sous-section suivante.

2.2.4 Scattering pour l'équation non-linéaire

Nous considérons l'équation de Schrödinger non-linéaire sur \mathbb{H}^n

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u \pm |u|^\alpha u = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme rappelé dans l'introduction, les ingrédients sur \mathbb{R}^n de la preuve de l'existence globale et la complétude asymptotique pour données L^2 petites et $\alpha = \frac{4}{n}$, et de l'existence des opérateurs d'ondes pour données H^1 grandes et $\frac{4}{n} < \alpha < \frac{4}{n-2}$, sont les inégalités de

Strichartz pour les couples n -admissibles, l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^{\alpha+2}$ et les inégalités de Hölder. Si nous choisissons $d \geq n$ nous avons sur \mathbb{H}^n les inégalités de Strichartz pour les couples d -admissibles grâce au Théorème 4. De plus, si $\frac{4}{d} < \alpha < \frac{4}{d-2} < \frac{4}{n-2}$ l'inclusion $H^1 \subset L^{\alpha+2}$ reste valable. En conclusion nous disposons de tous les ingrédients correspondant à d au lieu de n . Ceci nous permet d'obtenir le résultat suivant de complétude asymptotique pour données L^2 petites (le seul dont nous allons disposer dans L^2), et d'opérateurs d'ondes pour données H^1 grandes.

Théorème 5. [13] *i) Soit $n \geq 2$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{n}$ et $u_0 \in L^2_{rad}(\mathbb{H}^n)$ petite. Alors la solution de l'équation (2.2) est globale en temps $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2) \cap L^{\alpha+2}(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n)$ et il existe $u_{\pm} \in L^2_{rad}(\mathbb{H}^n)$ tel que*

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} u_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

ii) Soit $n \geq 2$, $0 < \alpha < \frac{4}{n-2}$ et $u_+ \in H^1_{rad}(\mathbb{H}^n)$. Il existe T_+ fini tel que l'équation (2.2) admet une solution unique $u \in \mathcal{C} \cap L^\infty([T_+, \infty[, H^1) \cap L^{2\sigma+2}([T_+, \infty[, W^{1,\alpha+2})$ et

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} u_+\|_{H^1(\mathbb{H}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Bien sûr, l'analogie du ii) pour des temps négatifs reste valable. La condition de radialité vient seulement des inégalités de Strichartz d -admissibles; elle est maintenant obsolète car ces dernières sont disponibles également dans le cas non-radial (J.-P. Anker et V. Pierfelice [2], A. Ionescu et G. Staffilani [93]).

Ces résultats montrent l'impact radical de la géométrie sur l'équation non-linéaire : les phénomènes standards longue portée euclidiens ne sont pas présents. Plus précisément, contrairement au cas \mathbb{R}^n , les non-linéarités de type basses puissances n'ont pas d'influence sur la solution qui se comporte asymptotiquement en temps comme une solution linéaire.

Pour traiter la complétude asymptotique dans H^1 pour l'équation défocalisante, nous avons d'abord fait appel aux inégalités de Morawetz d'interaction (voir aussi A. Hasel, T. Tao et J. Wunsch [88] pour la présentation des inégalités de Morawetz d'interaction pour l'équation linéaire sur une variété asymptotiquement conique). Dans notre cas, le point clé est le fait que sur une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, la hessienne d'une fonction distance est symétrique positive. De plus, en prenant dans le calcul de viriel $a(x, y) = d_{\mathbb{H}^n}(x, y)$, on obtient le bon signe pour la contribution non-linéaire. Pour tout intervalle de temps I et pour toute solution u de l'équation (2.2), nous obtenons les contrôles suivants

$$\int_I \int_{\mathbb{H}^3} |u(t, x)|^4 dx dt \leq c \|u\|_{L^\infty(I, H^1(\mathbb{H}^3))}^4,$$

si $n = 3$, et si $n > 3$

$$\int_I \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(x, y))}{\sinh^3(d_{\mathbb{H}^n}(x, y))} |u(t, y)|^2 |u(t, x)|^2 dx dy dt \leq c \|u\|_{L^\infty(I, H^1(\mathbb{H}^n))}^4.$$

Remarquons ici qu'il est rare d'avoir des inégalités de Morawetz pour les solutions non-linéaires de l'équation de Schrödinger dans un contexte autre que \mathbb{R}^n . En dimension $n = 3$ nous retrouvons donc à nouveau tous les ingrédients nécessaires pour avoir la complétude asymptotique dans H^1 pour $\frac{4}{d} < \alpha < \frac{4}{d-2}$ si $d \geq n$. Par contre, en dimensions supérieures, le passage de l'inégalité de Morawetz à un contrôle $L^{d+1} L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}$ utilise sur \mathbb{R}^d les techniques de

calcul paradifférentiel, difficilement adaptable à l'espace hyperbolique. En conséquence dans [13] nous avons traité seulement le cas de la dimension $n = 3$.

Théorème 6. [13] Soit $0 < \alpha < 4$, $u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{H}^3)$ et u la solution globale en temps de l'équation (2.2) défocalisante. Il existe alors $u_{\pm} \in H_{rad}^1(\mathbb{H}^3)$ tel que

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{H}^3}} u_{\pm}\|_{H^1(\mathbb{H}^3)} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

À nouveau, la condition de radialité n'est plus nécessaire, car la preuve des inégalités de Morawetz ne l'utilisait pas, et elle venait juste des inégalités de Strichartz d -admissibles.

Dans un travail en collaboration avec R. Carles et T. Duyckaerts nous avons ultérieurement abordé la question de la complétude asymptotique dans H^1 en dimensions $n \geq 4$. Nous avons montré cette fois-ci des inégalités de Morawetz simples, en contrôlant la partie bilaplacien du calcul de viriel

$$\int_I \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(0, x))}{\sinh^3(d_{\mathbb{H}^n}(0, x))} |u(t, x)|^2 dx dt \leq c \|u\|_{L^\infty(I, H^1(\mathbb{H}^n))}^2.$$

Nous avons ensuite combiné ces estimations avec celles de Strichartz à poids de l'équation linéaire, et nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 7. [11] Soit $n \geq 4$, $0 < \alpha < \frac{4}{n-2}$, $u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{H}^n)$ et u la solution globale en temps de l'équation (2.2) défocalisante. Il existe alors $u_{\pm} \in H_{rad}^1(\mathbb{H}^n)$ tel que

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} u_{\pm}\|_{H^1(\mathbb{H}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Récemment, A. Ionescu et G. Staffilani ont repris aussi dans [93] les inégalités de Morawetz simples, en contrôlant le terme qui vient de la non-linéarité, ce qui s'avère suffisant pour l'argument de boot-strap qui donne la complétude asymptotique. Pour cela ils ont construit un poids $a(x)$, dont le laplacien est égal à 1 et dont le bilaplacien a un bon signe, même en dimension $n = 2$. Remarquons qu'avec ce choix de terme à contrôler dans les inégalités de Morawetz, il suffit en dimensions $n \geq 3$ de prendre comme d'habitude $a(x) = d_{\mathbb{H}^n}(0, x)$, car le laplacien est minoré par 1 et le bilaplacien a le bon signe. Les Théorèmes 6-7 sont donc maintenant connus sans hypothèse de radialité et pour $n = 2$ aussi.

2.3 Le cas des variétés de révolution

Pour mieux comprendre les invariants responsables des inégalités de dispersion améliorées pour l'équation linéaire et leurs conséquences sur le comportement en grands temps de l'équation non-linéaire, nous avons considéré avec T. Duyckaerts le cas des variétés de révolution. Une telle variété M est une variété riemannienne de dimension n , donnée par la métrique

$$ds^2 = dr^2 + \phi^2(r) d\omega^2,$$

où $d\omega^2$ est la métrique de la sphère \mathbb{S}^{n-1} , et ϕ est une fonction $\mathcal{C}^\infty([0, \infty))$ strictement positive sur $(0, \infty)$, telle que $\phi^{(pair)}(0) = 0$ et $\phi'(0) = 1$. Ces conditions sur ϕ sont nécessaires pour que la variété soit régulière (voir le livre [126] de P. Petersen). Par exemple \mathbb{R}^n et \mathbb{H}^n sont de telles variétés, avec $\phi(r) = r$ et $\phi(r) = \sinh r$ respectivement. L'élément volume est $\phi^{n-1}(r)$ et la distance à l'origine d'un point de coordonnées (r, ω) est r . Enfin, l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M s'écrit

$$\Delta_M = \partial_r^2 + (n-1) \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} \partial_r + \frac{1}{\phi^2(r)} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

2.3.1 Propriétés dispersives de l'équation linéaire

Nous allons étudier les propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger linéaire posée sur M ,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_M u = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour cela nous allons utiliser la notion de courbure sectionnelle sec_r , qui est une forme quadratique normalisée sur l'espace tangent $T_r M$, et prend ici comme valeurs extrêmes

$$sec_r^{rad} = -\frac{\phi''}{\phi} \quad , \quad sec_r^{tan} = -\frac{(\phi')^2 - 1}{\phi^2}.$$

Notons

$$w(r) = \left(\frac{\phi(r)}{r} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

et faisons, inspirés par l'argument de V. Pierfelice dans [127], le changement de fonction

$$u(t, r, \omega) = \frac{v(t, r, \omega)}{w(r)}.$$

Il s'ensuit que v vérifie

$$i\partial_t v + \Delta_{\mathbb{R}^n} v + \left(\frac{1}{\phi^2(r)} - \frac{1}{r^2} \right) \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v - V(r)v = 0,$$

avec

$$V(r) = \frac{n-1}{2} \frac{\phi''}{\phi} + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \left(\left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right).$$

Dans le cas radial v vérifie donc l'équation de Schrödinger linéaire sur \mathbb{R}^n , avec potentiel V . Toute inégalité de Strichartz pour v , se traduit sur u par une inégalité de Strichartz à poids.

Les conditions en zéro sur ϕ impliquent que V est borné en zéro. En imposant des conditions en termes de courbure, V est borné à l'infini aussi. Ceci implique pour v des inégalités de Strichartz locales en temps, et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 8. [14] *Soit M une variété de révolution de dimension $n \geq 2$ telle que*

$$\exists m > 0, \quad \frac{1}{\phi(r)} + \left| sec_r^{rad} \right| \leq m \quad \forall r \in [1, \infty).$$

Alors toute solution radiale de (2.3) vérifie pour tout couple (p, q) n -admissible les inégalités de Strichartz locales en temps

$$\left\| u w^{1-\frac{2}{q}} \right\|_{L^p((0, T), L^q(M))} \leq c \|u_0\|_{L^2(M)}.$$

Donc dès que l'élément de volume croît plus vite que l'élément de volume euclidien, le poids w représente un gain en espace. Cette croissance peut être reliée dans le cas non-compact à la courbure sectionnelle négative à l'infini. Aussi, rappelons qu'une variété complète de courbure sectionnelle bornée inférieurement par une constante positive est nécessairement compacte.

En vue de l'étude des propriétés en temps grands de l'équation non-linéaire, nous allons montrer des inégalités de dispersion globales en temps pour l'équation linéaire. Si ϕ est une fonction de type polynomial à l'infini, alors le potentiel V est caractérisé par les propriétés suivantes

$$\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |V(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^2}, \quad (\text{H1})$$

$$\exists \delta_0 > 0, \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 + |x|^2 V(x) \geq \delta_0, \quad (\text{H2})$$

$$\exists R > 0, \quad |x| \geq R \implies \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 - |x|^2 \partial_r(|x|V(x)) \geq \delta_0. \quad (\text{H3})$$

La décroissance en $1/r^2$ à l'infini est critique pour avoir des inégalités de Strichartz globales en temps, comme le montre le contre-exemple de M. Goldberg, L. Vega et N. Visciglia [78] en cas de décroissance plus lente (voir aussi l'exemple de T. Duyckaerts [64]). Pour des potentiels en $1/r^2$, avec des conditions de positivité et de repulsion similaires à (H2) et (H3), les inégalités de Strichartz ont été montrées par N. Burq, F. Planchon, J.G. Stalker et A.S. Tahvildar Zadeh [41] (voir aussi J.A. Barcelo, A. Ruiz et L. Vega [18], I. Rodnianski et W. Schlag [134], et M. Goldberg [77]). Les auteurs ne supposent pas que le potentiel soit borné en zéro, la contrepartie étant que (H3) doit être valable pour tout x . Nous allons donner une autre version, qui se prête mieux aux potentiels bornés à l'origine. En faisant des estimations de résolvante, et en montrant en particulier que l'opérateur $-\Delta + V$ n'admet pas de zéro-résonance, nous démontrons l'effet régularisant et les inégalités de Strichartz globales en temps pour l'équation de Schrödinger perturbée par le potentiel V .

Théorème 9. [14] *Soit $n \geq 3$ et $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant les conditions (H1), (H2) et (H3). Alors les solutions de l'équation*

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta_{\mathbb{R}^n} v - V(r)v = 0, \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

vérifient pour tous couples n -admissibles (p, q) les inégalités de Strichartz globales en temps

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq c \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Si M est une variété de révolution avec des conditions sur la croissance de l'élément volume telles que le potentiel V correspondant vérifie les hypothèses du Théorème 9, nous pouvons retranscrire les inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger sur M .

Théorème 10. [14] *Soit M une variété de révolution de dimension $n \geq 3$, dont $\phi(r)$ croît à l'infini comme r^m pour un $m > \frac{1}{n-1}$, et telle que $\text{sec}_r^{\text{rad}} \leq 0$. Alors toute solution radiale de (2.3) vérifie pour tout couple (p, q) n -admissible les inégalités de Strichartz globales en temps*

$$\left\| u w^{1-\frac{2}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(M))} \leq c \|u_0\|_{L^2(M)}.$$

De plus, si $m > 1$, en notant $N = m(n-1) + 1$, alors pour tout $d \in [n, N[$, les solutions radiales de (2.3) vérifient les inégalités de Strichartz globales en temps pour tout couple (p, q) d -admissible.

Dans [14] nous imposons des conditions plus faibles que $sec_r^{rad} \leq 0$, en termes de courbure sectionnelle ou d'élément de volume. Le nombre N correspond à l'espace \mathbb{R}^N dont l'élément de volume $r^{N-1} = r^{m(n-1)}$ est à l'infini du même type que celui de M , $\phi(r)^{n-1}$. Aussi, nous obtenons des résultats similaires dans des cas de croissance exponentielle de l'élément de volume, comme l'espace hyperbolique. De plus, le théorème reste valable aussi sur des variétés pas nécessairement de révolution, mais ayant un système global de coordonnées (r, θ) pour lequel l'élément de volume est $\phi(r)^{n-1}$ et la partie radiale du laplacien est $\partial_r^2 + (n-1)\frac{\phi'}{\phi}\partial_r$. Enfin, toutes les variétés de révolution telles que

$$\phi(r) = r + a_1 r^3 + \dots + a_k r^{2k+1},$$

avec $k \geq 1$ et a_i strictement positifs, entrent dans le cadre du théorème.

2.3.2 Le comportement à temps grand

Soit M une variété qui vérifie les conditions du Théorème 10. Le comportement en grand temps des solutions radiales de l'équation linéaire sur M a été étudié dans [11]. Nous avons montré qu'il existe un opérateur \mathcal{L} unitaire de $L_{rad}^2(M)$ vers $L_{rad}^2(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\left\| u(t, x) - \left(\frac{r}{\phi(r)} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{i\frac{r^2}{4t}}}{t^{n/2}} (\mathcal{L}u_0) \left(\frac{r}{2t} \right) \right\|_{L^2(M)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

On considère maintenant l'équation de Schrödinger posée sur M , avec une non-linéarité de type puissance $\alpha + 1$. Comme dans le cas de l'espace hyperbolique, une conséquence dans [14] des inégalités de Strichartz globales en temps pour tout couple (p, q) d -admissible, $d \in [n, N[$, est l'existence des opérateurs d'ondes de type courte portée dans H^1 , pour $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{n-2}$. Donc dès que l'élément de volume croît assez vite, $m > 2 + \frac{1}{n-1}$, nous avons $\frac{4}{N} < \frac{2}{n}$ et nous passons donc en dessous du seuil critique $\frac{2}{n}$ de l'équation posée sur \mathbb{R}^n .

En ce qui concerne la complétude asymptotique H^1 pour l'équation défocalisante

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{M_k} u - |u|^\alpha u = 0, \\ u(0, x) = u_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

nous avons étudié avec R. Carles et T. Duyckaerts des variétés de révolution M_k , de dimension n , telles que

$$\phi(r) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{(2j+1)!} r^{2j+1}.$$

Ces variétés font le lien entre \mathbb{R}^n et \mathbb{H}^n , pour lesquels $k = 1$ et $k = \infty$ respectivement. Nous avons montré des inégalités de Morawetz simples, en contrôlant la partie bilaplacien du calcul de viriel

$$\int_I \int_{M_k} \frac{1}{r^3} |u(t, x)|^2 dx dt \leq c \|u\|_{L^\infty(I, M_k)}^2.$$

À l'aide des inégalités de Strichartz à poids du Théorème 10 (ici $m = 2k + 1$, donc $N = (2k + 1)(n - 1) + 1$), nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 11. [11] Soit $n \geq 3$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{n-2}$, $u_0 \in H_{rad}^1(M_k)$ et u la solution globale en temps de l'équation (2.4) défocalisante. Il existe alors $u_{\pm} \in H_{rad}^1(M_k)$ tel que

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{M_k}} u_{\pm}\|_{H^1(M_k)} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

De plus, nous donnons une preuve formelle de la présence des phénomènes longue portée pour $\alpha \leq \frac{2}{N}$. Ceci décrit le fait que le seuil courte-longue portée baisse quand l'élément de volume croît, et fait le lien entre les résultats de scattering obtenus pour \mathbb{R}^n et \mathbb{H}^n .

Chapitre 3

Explosion pour l'équation de Schrödinger non-linéaire

3.1 Motivation, cas d'un domaine

L'étude de l'explosion de l'équation de Schrödinger non-linéaire en dehors du cadre euclidien a deux motivations. D'abord, l'étude des phénomènes de focalisation des lasers peut être reliée au cas de l'équation cubique sur des surfaces. Du point de vue mathématique, comme les méthodes du cadre euclidien ne s'adaptent pas en général, le sujet est très captivant, et de plus il peut mettre à jour des outils qui peuvent être utilisés aussi sur \mathbb{R}^n . Par exemple dans [9], lors de l'étude sur un domaine du plan, nous avons obtenu une inégalité de type Cauchy-Schwarz pour toute fonction $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ de masse $\|v\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2}$, et toute fonction réelle θ ,

$$\left| \int \Im(v \nabla \bar{v}) \nabla \theta dx \right|^2 \leq 2E(v) \int |v|^2 |\nabla \theta|^2 dx.$$

Cette inégalité se prête bien aux cas d'explosions pour l'équation de Schrödinger, où l'énergie est conservée tandis que le gradient explose en temps fini. Elle permet de faire aisément des estimations des fonctions de moment localisé ou pas, qui n'obéissent pas en général à des lois de conservation exacte comme dans le cas euclidien. En l'appliquant au moment du premier ordre elle donne des informations sur la localisation des solutions explosives. Appliquée au moment du deuxième ordre, elle implique des bornes inférieures de la vitesse d'explosion. De tels résultats peuvent être donc obtenus très rapidement sur un domaine, sur un tore plat (voir aussi C. Antonini [4]), et sur \mathbb{R}^n (voir l'article [92] T. Hmidi et S. Keraani pour une version simplifiée de la preuve de classification des solutions explosives sur \mathbb{R}^n de F. Merle [114]).

On obtient ainsi dans [9] que la vitesse d'explosion en masse critique sur un domaine est au moins en $1/t$, et plus rapide que $1/t$ si l'explosion est supposée avoir lieu sur le bord d'un domaine. Cette dernière condition semble peu probable. De plus, dans des cas particuliers comme le demi-plan, l'explosion au bord n'est être possible en masse critique. On s'attend à qu'il n'y ait pas de solution explosive sur le bord, de masse critique. Un autre problème ouvert est la classification des solutions de masse critique explosant sur un domaine. On s'attend à ce que les solutions de masse critique explosant à l'intérieur d'un domaine aient le même profil au point d'explosion que celle de \mathbb{R}^n classifiées par F. Merle [114].

Dans ce chapitre nous allons nous focaliser sur le cas de géométries courbes. Nous allons

d’abord considérer le cas de l’espace hyperbolique, le plus simple espace de courbure négative. Dans ce cas, la courbure négative n’est pas une obstruction à l’explosion, et il existe un critère d’explosion plus faible que le critère de Glassey sur \mathbb{R}^n ([10]). Ensuite, dans un travail en cours avec R. Carles et T. Duyckaerts, nous traitons la questions des solutions explosant en $1/t$. L’autre régime d’explosion, en $\log \log$, déjà plus stable sur \mathbb{R}^n , est également structurellement stable, dans le sens qu’il persiste sur d’autres géométries. Le cas d’un domaine a été traité par F. Planchon et P. Raphaël [130], et celui d’une variété riemannienne générale par N. Burq, P. Gérard et P. Raphaël [34]. Au contraire, le régime d’explosion $1/t$ est instable sur \mathbb{R}^n , et “peu” de solutions explosent en masse critique. Il est donc naturel de s’interroger sur la persistance de ce type de phénomène dans d’autres géométries, ce qui semble être le cas des géométries “assez plates”.

La question est maintenant de comprendre quel est le seuil critique de la notion “assez plate”. De façon générale, peu de choses sont connues sur la dynamique des solutions explosives de l’équation de Schrödinger non-linéaire en dehors du cadre euclidien.

3.2 Explosion sur l’espace hyperbolique

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l’équation de Schrödinger focalisante

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u + |u|^\alpha u = 0, \\ u(0, x) = u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

admet une solution locale en temps dans $H^1(\mathbb{H}^n)$, pour tout $\alpha < \frac{4}{n-2}$. Comme sur \mathbb{R}^n , en utilisant l’inclusion de Sobolev (voir le livre [90] de E. Hebey) et l’inégalité de Gagliardo-Nirenberg qui en découle, on obtient des résultats d’existence globale. En reprenant l’argument de Glassey avec $d_{\mathbb{H}^n}(0, x)^2$ comme poids dans le viriel, on peut faire des calculs explicites dans le cas des solutions radiales. On a le résultat suivant.

Théorème 12. [10] *La puissance $\alpha = \frac{4}{n}$ est critique pour l’explosion de l’équation (3.1). Plus précisément, d’une part, si $\alpha < \frac{4}{n}$ ou si $\alpha = \frac{4}{n}$ et la masse de la donnée initiale est plus petite qu’une certaine constante, alors la solution de (3.1) est globale en temps dans $H^1(\mathbb{H}^n)$. D’autre part, il existe une constante strictement positive c_n telle que si $\alpha \geq \frac{4}{n}$ et la donnée initiale est radiale, de variance finie $d_{\mathbb{H}^n}(0, x)u_0(x) \in L^2(\mathbb{H}^n)$, et d’énergie*

$$E(u_0) < c_n \|u_0\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}^2,$$

alors la solution de (3.1) explose en temps fini.

La constante qui intervient dans le résultat d’existence globale est reliée à C_{GN}^H , la meilleure constante de l’inégalité de Gagliardo-Nirenberg sur \mathbb{H}^n . On peut montrer que cette meilleure constante est plus grande ou égale que la constante euclidienne, mais sa valeur exacte reste encore inconnue. Néanmoins, dans le cas radial, nous avons, comme sur \mathbb{R}^n , l’existence globale des solutions de masse plus petite que $\|Q\|_{L^2}^2$ [12]. La constante strictement positive intervenant dans le critère d’explosion est

$$c_n = \frac{\inf \Delta_{\mathbb{H}^n}^2 d(0, \cdot)}{16}.$$

En particulier, les solutions d’énergie nulle explosent en temps fini, ce qui contraste avec le cas euclidien, où nous avons des solutions globales d’énergie nulle, comme par exemple $e^{it}Q$.

Une explication de ce phénomène est justement le fait que nous sommes en courbure négative et qu'il y a "plus d'espace". Ce fait permet une meilleure dispersion, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, mais permet aussi dans les cas focalisants une concentration plus systématique. Enfin, l'énergie de l'état fondamental $Q_{\mathbb{H}}$ sur l'espace hyperbolique est strictement positive et sa masse est strictement plus petite que $\|Q\|_{L^2}^2$. Il semble donc, comme dans le cas d'un domaine, que les profils d'explosion doivent être cherchés autour de Q plutôt qu'à partir de $Q_{\mathbb{H}}$. De plus, la transformation pseudo-conforme n'a pas vraiment d'équivalent. En dimension $n = 3$ seulement, dans le cas radial, nous avons trouvé explicitement la transformation analogue,

$$T(u)(t, r) = e^{i\frac{t}{2}} e^{i\frac{r}{2t}} \frac{\sinh \frac{r}{t}}{\sinh r} \frac{e^{i\frac{r^2}{2t}}}{\sqrt{t}} \bar{u} \left(\frac{1}{t}, \frac{r}{t} \right),$$

qui préserve l'équation linéaire sur \mathbb{H}^3 , mais qui par contre ne préserve pas l'équation non-linéaire [13].

La masse critique pour l'explosion sur l'espace hyperbolique reste donc inconnue, et nous ne disposons pas d'exemple de profil d'explosion.

Enfin, rappelons que dans le cas de la sphère, un critère de type Glassey a été donné par L. Ma et L. Zhao pour des solutions radiales à symétrie par rapport à l'équateur [112]. La preuve repose sur la construction d'un poids qui annule le bilaplacien dans les calculs de viriel. Remarquons aussi que ce même type de poids pour l'espace hyperbolique donne des résultats plus faibles que ceux du Théorème 12.

3.3 Explosion de masse critique en géométries non plates

En ce qui concerne les profils d'explosions pour la non-linéarité puissance critique $\frac{4}{n} + 1$, deux types de résultats sont connus en dehors du cadre euclidien. N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov ont construit dans [35] des solutions de masse critique sur un domaine, qui explosent en temps fini, similaires à celles, explicites, de \mathbb{R}^n . La preuve repose sur un point fixe autour de la troncature dans le domaine d'une des solutions explosive de masse critique de l'équation sur \mathbb{R}^n (voir aussi T. Ogawa et Y. Tsutsumi [122]). Elle reste valable pour trouver des solutions explosant en un point d'une variété différentielle autour duquel la métrique est plate. Le deuxième type de construction concerne les explosions en log log, régime dans lequel les arguments perturbatifs se prêtent mieux (voir F. Planchon et P. Raphaël [130] pour le cas d'un domaine, et N. Burq, P. Gérard et P. Raphaël pour celui d'une variété différentielle générale [34]).

Dans un travail en préparation avec R. Carles et T. Duyckaerts, on construit des solutions explosant en $1/t$, avec un profil relié à Q , sur des surfaces assez plates au point d'explosion [12]. On reprend le modèle des variétés de révolution introduites dans §2.3, et l'approche utilisée pour trouver les propriétés dispersives. On se ramène alors à chercher des solutions explosant en zéro pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{R}^2 avec un potentiel et une nonlinéarité de type puissance multipliée par un coefficient dépendant de l'espace,

$$i\partial_t v + \Delta_{\mathbb{R}^n} v - V(r)v + K(r)|v|^2 v = 0,$$

avec

$$K(r) = \left(\frac{r}{\phi(r)} \right)^2.$$

Après transformation pseudo-conforme, nous cherchons des solutions globales en temps, autour du profil $e^{it}Q$. Dans la preuve de N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov, le terme linéaire est considéré comme terme source, et il est contrôlé dans des espaces de fonctions décroissant de manière exponentielle en temps. Ceci n'est pas envisageable dans notre cas de courbure non-plate, car nous avons des termes force de croissance seulement polynomiale. On s'inspire donc de la preuve de J. Bourgain et W. Wang [31] de l'existence des solutions de masse sur-critique explosant en $1/t$ sur \mathbb{R}^2 . Le principe de cette preuve est de regrouper justement le terme linéaire avec le laplacien et de faire appel aux propriétés de l'équation linéarisée autour de $e^{it}Q$ décrites par M.I. Weinstein dans [163]. Nous construisons des solutions explosant en $1/t$, de masse $\|Q\|_{L^2}$, lors du comportement en zéro, le point d'explosion,

$$K(r) - 1 \approx r^\alpha,$$

avec α assez grand. Cette condition implique que la métrique de la surface est assez plate au point d'explosion.

Il est maintenant intéressant de savoir quel est le seuil critique α pour qu'il existe des solutions explosives de masse $\|Q\|_{L^2}$. D'autre part, le cas de l'équation de Schrödinger avec une nonlinéarité de type puissance avec un coefficient dépendant de l'espace a été traitée par F. Merle dans [115]. Notamment, un résultat de non-explosion en masse $\|Q\|_{L^2}$ y est obtenu, pour $\alpha < 2$. Enfin, remarquons que le cas $\alpha = 2$, qui correspond à l'espace hyperbolique $\phi(r) = \sinh r$, reste encore ouvert. De plus, à la sphère correspond aussi le degré $\alpha = 2$, et malgré le fait qu'on est dans un cas compact très explicite, on ne dispose toujours pas d'un profil d'explosion de masse $\|Q\|_{L^2}$.

Chapitre 4

Dynamique des tourbillons filamentaires dans un fluide

4.1 Motivation et approche du problème

Les recherches présentées dans ce chapitre sont en collaboration avec Luis Vega. Elles sont motivées par la mécanique des fluides, et plus précisément par les tourbillons, situations fréquentes et observables (voir par exemple le livre de P.G. Saffman [136]). Nous utilisons la modélisation LIA pour les vortex filamenteux dans un fluide 3-dimensionnel, non visqueux et incompressible, qui mène à l'étude du flot binormal, flot géométrique de courbes de l'espace. Nous allons nous intéresser à la stabilité des solutions auto-similaires de ce flot de courbes. Ces solutions auto-similaires ont la particularité d'engendrer un coin en temps fini. Elles apparaissent également dans des situations complètement différentes.

4.1.1 La modélisation LIA

L'évolution d'une courbe $\chi(t, x)$ de \mathbb{R}^3 , paramétrée par la longueur d'arc x , par le flot géométrique binormal

$$\chi_t = \chi_x \wedge \chi_{xx}, \quad (4.1)$$

a été proposée par L. da Rios en 1906 pour approximer la dynamique d'un vortex filamentaire dans un fluide 3-dimensionnel, non visqueux et incompressible [58]. Ce modèle est obtenu à l'aide de la loi de Biot-Savart en évaluant la vitesse du fluide aux points près du filament. Seuls les effets locaux sont pris en compte, et le développement de Taylor obtenu ainsi autour d'un point du filament nous donne, en passant à la limite, l'équation (4.1).

Nous allons donner une esquisse de cette approximation. En présence d'un tourbillon filamentaire localisé sur une courbe χ , la vitesse du fluide en un point de l'espace $P(x_1, x_2, x_3)$ est donnée par la loi de Biot-Savart,

$$v(P) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(P - \chi(x)) \wedge \chi_x(x)}{|P - \chi(x)|^3} dx.$$

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\chi(0) = (0, 0, 0)$ et $\chi_x(0) = (0, 0, 1)$. En prenant en compte seulement les contributions locales $x \in [-L, L]$, et en faisant un développement de Taylor de χ autour de $x = 0$, la vitesse du fluide près de $\chi(0)$ peut être

approximée par

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{P \wedge \chi_x(0)}{|P - \chi(x)|^3} dx - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{P \wedge x \chi_{xx}(0)}{|P - \chi(x)|^3} dx + \frac{\Gamma}{8\pi} \int_{-L}^L \frac{x^2 \chi_x(0) \wedge \chi_{xx}(0)}{|P - \chi(x)|^3} dx.$$

Pour simplifier la présentation, nous supposons que $x_3 = 0$, et nous notons $\epsilon = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Le deuxième terme est nul et les deux autres sont

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(-x_2, x_1, 0)}{\epsilon^2} \int_{-L/\epsilon}^{L/\epsilon} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma}{8\pi} \chi_x(0) \wedge \chi_{xx}(0) \int_{-L/\epsilon}^{L/\epsilon} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quand P tend vers $\chi(0)$, le premier terme diverge de la même manière que la vitesse d'un fluide en présence d'un tourbillon rectiligne. Dans ces cas, le tourbillon reste au cours du temps localisé sur la même droite. On considère en conséquence que ce terme est négligeable dans la dynamique du tourbillon. Le deuxième terme diverge de façon logarithmique, et c'est la raison pour laquelle la localisation est faite. En faisant un changement d'échelle, le mouvement du tourbillon à $x = 0$ est donné par (4.1).

Nous rappelons que la tangente T , la normale n et la binormale b d'une courbe de \mathbb{R}^3 paramétrée par la longueur d'arc forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , qui vérifie le système de Frenet

$$\begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix},$$

où c représente la courbure et τ la torsion de la courbe (voir le merveilleux livre de M. Spivak [142]). Il s'ensuit que (4.1) peut être réécrit

$$\chi_t = cb,$$

ce qui explique aussi la dénomination de flot binormal : la courbe se déplace en direction binormale, avec une vitesse proportionnelle à la courbure.

Malgré l'enthousiasme de la communauté mathématique de l'époque, à commencer par L. Civita, le directeur de thèse de L. da Rios, cette modélisation est tombée dans l'oubli, et ce n'est que cinquante ans plus tard qu'elle fut réécrite par R.J. Arms et F.R. Hama [5]. Aujourd'hui elle est connue sous le nom de Localized Induction Approximation (LIA). Du point de vue physique, elle a une validité limitée pour la mécanique des fluides, car elle n'exclut pas des évolutions de courbes qui ne peuvent pas correspondre à des dynamiques de tourbillon. Cependant, elle permet d'étudier des familles de courbes proches de tourbillons mis en évidence expérimentalement, et de plus c'est une équation appropriée aux calculs numériques. Nous renvoyons le lecteur aux livres de G.K. Batchelor [19] et de P.G. Saffman [136] pour une présentation détaillée du modèle, et aux textes de revue [131], [132] de R.L. Ricca sur l'œuvre et la vie de L. da Rios.

En commençant par le travail de K.W. Schwartz [139], la modélisation LIA a été aussi utilisée comme approximation de la dynamique d'un tourbillon dans les super-fluides. Une liste de références sur cette utilisation peut être trouvée par exemple dans les articles récents de T. Lipniacki [110], [111].

4.1.2 La transformation de Hasimoto

Considérons maintenant la tangente d'une courbe solution du flot binormal, qui est solution de

$$T_t = T \wedge T_{xx}.$$

Comme la courbe est paramétrée par la longueur d'arc, $T(t, x) \in \mathbb{S}^2$, et nous retrouvons les "Schrödinger maps" sur la sphère. Cette équation est également reliée à celle du ferromagnétisme.

En utilisant de plus les équations des dérivées en temps de la normale et de la binormale, on obtient, lorsque la courbure ne s'annule pas,

$$\begin{cases} c_t = -2c_x \tau - c \tau_x, \\ \tau_t = \left(\frac{c_{xx} - c \tau^2}{c} \right)_x + c_x c. \end{cases}$$

Ce système, connu aussi sous le nom d'équations intrinsèques, a été trouvé par L. da Rios en 1906 et redécouvert par R. Betchov en 1956 [20].

Finalement, H. Hasimoto [87] a mis en évidence en 1972 le lien de ce système avec l'équation de Schrödinger, par la transformation qui porte son nom,

$$u(t, x) = c(t, x) \exp \left\{ i \int_0^x \tau(t, x') dx' \right\}.$$

Cette nouvelle fonction u , appelée fonction filament, vérifie si la courbure ne s'annule pas,

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{2} (|u|^2 - A(t)) u = 0, \quad (4.2)$$

où

$$A(t) = \left(2 \frac{c_{xx} - c \tau^2}{c} + c^2 \right) (t, 0). \quad (4.3)$$

Réciproquement, soit $A(t)$ une fonction dépendant du temps, et u une solution assez régulière de (4.2), qui ne s'annule pas. Si on écrit

$$u(t, x) = c(t, x) e^{i\phi(t, x)},$$

en posant $\tau(t, x) = \phi_x(t, x)$, nous avons

$$u(t, x) = c(t, x) e^{i \int_0^x \tau(t, s) ds + \phi(t, 0)}.$$

Nous obtenons alors une fonction filament

$$\tilde{u}(t, x) = c(t, x) e^{i \int_0^x \tau(t, s) ds},$$

satisfaisant (4.2) avec $A(t)$ remplacé par $A(t) + \phi_t(t, 0)$. Les fonctions réelles c et τ vérifient alors les équations intrinsèques et l'identité (4.3) avec $A(t)$ remplacé par $A(t) + \phi_t(t, 0)$.

Un exemple très simple pour voir le lien entre l'équation (4.2) et le flot binormal est de considérer (4.2) avec le coefficient $A(t) = 1$, et la solution $u = 1$. Il s'ensuit que la courbure est constante égale à 1 et la torsion est constante égale à 0. Les vortex correspondants sont des

cercles se propageant en direction binormale. Les transformations galiléennes de la solution constante correspondent aux tourbillons hélicoïdaux.

Enfin, nous allons faire une digression sur la transformée de Madelung. Le point de départ de cette dernière est l'équation de Gross-Pitaevskii,

$$iu_t + \Delta u - (|u|^2 - 1)u = 0.$$

Pour une solution ne s'annulant pas, en définissant (v, ρ) par

$$u(t, x) = \sqrt{\rho(t, x)} e^{i\phi(t, x)}, \quad v = 2\nabla\phi,$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ v_t + v\nabla v + 2\nabla\rho = 2\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right). \end{cases}$$

Cette équation, de type Euler compressible avec une pression supplémentaire, dite pression quantique, apparaît comme modélisation en dynamique des super-fluides et en supra-conductivité. La dynamique des vortex des super-fluides a fait l'objet ces dernières décennies un grand intérêt de la part des physiciens et des mathématiciens. Certains vortex des super-fluides peuvent être vus à travers les propriétés de degré des solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii. En particulier, une étude approfondie des solutions de type ondes solitaires a été faite (voir par exemple les articles de C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [94] [95], F. Bethuel et J.-C. Saut [23], F. Bethuel, G. Orlandi et D. Smets [22], P. Gravejat [80] [81], D. Chiron [51], A. Farina [66], F. Bethuel, P. Gravejat et J.-C. Saut [21]). Les solutions générales de l'équation de Gross-Pitaevskii sont maintenant également mieux comprises (voir par exemple les articles de P.E. Zhidkov [168], F. Bethuel et J.-C. Saut [23], C. Gallo [67], O. Goubet [79], P. Gérard [69], S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [83], [84]).

Nous pouvons voir la transformation de Hasimoto comme une inverse de la transformation de Madelung, par l'identification $\rho = c^2$, $v = 2\tau$. Pour une solution u de Gross-Pitaevskii ne s'annulant pas, les fonctions (c, τ) définies ainsi vérifient en dimension 1 le système de type équations intrinsèques

$$\begin{cases} c_t = -2c_x \tau - c \tau_x, \\ \tau_t = \left(\frac{c_{xx} - c\tau^2}{c}\right)_x - 2c_x c. \end{cases}$$

4.1.3 Les courbes auto-similaires

Les solutions auto-similaires du flot binormal apparaissent d'abord dans des travaux sur la dynamique des tourbillons en superfluides (K.W. Schwartz [139], T. Lipniacki [110], [111]), en ferromagnétisme (M. Lakshmanan et M. Daniel [106], M. Lakshmanan, T.W. Ruijgrok et C.J. Thompson [107], Buttke [42]), et dans certains modèles en médecine (C.S. Peskin et M. McQueen [125]). Leur étude mathématique n'a été précisée que récemment.

Comme $\lambda^{-1}\chi(\lambda^2 t, \lambda x)$ est le seul changement d'échelle qui préserve la longueur d'arc, les solutions auto-similaires sont cherchées sous la forme $\chi(t, x) = \sqrt{t}G(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Des travaux [106], [107] et [42] il s'ensuit que les solutions auto-similaires forment une famille à un paramètre réel positif a , dont la courbure et la torsion valent

$$(c_a, \tau_a)(t, x) = \left(\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{x}{2t}\right).$$

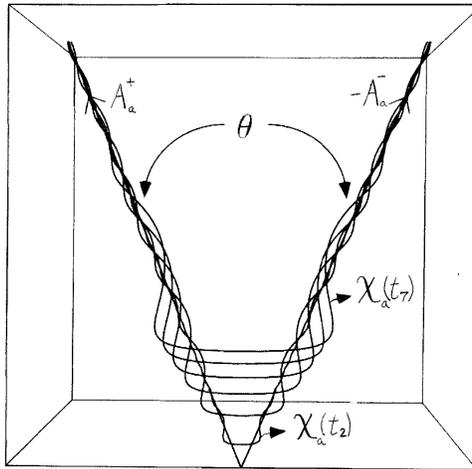
S. Gutierrez, J. Rivas et L. Vega ont intégré rigoureusement les courbes et ont décrit leur comportement [85]. Entre autres, ils ont démontré qu'étant donné a un nombre réel strictement positif, il existe χ_a solution du flot binormal telle que

$$|\chi_a(t, x) - xA_a^+ \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) - xA_a^- \mathbb{I}_{(-\infty, 0]}(x)| \leq 2a\sqrt{t},$$

où $A_a^\pm \in \mathbb{S}^2$ sont deux vecteurs unitaires distincts et non-opposés, tels que l'angle θ formé par A_a^+ et $-A_a^-$ est déterminé par la relation $\sin \frac{\theta}{2} = e^{-\frac{a^2}{2}}$. En particulier,

$$\chi_a(0, x) = xA_a^+ \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) + xA_a^- \mathbb{I}_{(-\infty, 0]}(x),$$

ce qui traduit le fait que la courbe $\chi_a(t, x)$, régulière pour tout $t > 0$, présente un coin au temps zéro. Dans la figure suivante, l'allure des courbes $\chi_a(t)$ est présentée, pour des temps $t_7 > \dots > t_2 > t_1 = 0$. Plus le temps t s'approche de zéro (le flot binormal est réversible), plus la courbe $\chi_a(t)$ s'enroule autour des deux demi-droites de direction A_a^+ et $-A_a^-$, qui représentent $\chi_a(0)$.



Par ailleurs, une dynamique de tourbillon de fluide de type auto-similaire a été mise en évidence par les physiciens par l'expérience des ailes delta, dont voici une image prise par le groupement de recherches aérospatiales ONERA.



En pensant le vecteur tangent T_a comme la direction du vecteur de vorticité $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$, la condition de P. Constantin, C. Fefferman et A.J. Majda [55] pour avoir la formation d’une singularité pour Euler dans un intervalle de temps $(0, t_0)$ devient

$$\int_0^{t_0} \sup_x |\partial_x T_a(x, t)|^2 dt = \int_0^{t_0} \sup_x |c_a(x, t)|^2 dt = \infty.$$

Si dans le flot binormal le produit $u \wedge v$ est remplacé par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u \wedge v,$$

la nouveau flot correspond aux “Schrödinger maps” sur l’espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , et l’équation (4.2) est défocalisante dans ce cas. Ses solutions auto-similaires ont été décrites récemment dans [61] par F. de la Hoz, dans le même esprit que celles du flot binormal dans [85].

Rappelons aussi que S. Gutierrez et L. Vega ont montré que le flot binormal est mal posé pour les données initiales $\chi_a(0, x)$. Plus précisément, ils montrent dans [86] qu’à part la solution $\chi_a(t, x)$, régulière pour tout $t > 0$, il existe au moins une autre solution, singulière à $x = 0$ pour tout $t > 0$. Dans le même article, ils décrivent aussi une autre famille de courbes, solution du flot binormal, formant une singularité en temps fini. Ces courbes sont de type auto-similaire fois une phase logarithmique en temps. Ce problème est en lien avec l’équation de Schrödinger cubique avec donnée initiale la distribution valeur principale.

Enfin, remarquons que la fonction filament des solutions auto-similaires

$$u_a(t, x) = a \frac{e^{i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

est solution de l’équation de type Gross-Pitaevskii

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{2} \left(|u|^2 - \frac{a^2}{t} \right) u = 0.$$

La formation du coin pour le flot de courbes χ_a correspond à la limite $a\delta_{x=0}$ de u_a quand le temps tend vers zéro.

Nous allons étudier la stabilité des solutions χ_a , dans le sens de savoir si une perturbation régulière, solution du flot binormal, va encore présenter une singularité à temps 0. Dans ce but nous allons d'abord étudier les perturbations de la fonction filament u_a . Une fois que nous aurons des informations satisfaisantes sur le comportement de ces perturbations, nous allons définir des fonctions courbure et torsion, et traduire dessus ces informations. Ensuite nous allons construire des courbes, solutions du flot binormal, qui ont ces courbures et torsions. Finalement nous allons montrer que ces nouvelles courbes sont proches de celles auto-similaires, et en particulier elles engendrent aussi une singularité à temps 0.

4.2 Le problème de Cauchy pour SNL avec donnée initiale de type Dirac

En vue de comprendre l'équation précédente, nous avons considéré dans [16] l'équation

$$iu_t + \partial_{xx}u \pm |u|^\alpha u = 0, \quad (4.4)$$

avec donnée initiale de type masse de Dirac.

Nous allons d'abord rappeler ce qui est connu sur la régularité de la donnée initiale nécessaire pour que l'équation cubique soit bien posée. Dans l'espace de Sobolev H^s avec $s \geq 0$ le problème est bien posé (T. Cazenave et F. Weissler [49]). Pour des s négatifs C. Kenig, G. Ponce et L. Vega ont montré dans [102] que le flot de l'équation focalisante n'est pas uniformément continu sur les bornés de H^s . A. Vargas et L. Vega ont ensuite proposé dans [158] une autre classe de fonctions, définie à l'aide de la transformation de Fourier, mais incluse dans L^2 , et pour laquelle l'équation reste bien posée. A. Grünrock a étendu dans [82] ce résultat, montrant le caractère bien posé pour des données initiales dont la transformation de Fourier est dans des espaces L^p avec p fini, ne contenant toujours pas la masse de Dirac. Enfin, si la donnée initiale est $a\delta_{x=0}$, alors C. Kenig, G. Ponce et L. Vega ont montré dans [102] qu'il n'existe pas de solution, ou qu'il y en a plusieurs, par l'argument suivant. En supposant l'existence d'une solution u unique, elle est invariante par transformation de Galilée,

$$u(t, x) = e^{-it\nu^2 + i\nu \cdot x} u(t, x - 2\nu t),$$

pour tout ν réel. Ceci implique, par étude de la dérivation en ν de cette identité,

$$u(t, x) = u_{a, \pm\alpha}(t, x) = u_a(t, x) e^{\pm i A_{a, \alpha}(t)},$$

avec

$$A_{a, \alpha}(t) = \begin{cases} \frac{|a|^\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2}} t^{1 - \frac{\alpha}{2}} & \text{si } \alpha \neq 2, \\ |a|^2 \log t & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

Pour $\alpha \geq 2$, $u_{a, \pm\alpha}$ n'admet pas de limite quand t tend vers zéro, ce qui conclut la preuve.

Une première question naturelle est de savoir si $u_{a, \pm\alpha}$ est une solution stable dans le cas $\alpha < 2$. En notant

$$\eta(t, x) = e^{\mp i A_{a, \alpha}(t)} (u - u_{a, \pm\alpha}),$$

et en utilisant le fait que u_a est une solution de l'équation linéaire, nous avons

$$\begin{cases} i\eta_t + \Delta\eta \pm (|\eta + u_a|^\alpha - |u_a|^\alpha)(\eta + u_a) = 0, \\ \eta(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Si $\alpha < 2$ alors le terme $|u_a|^\alpha$ est intégrable en $t = 0$, et nous pouvons faire un argument de point fixe. Nous obtenons alors la réponse positive suivante, valable aussi en dimensions supérieures, pour $\alpha < \frac{2}{n}$ (un résultat similaire est présenté dans [16] pour des espaces de Sobolev, plus technique à démontrer).

Théorème 13. [16] *Soit $\alpha < 2$ et $u_0 \in L^2$. Il existe un temps $T = T(a, \|u_0\|_2)$ et une solution unique u de l'équation (4.4) avec donnée initiale $u_0 + a\delta_{x=0}$, telle que*

$$u - u_{a,\pm\alpha} \in L^4([0, T], L^\infty) \cap C([0, T], L^2).$$

Un cas de perturbation peu régulières de $a\delta_0$ a été étudié par N. Kita. Dans [104] il décrit la solution issue de la somme de deux ou de trois masses de Dirac.

Enfin, nous allons faire une parallèle avec le problème similaire parabolique,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \pm |u|^\alpha u = 0, \\ u(0, x) = a\delta_{x=0}, \end{cases}$$

qui a été étudié intensément. F. Weissler a montré dans [165] que dans le cas focalisant, pour $\alpha \leq \frac{2}{n}$, il n'y a pas unicité de la solution. Dans le cas défocalisant, si seulement les solutions positives sont considérées, H. Brézis et A. Friedman ont prouvé dans [32] l'existence d'une solution unique pour $\alpha < \frac{2}{n}$, et la non-existence pour $\alpha \geq \frac{2}{n}$. Il y a donc pour l'équation de la chaleur une différence importante entre le cas focalisant et le cas défocalisant, même pour $\alpha < \frac{2}{n}$. Le Théorème 13 montre que ceci n'est pas le cas pour l'équation de Schrödinger.

La deuxième question naturelle est de savoir si u_a est une solution stable de l'équation cubique 1-d modifiée par changement de phase $e^{\pm ia^2 \log t}$. Les résultats obtenus sont présentés dans la sous-section suivante.

4.3 Étude sur la stabilité des courbes auto-similaires

4.3.1 Existence d'opérateurs d'onde

Dans le but d'étudier les perturbations du flot de courbes χ_a , nous allons d'abord considérer les perturbations en temps positifs de sa fonction filament,

$$u_a(t, x) = a \frac{e^{i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

et nous allons traiter plus généralement l'équation

$$iu_t + u_{xx} \pm \left(|u|^2 - \frac{a^2}{t} \right) u = 0$$

autour de la solution particulière u_a . Par transformation pseudo-conforme, ceci revient à étudier en grand temps les perturbations de la constante a de solutions de

$$iv_t + v_{xx} \pm \frac{1}{t} (|v|^2 - a^2) v = 0. \quad (4.5)$$

Notons que cette équation admet une énergie naturelle

$$E(t) = \frac{1}{2} \int |v_x(t)|^2 dx \mp \frac{1}{4t} \int (|v(t)|^2 - a^2)^2 dx.$$

qui obéit à la loi

$$\partial_t E(t) \mp \frac{1}{4t^2} \int (|v|^2 - a^2)^2 dx = 0.$$

Dans le cas défocalisant, ceci nous a permis d'obtenir dans [16] un bon contrôle en temps de la norme $\|v(t) - a\|_{L^2}$ et de déduire l'existence globale.

Comme les coefficients des termes d'ordre un décroissent en $\frac{1}{t}$, et que la perturbation est faite autour d'une fonction constante, on attend des similitudes avec les effets de longue portée de l'équation de Schrödinger 1-d cubique (T. Ozawa [123], R. Carles [43], N. Hayashi et P.I. Naumkin [89]) et avec la stabilité de la solution constante 1 de Gross-Pitaevskii 2-d (S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [83], [84]).

Nous allons chercher des opérateurs d'ondes pour la perturbation $w(t) = v(t) - a$, c'est-à-dire que nous allons chercher des solutions de

$$iw_t + w_{xx} \pm \frac{1}{t} (|w + a|^2 - a^2) (w + a) = 0,$$

qui se comportent en temps grand tel un $w_1(t, x)$ donné. Comme rappelé dans l'introduction, ceci revient à faire un point fixe, dans un espace bien choisi autour de w_1 , pour l'application

$$\begin{aligned} Aw = w_1 \mp i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(\frac{(|w + a|^2 - a^2)(w + a)}{\tau} - \frac{(|w_1 + a|^2 - a^2)(w_1 + a)}{\tau} \right) d\tau \\ \mp i \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(\frac{(|w_1 + a|^2 - a^2)(w_1 + a)}{\tau} - (i\partial_\tau + \partial_x^2)w_1 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Pour montrer que w se comporte comme une solution libre $e^{it\partial_x^2} u_+$, il faudrait contrôler les termes de Duhamel correspondant aux pires termes sources, les termes linéaires $\frac{a^2}{t} w_1$ et $\frac{a^2}{t} \bar{w}_1$. Ces termes de Duhamel s'écrivent

$$a^2 \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} e^{i\tau\partial_x^2} u_+ \frac{d\tau}{\tau}, \quad a^2 \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} e^{-i\tau\partial_x^2} \bar{u}_+ \frac{d\tau}{\tau}.$$

Nous remarquons d'abord que la première intégrale n'est pas contrôlable. Pour éliminer ce terme, nous allons chercher donc w proche de l'ansatz longue portée

$$w_1(t, x) = e^{\pm ia^2 \log t} e^{it\partial_x^2} u_+(x).$$

En utilisant les inégalités de Strichartz inhomogènes nous arrivons à contrôler le terme linéaire restant

$$\begin{aligned} a^2 \left\| \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(e^{-i\tau\partial_x^2} \frac{\bar{u}_+}{\tau^{1\pm ia^2}} \right) d\tau \right\|_{L^2} &= a^2 \left\| \int_t^\infty e^{-i2\tau\partial_x^2} \left(\frac{\bar{u}_+}{\tau^{1\pm ia^2}} \right) d\tau \right\|_{L^2} \\ &\leq Ca^2 \left\| \frac{\bar{u}_+}{\tau} \right\|_{L^{p'}((t,\infty), L^{q'})} = Ca^2 \|u_+\|_{L^q} \left\| \frac{1}{\tau} \right\|_{L^{p'}(t,\infty)} = Ca^2 \|u_+\|_{L^{q'}} \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Les couples 1-admissibles (p, q) sont compris entre $(\infty, 2)$ et $(4, \infty)$, donc si $u_+ \in L^1 \cap L^2$ la meilleure décroissance que nous pouvons obtenir de cette façon est $t^{-\frac{1}{4}}$. Notons

$$v_1(t, x) = a + w_1(t, x).$$

Nous obtenons notre premier résultat, dans des espaces mixtes $L^p L^q$.

Théorème 14. [15] Soit $t_0 > 0$. Il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a < a_0$, et pour tout u_+ petit dans $L^1 \cap L^2$ par rapport à a_0 et à t_0 , l'équation (4.5) a une unique solution

$$v - v_1 \in \mathcal{C}([t_0, \infty), L^2(\mathbb{R})) \cap L^4([t_0, \infty), L^\infty(\mathbb{R})),$$

satisfaisant, quand t tend vers l'infini,

$$\|v(t) - v_1(t)\|_{L^2} + \|v - v_1\|_{L^4((t, \infty), L^\infty)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{4}}).$$

Cependant la décroissance en $t^{-\frac{1}{4}}$, optimale pour les méthodes utilisées dans le cadre d'espaces mixtes, ne suffit pas pour construire le flot binormal. Nous allons mieux exploiter les oscillations du terme linéaire restant, en utilisant la transformée de Fourier et en imposant plus de conditions sur la donnée u_+ . En écrivant

$$\int_t^\infty e^{i(t-2\tau)\partial_x^2} \left(e^{-i\tau\partial_x^2} \frac{\overline{u_+}}{\tau^{1\pm ia^2}} \right) d\tau = \int_t^\infty \int \frac{e^{-i(t-2\tau)\xi^2}}{\tau^{1\pm ia^2}} e^{ix\xi} \widehat{u_+}(-\xi) d\xi d\tau,$$

et en faisant une intégration par parties en τ nous avons

$$= \int \frac{e^{it\xi^2}}{t^{1\pm ia^2}} e^{ix\xi} \frac{\widehat{u_+}(-\xi)}{2i\xi^2} d\xi + (1 \pm ia^2) \int_t^\infty \int \frac{e^{-i(t-2\tau)\xi^2}}{\tau^{2\pm ia^2}} e^{ix\xi} \frac{\widehat{u_+}(-\xi)}{2i\xi^2} d\xi d\tau.$$

Par Plancherel nous obtenons le contrôle

$$\left\| a^2 \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(e^{-i\tau\partial_x^2} \frac{\overline{u_+}}{\tau^{1\pm ia^2}} \right) d\tau \right\|_{L^2} \lesssim \frac{a^2}{t} \left\| \frac{\widehat{u_+}(-\xi)}{\xi^2} \right\|_{L^2} = \frac{a^2}{t} \|u_+\|_{\dot{H}^{-2}}.$$

Les dérivées ∇^k de ce terme ont la même décroissance en temps $1/t$, mais avec une constante dépendant de la norme \dot{H}^{-2+k} de u_+ . Nous obtenons un nouveau résultat, avec des meilleurs taux de décroissance.

Théorème 15. [15] Soit $t_0 > 0$ et $s \in \mathbb{N}^*$. Il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a < a_0$, et pour tout u_+ petit dans $\dot{H}^{-2} \cap H^s \cap W^{s,1}$ par rapport à a_0 et à t_0 , l'équation (4.5) a une unique solution

$$v - v_1 \in \mathcal{C}([t_0, \infty), H^s(\mathbb{R})),$$

satisfaisant, quand t tend vers l'infini, pour tout entier $0 < k \leq s$,

$$\|(v - v_1)(t)\|_{L^2} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}), \quad \|\nabla^k(v - v_1)(t)\|_{L^2} = \mathcal{O}(t^{-1}). \quad (4.6)$$

La présence de deux taux de décroissance différents vient maintenant des termes quadratiques $\frac{2a}{t}|w_1|^2$ et $\frac{a}{t}w_1^2$. Le moins oscillant est le premier, qui donne le taux $t^{-\frac{1}{2}}$, mais ses dérivées s'estiment mieux. Nous allons esquisser ici la façon dont nous traitons le terme de Duhamel du pire des deux termes quadratiques, $\frac{|w_1|^2}{t}$. Nous allons utiliser à nouveau les oscillations en Fourier,

$$\begin{aligned} \nabla^k \int_t^\infty e^{i(t-\tau)\partial_x^2} \left(\frac{|e^{i\tau\Delta} u_+(\tau)|^2}{\tau} \right) d\tau &= \int_t^\infty \int |\xi|^k \frac{e^{-i(t-\tau)\xi^2}}{\tau} e^{ix\xi} \widehat{e^{i\tau\partial_x^2} u_+} * \widehat{e^{-i\tau\partial_x^2} u_+} d\xi d\tau \\ &= \int_t^\infty \int \int \frac{e^{-it\xi^2 + 2i\tau\xi(\eta-\xi)}}{\tau} |\xi|^k e^{ix\xi} \widehat{u_+}(\eta) \widehat{u_+}(\eta-\xi) d\eta d\xi d\tau, \end{aligned}$$

et une intégration par parties en τ ,

$$\begin{aligned} &= \int \int \frac{e^{-it(\xi^2+2\xi(\eta-\xi))}}{t} |\xi|^k e^{ix\xi} \frac{\widehat{u}_+(\eta)\widehat{u}_+(\eta-\xi)}{2i\xi(\eta-\xi)} d\eta d\xi \\ &+ \int_t^\infty \int \int \frac{e^{-it\xi^2-2i\tau\xi(\eta-\xi)}}{\tau^2} |\xi|^k e^{ix\xi} \frac{\widehat{u}_+(\eta)\widehat{u}_+(\eta-\xi)}{2i\xi(\eta-\xi)} d\eta d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Nous controlons donc ce terme de Duhamel quadratique dans \dot{H}^1 par

$$\frac{Ca}{t} \left\| \widehat{u}_+ \star \frac{\widehat{u}_+}{\cdot} \right\|_{L^2} = \frac{Ca}{t} \left\| u_+ \mathcal{F} \left(\frac{\widehat{u}_+}{\cdot} \right) \right\|_{L^2} \leq \frac{Ca}{t} \|u_+\|_{H^1} \|u_+\|_{\dot{H}^{-1}}.$$

Nous remarquons que l'argument peut être répété pour \dot{H}^k , avec $k > 1$, mais pas avec $k = 0$.

Au niveau de l'équation initiale avant transformation pseudo-conforme, nous obtenons le fait que $u(t)$ est proche de

$$u_1(t, x) = u_a + e^{\pm ia^2 \log t} \widehat{u}_+ \left(-\frac{x}{2} \right).$$

La condition $u_+ \in \dot{H}^{-2}$ se traduit sur \widehat{u}_+ par une condition d'annulation à l'origine, ce qui pourrait être relié au résultat d'explosion de J. Bourgain et W. Wang [31]. Nous remarquons l'absence de limite dans L^2 pour $u(t) - u_a$ au temps zéro. Cependant cela n'exclut pas la possibilité de construire un flot binormal ayant une trace au temps zéro. Ceci est possible car la courbure et la torsion définies à partir de u correspondent aux dérivées secondes de la courbe.

4.3.2 Description des nouvelles courbes

Dans cette dernière sous-section nous allons esquisser comment, à partir du Théorème 15, nous avons construit un flot de courbes χ , solution du flot binormal, et obtenu des informations sur sa limite quand t tend vers zéro. Nous allons montrer que la courbe $\chi(t)$ reste proche de $\chi_a(t)$, et obtenir pour ces perturbations la persistance de formation de singularité à temps zéro.

Soit donc v une solution du Théorème 15 avec $s = 3$. En vue de la transformée de Hasimoto et de la transformation pseudo-conforme, nous avons les expressions de la courbure

$$c(t, x) = |u(t, x)| = \frac{1}{\sqrt{t}} \left| v \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right) \right|,$$

et de la torsion

$$\tau(t, x) = \Im \frac{u_x(t, x)}{u(t, x)} = \Im \frac{\frac{ix}{2t} \bar{v} \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right) + \partial_x \bar{v} \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right)}{\bar{v} \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right)}.$$

Comme $v \in H^3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R})$, la courbure et la torsion sont suffisamment régulières. Par définition,

$$v(t, x) = a + e^{\pm ia^2 \log t} e^{it\partial_x^2} u_+(x) + (v - v_1)(t, x).$$

La décroissance de $v - v_1$ du Théorème 15 combinée avec la formule explicite de l'évolution libre de Schrödinger permettent d'obtenir que (c, τ) est proche de (c_a, τ_a) , avec des taux de décroissance explicites, et des constantes dépendant de u_+ .

À partir de (c, τ) nous allons construire le flot binormal comme suit. À partir d'une donnée initiale à temps $\tilde{t}_0 = 1/t_0$, à préciser plus tard, nous définissons $(T, n, b)(t, 0)$ en imposant que ses dérivées en temps satisfassent le même système que la tangente, normale et binormale d'un flot binormal vérifieraient. Après, à partir de $(T, n, b)(t, 0)$ nous construisons $(T, n, b)(t, x)$ en intégrant le système de Frenet à t fixé. Nous imposons donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} (t, x) &= \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} (\tilde{t}_0, 0) - \int_t^{\tilde{t}_0} \begin{pmatrix} 0 & -c\tau & c_x \\ c\tau & 0 & \left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) \\ -c_x & -\left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} (t', 0) dt' \\ &+ \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} (t, s) ds. \end{aligned}$$

Ce faisant, T va bien vérifier

$$T_t = T \wedge T_{xx},$$

équation de la tangente d'un flot binormal.

Une fois T construite, pour une donnée $\chi(\tilde{t}_0, 0)$, nous définissons

$$\chi(t, x) = \chi(\tilde{t}_0, 0) - \int_t^{\tilde{t}_0} (cb)(t', 0) dt' + \int_0^x T(t, s) ds.$$

En utilisant le système de Frenet,

$$T_t = T \wedge T_{xx} = T \wedge (cn)_x = T \wedge (c_x n + c\tau b) = -c\tau n + c_x b,$$

et il s'ensuit que χ vérifie l'équation du flot binormal.

Finalement, $\chi(t, x)$ est obtenue de cette façon pour les temps tels que (c, τ) soient assez réguliers, c'est-à-dire $\tilde{t}_0 > t > 0$. Sachant que la courbure c est proche de $c_a = \frac{a}{\sqrt{t}}$, nous avons

$$|\chi(t_1, x) - \chi(t_2, x)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} c(t, x) b(t, x) dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{C_a}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{t_1, t_2 \rightarrow 0} 0.$$

Ceci implique l'existence d'une limite $\chi_0(x)$ à $t = 0$, et nous obtenons de façon similaire pour tout $x \in (-\infty, \infty)$,

$$|\chi(t, x) - \chi_0(x)| \leq C_a \sqrt{t}.$$

Maintenant, pour montrer que $\chi(0, x)$ est proche de $\chi_a(0, x)$, nous montrons d'abord que la tangente $T(t, x)$ est proche de $T_a(t, x)$, de la façon suivante. Dans un premier temps, nous montrons que $T(t, 0)$ est proche de $T_a(t, 0)$, puis que $T(t, x)$ est proche de $T_a(t, x)$. Pour la deuxième étape, nous allons avoir besoin que tout $(T, n, b)(t, 0)$ soit proche de $(T_a, n_a, b_a)(t, 0)$. Dans la suite nous allons juste esquisser les estimations aux points $(t, 0)$, car c'est l'étape la moins technique tout en étant un point clé de la démonstration.

D'après la définition ci-dessus de (T, n, b) ,

$$\begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}_t (t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -c\tau & c_x \\ c\tau & 0 & \left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) \\ -c_x & -\left(\frac{c_{xx}-c\tau^2}{c}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} (t, 0).$$

Avec les notations de la sous-section §4.1.2, $u(t, 0) = c(t, 0)e^{i\phi(t, 0)}$, et nous utilisons la relation (4.3), qui nous donne l'information supplémentaire en $x = 0$

$$\frac{c_{xx} - c\tau^2}{c} = \frac{c_a^2 - c^2}{2} + \frac{\phi_t}{2}.$$

Nous faisons le changement de fonctions $\tilde{n} + i\tilde{b} = e^{i\frac{\phi}{2}}(n + ib)$, et nous imposons comme condition initiale $(T, \tilde{n}, \tilde{b})(\tilde{t}_0, 0) = (T_a, n_a, b_a)(\tilde{t}_0, 0)$. Pour avoir $(T, \tilde{n}, \tilde{b})(t, 0)$ proche de $(T_a, n_a, b_a)(t, 0)$, il suffit alors de montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & |c\tau| & |c_x| \\ |c\tau| & 0 & \left|\frac{c_a^2 - c^2}{2}\right| \\ |c_x| & \left|\frac{c_a^2 - c^2}{2}\right| & 0 \end{pmatrix} (t, 0)$$

est intégrable en temps près de $t = 0$. Ceci est vrai, en vue du bon taux de décroissance obtenu pour $(c, \tau) - (c_a, \tau_a)$. Aussi, nous obtenons un bon taux de décroissance pour $|e^{i\frac{\phi}{2}} - 1|$, donc $(T, \tilde{n}, \tilde{b})(t, 0)$ reste proche de $(T, n, b)(t, 0)$. En conclusion, nous avons bien que $(T, n, b)(t, 0)$ reste proche de $(T_a, n_a, b_a)(t, 0)$.

Au final nous obtenons que pour tout $\epsilon > 0$, si u_+ est assez petit,

$$|(T - T_a)(t, x)| \leq \epsilon.$$

En particulier, pour $x > 0$,

$$\chi(t, x) - \chi(t, 0) = \int_0^x T(t, s) ds = A_a^+ x + \int_0^x (T - T_a)(t, s) ds + \int_0^x T_a(t, s) - A_a^+ ds.$$

Le troisième terme tend vers zéro quand t tend vers zéro, uniformément en x ([85]). En faisant tendre t vers zéro, nous obtenons l'information voulue

$$|\chi_0(x) - \chi_0(0) - xA_a^+| \leq \epsilon x.$$

Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 16. [15] Soient $\epsilon > 0$, $t_0 > 0$, $0 < a < a_0$, où a_0 est la constante du Théorème 15. Soit u_+ petit dans $\dot{H}^{-2} \cap H^3 \cap W^{3,1}$ avec $x^2 u_+$ petit dans H^1 par rapport à ϵ , a et t_0 , et soit v la solution correspondante du Théorème 15. Alors il existe $\chi(t, x)$ flot de courbes correspondant à $u = \mathcal{T}(v)$ via la transformation de Hasimoto, solution du flot binormal pour tout $1/t_0 > t > 0$, tel qu'il existe une unique courbe $\chi_0(x)$ vérifiant

$$|\chi(t, x) - \chi_0(x)| < Ca\sqrt{t}$$

uniformément en $x \in (-\infty, \infty)$.

De plus,

$$|\chi_0(x) - \chi_0(0) - xA_a^+ \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) - xA_a^- \mathbb{I}_{(-\infty, 0]}(x)| < \epsilon |x|,$$

où A_a^+ et A_a^- sont deux vecteurs distincts et non-opposés, tels que l'angle θ formé par A_a^+ et $-A_a^-$ est déterminé par la relation $\sin \frac{\theta}{2} = e^{-\frac{a^2}{2}}$.

Comme

$$\chi_a(0, x) = xA_a^+ \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) + xA_a^- \mathbb{I}_{(-\infty, 0]}(x),$$

nous déduisons que $\chi_0(x)$ se trouve dans le cône d'ouverture ϵ autour de $\chi_a(0, x)$. Nous obtenons donc toute une famille de courbes, solutions du flot binormal, proches de la famille de courbes auto-similaires. Ceci montre que l'apparition d'une singularité en temps fini de ces dernières n'est pas un phénomène isolé. Dans un travail en cours nous traitons la question plus délicate de la complétude asymptotique, qui mènerait à un résultat plus fort de stabilité de la formation du coin en temps fini.

Bibliographie

- [1] J.-P. Anker and L. Ji. Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6) :1035–1091, 1999.
- [2] J.-P. Anker and V. Pierfelice. Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces. *arXiv 0801.3523*.
- [3] R. Anton. Strichartz inequalities for Lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains. *Bull. Soc. Math. Fr.* to appear.
- [4] C. Antonini. Lower bounds for the L^2 minimal periodic blow-up solutions of critical nonlinear Schrödinger equation. *Differ. Integral Equ.*, 15(6) :749–768, 2002.
- [5] R.J. Arms and F.R. Hama. Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring. *Phys. Fluids*, page 553, 1965.
- [6] H. Bahouri, P. Gérard, and C.-J. Xu. Besov spaces and Strichartz estimates on the Heisenberg group. (Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg.). *J. Anal. Math.*, 82 :93–118, 2000.
- [7] V. Banica. Dispersion and Strichartz inequalities for Schrödinger equations with singular coefficients. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(4) :868–883, 2003.
- [8] V. Banica. On the nonlinear Schrödinger dynamics on \mathbb{S}^2 . *J. Math. Pures Appl.*, IX. Sr. 83(1) :77–98, 2004.
- [9] V Banica. Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(1) :139–170, 2004.
- [10] V. Banica. The nonlinear Schrödinger equation on hyperbolic space. *Commun. Partial Differ. Equations*, 32(10) :1643–1677, 2007.
- [11] V. Banica, R. Carles, and T. Duyckaerts. On scattering for NLS : from Euclidean to hyperbolic space. *arXiv 0801.2227*. soumis.
- [12] V. Banica, R. Carles, and T. Duyckaerts. Remarks on the blow-up for NLS on surfaces. en préparation.
- [13] V. Banica, R. Carles, and G. Staffilani. Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space. *Geom. Funct. Anal.*, 18(2) :367–399, 2008.
- [14] V. Banica and T. Duyckaerts. Weighted Strichartz estimates for radial Schrödinger equation on noncompact manifolds. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 4(4) :335–359, 2007.
- [15] V. Banica and L. Vega. On the stability of a singular vortex dynamics. *Comm. Math. Phys.* to appear.
- [16] V. Banica and L. Vega. On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 25(4) :697–711, 2008.

- [17] J.E. Barab. Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 25 :3270–3273, 1984.
- [18] J.A. Barceló, A. Ruiz, and L. Vega. Some dispersive estimates for Schrödinger equations with repulsive potentials. *J. Funct. Anal.*, 236(1) :1–24, 2006.
- [19] G.K. Batchelor. *An Introduction to the Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [20] R. Betchov. On the curvature and torsion of an isolated vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 22 :471–479, 1965.
- [21] F. Bethuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation II. *arXiv 0711.2408*.
- [22] F. Bethuel, G. Orlandi, and D. Smets. Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(1) :17–94, 2004.
- [23] F. Bethuel and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskij equation. I. 1999.
- [24] M. Blair, H. Smith, and C. Sogge. On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary. *arXiv math/0609455*.
- [25] J.-M. Bouclet. Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds. *arXiv 0711.3587*.
- [26] J.-M. Bouclet and N. Tzvekov. Strichartz estimates for long range perturbations. *Am. J. Math.*, 129(6) :1565–1609, 2007.
- [27] J.-M. Bouclet and N. Tzvetkov. On global Strichartz estimates for non trapping metrics. *J. Funct. Analysis*. to appear.
- [28] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I : Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2) :107–156, 1993.
- [29] J. Bourgain. *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, volume 46 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [30] J. Bourgain. Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :145–171, 1999.
- [31] J. Bourgain and W. Wang. Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.*, 25(1-2) :197–215, 1997.
- [32] H. Brézis and A. Friedman. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pures Appl., IX. Ser.*, 62 :73–97, 1983.
- [33] N. Burq. Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems. *Duke Math. J.*, 123(2) :403–427, 2004.
- [34] N. Burq, P. Gérard, and P. Raphaël. Blow-up solutions for the L^2 critical NLS on a manifold. in progress.
- [35] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Two singular dynamics of the nonlinear Schrödinger equation on a plane domain. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1) :1–19, 2003.
- [36] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d . *Math. Res. Lett.*, 9(2-3) :323–335, 2002.

- [37] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Am. J. Math.*, 126(3) :569–605, 2004.
- [38] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Invent. Math.*, 159(1) :187–223, 2005.
- [39] N. Burq, C. Guillarmou, and A. Hassel. Strichartz estimates without loss for systems with hyperbolic trapped set. in progress.
- [40] N. Burq and F. Planchon. Smoothing and dispersive estimates for 1D Schrödinger equations with BV coefficients and applications. *J. Funct. Anal.*, 236(1) :265–298, 2006.
- [41] N. Burq, F. Planchon, J.G. Stalker, and A.S. Tahvildar-Zadeh. Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with potentials of critical decay. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1665–1680, 2004.
- [42] T.F. Buttke. A numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation. *J. Comput. Phys.*, 76(2) :301–326, 1988.
- [43] R. Carles. Geometric optics and long range scattering for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Math. Phys.*, 220(1) :41–67, 2001.
- [44] R. Carles. Global existence results for nonlinear Schrödinger equations with quadratic potentials. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(2) :385–398, 2005.
- [45] R. Carles. Geometric optics and instability for semi-classical Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 183(3) :525–553, 2007.
- [46] R. Carles and I. Gallagher. Analyticity of the scattering operator for semilinear dispersive equations. *Commun. Math. Phys.* to appear.
- [47] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.
- [48] T. Cazenave and F.B. Weissler. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1 . *Manuscr. Math.*, 61(4) :477–494, 1988.
- [49] T. Cazenave and F.B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 14(10) :807–836, 1990.
- [50] T. Cazenave and F.B. Weissler. Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.*, 147(1) :75–100, 1992.
- [51] D. Chiron. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 58A(1-2) :175–204, 2004.
- [52] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Am. J. Math.*, 125(6) :1235–1293, 2003.
- [53] J. Colliander, J. Holmer, M. Visan, and X. Zhang. Global existence and scattering for rough solutions to generalized nonlinear Schrödinger equations on \mathbb{R} . *Commun. Pure Appl. Mathematics*, 7 :467–489, 2008.
- [54] J. Colliander, Keel M., G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness and scattering for the critical non-linear Schrödinger equation in \mathbf{R}^3 . *Annals of Mathematics*. to appear.

- [55] P. Constantin, C. Fefferman, and A.J. Majda. Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3 – D Euler equations. *Commun. Partial Differ. Equations*, 21(3-4) :559–571, 1996.
- [56] P. Constantin and J.-C. Saut. Local smoothing properties of Schrödinger equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 38(3) :791–810, 1989.
- [57] W. Craig, T. Kappeler, and W. Strauss. Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 48(8) :769–860, 1995.
- [58] L. da Rios. Sul moto d’un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. *Palermo Rend.*, 22 :117–135, 1906.
- [59] E.B. Davies. *Heat kernels and spectral theory*. Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge etc. : Cambridge University Press. ix, 197 p., 1989.
- [60] E.B. Davies and N. Mandouvalos. Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.*, 57(1) :182–208, 1988.
- [61] F. de la Hoz. Self-similar solutions for the 1D Schrödinger map on the hyperbolic plane. *Math. Z.*, 257(1) :61–80, 2007.
- [62] J. Dereziński and C. Gérard. *Scattering theory of classical and quantum N -particle systems*. Texts and Monographs in Physics. Berlin : Springer. xii,444 p., 1997.
- [63] S. Doi. Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger-type equations. *Commun. Partial Differ. Equations*, 21(1-2) :163–178, 1996.
- [64] T. Duyckaerts. A singular critical potential for the Schrödinger operator. *Can. Math. Bull.*, 50(1) :35–47, 2007.
- [65] Y.F. Fang and M.G. Grillakis. On the global existence of rough solutions of the cubic defocusing Schrödinger equation in \mathbb{R}^{2+1} . *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 4(2) :233–257, 2007.
- [66] A. Farina. From Ginzburg-Landau to Gross-Pitaevskii. *Monatsh. Math.*, 139(4) :265–269, 2003.
- [67] G Gallo. The Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity. preprint.
- [68] V. Georgiev. *Semilinear hyperbolic equations*. MSJ Memoirs. 7. Tokyo : Mathematical Society of Japan. viii, 208 p., 2000.
- [69] P. Gérard. The Cauchy problem for the Gross–Pitaevskii equation. 2006.
- [70] J. Ginibre. *Introduction aux équation de Schrödinger non linéaires*. Éditions de l’Université de Paris-Sud, 1995.
- [71] J. Ginibre and T. Ozawa. Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$. *Commun. Math. Phys.*, 151(3) :619–645, 1993.
- [72] J. Ginibre, T. Ozawa, and G. Velo. On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 60(2) :211–239, 1994.
- [73] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, II. Scattering theory. *J. Funct. Anal.*, 32 :1–71, 1979.
- [74] J. Ginibre and G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(4) :309–327, 1985.

- [75] J. Ginibre and G. Velo. Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl., IX. Sr.*, 64 :363–401, 1985.
- [76] R.T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18 :1794–1797, 1977.
- [77] M. Goldberg. Dispersive bounds for the three-dimensional Schrödinger equation with almost critical potentials. *Geom. Funct. Anal.*, 16(3) :517–536, 2006.
- [78] M. Goldberg, L. Vega, and N. Visciglia. Counterexamples of Strichartz inequalities for Schrödinger equations with repulsive potentials. *Int. Math. Res. Not.*, (3) :article ID 13927, 16 pages, 2006.
- [79] O. Goubet. Two remarks on solutions of Gross-Pitaevskii equations on Zhidkov spaces. *Monatsh. Math.* to appear.
- [80] P. Gravejat. A non-existence result for supersonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Commun. Math. Phys.*, 243(1) :93–103, 2003.
- [81] P. Gravejat. Asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Asymptotic Anal.*, 45(3-4) :227–299, 2005.
- [82] A. Grunrock. Bi- and trilinear Schrödinger estimates in one space dimension with applications to cubic NLS and DNLS. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(41) :2525–2558, 2005.
- [83] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai. Scattering for the Gross-Pitaevskii equation. *Math. Res. Lett.*, 13(2-3) :273–285, 2006.
- [84] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai. Global dispersive solutions for the gross-pitaevskii equation in two and three dimensions. *Ann. Henri Poincaré*, 8(7) :1303–1331, 2007.
- [85] S. Gutiérrez, J. Rivas, and L. Vega. Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation. *Commun. Partial Differ. Equations*, 28(5-6) :927–968, 2003.
- [86] S. Gutiérrez and L. Vega. Self-similar solutions of the localized induction approximation : singularly formation. *Nonlinearity*, 17(6) :2091–2136, 2004.
- [87] H. Hasimoto. A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 51 :477–485, 1972.
- [88] A. Hassell, T. Tao, and J. Wunsch. A Strichartz inequality for the Schrödinger equation on nontrapping asymptotically conic manifolds. *Commun. Partial Differ. Equations*, 30(2) :157–205, 2005.
- [89] N. Hayashi and P.I. Naumkin. Domain and range of the modified wave operator for Schrödinger equations with a critical nonlinearity. *Commun. Math. Phys.*, 267(2) :477–492, 2006.
- [90] E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*. Courant Lecture Notes in Mathematics. 5. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). New York, NY : Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ. xii, 290 p., 2000.
- [91] S. Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces*. Mathematical Surveys and Monographs. 39. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xiv, 611 p., 1994.
- [92] T. Hmidi and S. Keraani. Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(46) :2815–2828, 2005.

- [93] A.D. Ionescu and G. Staffilani. Semilinear Schrödinger Flows on Hyperbolic Spaces : Scattering in H^1 . *arXiv 0801.2957*.
- [94] C.A. Jones, S.J. Putterman, and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate IV. Axisymmetric solitary waves. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 15 :25992619, 1982.
- [95] C.A. Jones, S.J. Putterman, and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate V. Stability of solitary wave solutions of nonlinear Schrödinger equations in two and three dimensions. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 19 :29913011, 1986.
- [96] T. Kato. Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators. *Math. Ann.*, 162 :258–279, 1965/1966.
- [97] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 46 :113–129, 1987.
- [98] O. Kavian. A remark on the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for non-singular Schrödinger equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 299 :193–203, 1987.
- [99] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955–980, 1998.
- [100] C.E. Kenig and F. Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, nonlinear Schrödinger equation in the radial case. *Invent. Math.*, 166(3) :645–675, 2006.
- [101] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations. *Invent. Math.*, 134(3) :489–545, 1998.
- [102] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations. *Duke Math. J.*, 106(3) :617–633, 2001.
- [103] S. Keraani. On the blow up phenomenon of the critical nonlinear Schrödinger equation. *J. Funct. Anal.*, 235(1) :171–192, 2006.
- [104] N. Kita. Nonlinear Schrödinger equation with triple d-functions as initial data. *Sapporo guest house symposium on mathematics 20 Nonlinear Wave Equations*, 2005.
- [105] M.K. Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbb{R}^n . *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 105(3) :243–266, 1989.
- [106] M. Lakshmanan and M. Daniel. On the evolution of higher dimensional heisenberg continuum spin systems. *Physics A*, 107 :533–552, 1981.
- [107] M. Lakshmanan, T.W. Ruijgrok, and C.J. Thompson. On the dynamics of a continuum spin system. *Physics A*, 84 :577–590, 1976.
- [108] M.J. Landman, G.C. Papanicolaou, C. Sulem, and P.L. Sulem. Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension.. *Phys. Rev. A.*, 3(38(8)) :3837–3843, 1988.
- [109] J.-E. Lin and W.A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation. *J. Funct. Anal.*, 30 :245–263, 1978.
- [110] T. Lipniacki. Quasi-static solutions for quantum vortex motion under the localized induction approximation. *J. Fluid Mech.*, 477 :321–337, 2002.
- [111] T. Lipniacki. Shape-preserving solutions for quantum vortex motion. *Phys. Fluids*, 15(6), 2003.

- [112] L. Ma and L. Zhao. Blow-up of solutions to the nonlinear Schrödinger equations on standard N-sphere and hyperbolic N-space. *arXiv math/0701200*.
- [113] S Masaki. Asymptotic expansion of solutions to the nonlinear Schrödinger equation with power nonlinearity. *Kyushu J. Math.* to appear.
- [114] F. Merle. Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power. *Duke Math. J.*, 69(2) :427–454, 1993.
- [115] F. Merle. Nonexistence of minimal blow-up solutions of equations $iu_t = -\Delta u - k(x)|u|^{4/N}u$ in \mathbb{R}^N . *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 64(1) :33–85, 1996.
- [116] Merle, F. and Raphaël, P. Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation. *Geom. Funct. Anal.*, 13(3) :591–642, 2003.
- [117] Merle, F. and Raphaël, P. On universality of blow up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation. *Invent. Math.*, 156(3) :565–672, 2004.
- [118] Merle, F. and Raphaël, P. The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Math. (2)*, 161(1) :157–222, 2005.
- [119] S.J. Montgomery-Smith. Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations. *Duke Math. J.*, 91(2) :393–408, 1998.
- [120] C.S. Morawetz and W.A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 25 :1–31, 1972.
- [121] K. Nakanishi and T. Ozawa. Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations. *NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 9(1) :45–68, 2002.
- [122] T. Ogawa and Y. Tsutsumi. Blow-up of solutions for the nonlinear Schrödinger equation with quartic potential and periodic boundary condition. 1990.
- [123] T. Ozawa. Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension. *Commun. Math. Phys.*, 139(3) :479–493, 1991.
- [124] G. Perelman. On the formation of singularities in solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Henri Poincaré*, 2(4) :605–673, 2001.
- [125] C.S. Peskin and M. McQueen. Mechanical equilibrium determines the fractal fiber architecture of aortic heart valve leaflets. *Amer. J. of Physiology*, 266 :H319–H328, 1994.
- [126] P. Petersen. *Riemannian geometry*. Graduate Texts in Mathematics. 171. New York, NY : Springer. xvi, 432 p., 1998.
- [127] V. Pierfelice. Weighted Strichartz estimates for the Schroedinger and wave equations on Damek-Ricci spaces. to appear.
- [128] V. Pierfelice. Weighted Strichartz estimates for the radial perturbed Schrödinger equation on the hyperbolic space. *Manuscr. Math.*, 120(4) :377–389, 2006.
- [129] F. Planchon and L. Vega. Bilinear virial identities and applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* to appear.
- [130] Planchon, F. and Raphaël, P. Existence and stability of the log-log blow-up dynamics for the L^2 -critical nonlinear Schrödinger equation in a domain. *Ann. Henri Poincaré*, 8(6) :1177–1219, 2007.
- [131] R.L. Ricca. Rediscovery of Da Rios Equations. *Nature*, 352 :561, 1991.

- [132] R.L. Ricca. The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics. *Fluid Dyn. Res.*, 18(5) :245–268, 1996.
- [133] L. Robbiano and C. Zuily. Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.*, 101-102 :208 p., 2005.
- [134] I. Rodnianski and W. Schlag. Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials. *Invent. Math.*, 155(3) :451–513, 2004.
- [135] E. Ryckman and M. Visan. Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{R}^{1+4} . *Amer. J. Math.*, (129) :1–60, 2007.
- [136] P.G. Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press. xi, 311 p. , 1992.
- [137] D. Salort. Dispersion and Strichartz inequalities for the one-dimensional Schrödinger equation with variable coefficients. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(11) :687–700, 2005.
- [138] D. Salort. The Schrödinger equation type with a nonelliptic operator. *Commun. Partial Differ. Equations*, 32(2) :209–228, 2007.
- [139] K.W. Schwarz. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Line-line and line-boundary interactions. *Phys. Rev B*, 31 :5782–5804, 1985.
- [140] P. Sjölin. Regularity of solutions to the Schrödinger equation. *Duke Math. J.*, 55 :699–715, 1987.
- [141] C.D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*. Cambridge Tracts in Mathematics. 105. Cambridge : Cambridge University Press. x, 237 p. , 1993.
- [142] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Berkeley : Publish or Perish, Inc. XI 423 p., 1979.
- [143] G. Staffilani and D. Tataru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(7-8) :1337–1372, 2002.
- [144] W.A. Strauss. Nonlinear scattering theory. Scattering Theory math. Phys., Proc. NATO advanced Study Inst., Denver 1973, 53-78 (1974)., 1974.
- [145] R.S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.
- [146] C. Sulem and P.-L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences. 139. New York, NY : Springer. xvi, 350 p., 1999.
- [147] T. Tao. Spherically averaged endpoint Strichartz estimates for the two-dimensional Schrödinger equation. *Commun. Partial Differ. Equations*, 25(7-8) :1471–1485, 2000.
- [148] T. Tao. *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics 106. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xv, 373 p., 2006.
- [149] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang. Minimal-mass blowup solutions of the mass-critical NLS. *Forum Mathematicum*. to appear.
- [150] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang. Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions. *Duke Math. J.*, 140(1) :165–202, 2007.

- [151] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities. *Commun. Partial Differ. Equations*, 32(8) :1281–1343, 2007.
- [152] D. Tataru. Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation. *Trans. Am. Math. Soc.*, 353(2) :795–807, 2001.
- [153] A. Terras. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. I*. New York etc. : Springer-Verlag. XV, 341 p., 1985.
- [154] P.A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Am. Math. Soc.*, 81 :477–478, 1975.
- [155] Y. Tsutsumi. Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 43 :321–347, 1985.
- [156] Y. Tsutsumi. L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. *Funkc. Ekvacioj, Ser. Int.*, 30 :115–125, 1987.
- [157] Y. Tsutsumi and K. Yajima. The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 11 :186–188, 1984.
- [158] A. Vargas and L. Vega. Global wellposedness for 1D nonlinear Schrödinger equation for data with an infinite L^2 norm. *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.*, 80(10) :1029–1044, 2001.
- [159] L. Vega. Schrödinger equations : pointwise convergence to the initial data. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(4) :874–878, 1988.
- [160] M.C. Vilela. Regularity of solutions to the free Schrödinger equation with radial initial data. *Ill. J. Math.*, 45(2) :361–370, 2001.
- [161] M. Visan. The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions. *Duke Math. J.*, 138(2) :281–374, 2007.
- [162] M.I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Commun. Math. Phys.*, 87 :567–576, 1983.
- [163] M.I. Weinstein. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 16 :472–491, 1985.
- [164] M.I. Weinstein. On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(5) :545–565, 1986.
- [165] F.B. Weissler. Asymptotic analysis of an ordinary differential equation and non- uniqueness for a semilinear partial differential equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 91 :231–245, 1986.
- [166] K. Yajima. Existence of solutions for Schrödinger evolution equations. *Commun. Math. Phys.*, 110 :415–426, 1987.
- [167] V.E. Zakharov. Collapse of Lagmuir waves. *Sov. Phys. JETP*, 35 :908–914, 1972.
- [168] P.E. Zhidkov. *Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*. Lecture Notes in Mathematics. 1756. Berlin : Springer. 147 p., 2001.