International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 8, 373 - 382

Un problème d'alignement dans la variété de Kummer-Wirtinger

Abdelmejid Bayad

Département de mathématiques
Université d'Evry Val d'Essone
Bd. F. Mitterrand, 91025 EVRY CEDEX, France
abayad@maths.univ-evry.fr

Abstract

In this paper we deal with the problem of the alignment of three points in the variety of Kummer-Wirtinger. More precisely, our main result is to supply a simple criterion allowing to decide if three points are aligned or not in the Kummer-Wirtinger variety associated to any polarized, projective, smooth and irreducible variety.

Mathematics Subject Classification: 14Hxx,14Jxx, 14Kxx

Keywords: Kummer-Wirtinger variety, theta divisor, trisecant identity, Prym

1 Introduction et résultats

Soit A une variété abélienne principalement polarisée complexe de dimension $g \geqslant 2$. C'est équivalent à la donnée d'un couple $(\mathcal{L}, H_\Omega)$ tels que : $\mathcal{L}$ est un réseau complexe dans $\mathbb{C}^g$ avec $\mathcal{L} = (\,\Omega \quad I_g\,)\,\mathbb{Z}^{2g}$, où I_g est la matrice identité $g \times g$ et Ω matrice élément de l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g := \{Z \in \mathcal{M}_{g,g}(\mathbb{C}) : {}^tZ = Z, ImZ > 0\}$ et H_Ω est la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ par

$$H_\Omega(u, v) := {}^t\bar{u}(\Omega - \overline{\Omega})^{-1}v$$

Elle définit la polarisation principale de A.

Pour préciser la question centrale, qui fait l'objet de cet article, nous rappelons quelques définitions. On note par $\theta(z, \Omega)$ la fonction thêta de Riemann classique , définie par la série

$$\theta(z; \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e(1/2{}^tn\Omega n + {}^tnz), \tag{1.1}$$

où l'on a posé

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes

$$(1.2) \begin{cases} \theta(z + I_g n + m\Omega; \Omega) = e(-1/2{}^t m\Omega m - {}^t mz)\theta(z;\Omega), \\ \theta(-z;\Omega) = \theta(z;\Omega), \quad \text{pour tout} \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g. \end{cases}$$

On note par Θ_Ω le diviseur thêta associé à la fonction $\theta(.;\Omega)$, c'est l'ensemble des zéros de cette fonction dans $\mathbb{C}^g$. Le fait que la variété abélienne A, associée à $(\mathcal{L}, H_\Omega)$, soit principalement polarisée assure que Θ_Ω est ample et que le système linéaire $|\Theta_\Omega|$ est de dimension 0 . Pour $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$, on peut définir une fonction thêta du second ordre de caractéristique$(\mu, 0)$ comme suit

$$(1.3) \quad \theta_2[\mu](z;\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e(1/2{}^t(n+\mu)\Omega(n+\mu) + {}^t(n+\mu)z)$$

Elle satisfait les propriétés suivantes

$$(1.4) \begin{cases} \theta_2[\mu](z + I_g n + m\Omega;\Omega) = e(1/2{}^t\mu n - 1/2{}^t m\Omega m - {}^t mz)\theta_2[\mu](z;\Omega) \\ \theta(z-\varphi;\Omega)\theta(z+\varphi;\Omega) = \displaystyle\sum_{\mu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \theta_2[\mu](z;\Omega)\theta_2[\mu](\varphi;\Omega) \end{cases}$$

[1] §4 (2) et [8] Chap VI.

Cette dernière égalité est connue sous le nom "Identité fondamentale de Riemann" . En utilisant le théorème de Riemann-Roch et par un simple calcul, on peut montrer que les 2^g fonctions

$$\theta_2[\mu](z;\Omega); \quad \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$$

forment une base pour l'espace des fonctions thêta de second-ordre [1], [2]. Ceci permet, par le système linéaire $|2\Theta_\Omega|$, de définir le morphisme

$$(1.5) \quad \begin{cases} P_{(0)} : & A \to \mathbb{P}_{2t+1}(\mathbb{C}), t = 2^{g-1} - 1, \\ & z \mapsto \Big[..., \theta_2[\mu](z,\Omega), ...\Big]_{\mu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \end{cases}$$

l'image de A par $P_{(0)}$ est ce qu'on appelle la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ qui est isomorphe à $A/\{+1,-1\}$, où $\{+1,-1\}$ est le groupe des automorphismes de la variété principalement polarisée A.

Maintenant, nous sommes en mesure de préciser notre question, sous deux formes différentes mais équivalentes

1.1 Forme géomètrique

Soit $\alpha \in A[2]\backslash\{0\}$ un point de 2-torsion dans A. Pour quelles valeurs de φ point de $A\backslash A[2]$, les images par $P_{(0)}$ des trois points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et } \alpha/2$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ sont-elles alignés?

Remarque 1.1.1 *Sous les mêmes hypothèses précédentes, ces trois images sont des points deux à deux distincts de $\mathcal{K}_{(0)}$. En fait*

$$P_{(0)}(\varphi + \alpha/2) = P_{(0)}(-\varphi + \alpha/2)$$

si et seulement si $\varphi \in A[2]$.

1.2 Forme analytique

Soit $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ une section du fibré en droites définie par le facteur d'automorphie

$$\chi_{\mathcal{L}}(\rho)e(E_{\mathcal{L}}(\rho, u)/2), \text{ pour tout } \rho \in \mathcal{L},$$

où $\chi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \{+1, -1\}$ satisfait

$$\chi_{\mathcal{L}}(\rho + \sigma) = \chi_{\mathcal{L}}(\rho)\chi_{\mathcal{L}}(\sigma)e(E_{\mathcal{L}}(\rho, \sigma)/2).$$

pour tous ρ et σ éléments de $\mathcal{L}$. On fixe α point de 2-division de A, non nul.

Pour quelles valeurs de φ point de A, on a

$$\mathcal{K}(z + \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z - (\varphi + \alpha/2)) + e(E(\alpha, \varphi))\mathcal{K}(z - \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z + \varphi - \alpha/2)$$
$$= \lambda(\varphi)\mathcal{K}(z + \alpha/2)\mathcal{K}(z - \alpha/2),$$

où $\lambda(\varphi)$ ne dépend que de φ et eventuellement de α.

Remarque 1.2.1 *En dimension $g = 1$, il est clair que la question est trivialement satisfaite pour tout φ point de A.*
L'objectif de ce travail est de traiter le cas de dimension $\geqslant 2$.

Plus précisément, le résultat principal de cet article est le suivant

Théorème 1.2.2 (Théorème principal). *Soit $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ la jacobienne d'une courbe projective et lisse C, de genre $\geqslant 2$, munie de sa polarisation principale.*

On suppose que (A, Θ) est indécomposable. On choisit $\alpha \in A\backslash A[2]$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes :

(i) $\varphi \notin A[2]$,

(ii) les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;

(iii) dans la variété de Kummer-Wirtinger, les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ ne sont pas alignés .

Remarque 1.2.3 *Le lien entre Θ_Ω et Θ est explicitement fourni par le théorème VI.2.4 de [8]. En tout cas, ils diffèrent seulement d'un vecteur constant ne dépendant que de la base d'homologie de A et du point base de l'application d'Abel $\varphi : C \mapsto Jac(C)$.*

2 Trisécantes et Jacobiennes

Nos références pour ce paragraphe sont [2], [5], [11],[13] et [14]. On travaille sur la variété $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ prise simple, où C est une courbe projective et lisse. D'après, [5] (0.1), on sait que le fait d'avoir trois points a, b et c dont les images sont distinctes et alignées dans la variété de Kummer-Wirtinger est équivalent à l'inclusion

$$\Theta_a.\Theta_b \subset \Theta_c \cup \Theta_{-c} \tag{2.1}$$

où $\Theta_a.\Theta_b$ est le schéma de support $\Theta_a \cap \Theta_b$ et Θ_x désigne $\Theta + x$ (le translaté de Θ par x élément de A). Ceci nous permet d'avoir les inclusions suivantes

Proposition 2.0.4 *Soit φ un point de A, tel que $2\varphi \neq 0$. Si les images des trois points*

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{ et } \alpha/2, \text{ pour } \alpha \in A[2]\backslash\{0\}$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger, alors

$$\begin{cases} \Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{-\alpha} \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases} \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{-\varphi} \cup \Theta_{\varphi+\alpha} \\ \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases} \tag{2.2.2}$$

$$\begin{cases} \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{-\varphi-\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases} \tag{2.2.3}$$

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_\varphi \cup \Theta_{\varphi+\alpha} \tag{2.2.4}$$

Démonstration : Dans cette démonstration nous utilisons plusieurs fois le résultat (0.1) [5].

Démontrons (2.2.4).

En posant $a = \varphi + \alpha/2$, $b = -\varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2$, on obtient

$$\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{-\varphi+\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{\frac{-\alpha}{2}}$$

et en translatant cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$, on conclut que

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_{\varphi} \cup \Theta_{\varphi+\alpha}.$$

Montrons, à présent, le (2.2.1).

On pose $a = -(\varphi + \alpha/2)$, $b = -(\varphi - \alpha/2)$ et $c = \alpha/2$ (resp. $a = \varphi + \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2$) on obtient

$$\Theta_{-(\varphi+\frac{\alpha}{2})} \cap \Theta_{-(\varphi-\frac{\alpha}{2})} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{\frac{-\alpha}{2}}$$

(resp.$\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{\varphi-\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{-\frac{\alpha}{2}}$) . Puis, on translate cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$ (resp. $-\varphi + \frac{\alpha}{2}$) on conclut que
$\Theta \cap \Theta_{\alpha} \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_{\varphi}$ et $\Theta \cap \Theta_{\alpha} \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi}$. D'où (2.2.1).

Brièvement, pour montrer les inclusions (2.2.2), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2 - \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = -(\varphi + \alpha/2)$ et $c = \alpha/2 - \varphi$), puis on translate les inclusions obtenues par $-(\varphi + \alpha/2)$ (resp.$\varphi + \alpha/2$). Enfin, pour démontrer le (2.2.3), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$) et on translate par $-\varphi + \alpha/2$ (resp.$\varphi - \alpha/2$.)

Lemme 2.0.5 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 2.0.4, on a l'inclusion*

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Big(\Theta_{\varphi} \cap \Theta_{-\varphi}\Big) \cup \Big(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}\Big).$$

Démonstration : Soit Z une sous-variété irréductible de A telle que : Z soit une composante de $\Theta \cap \Theta_{2\varphi}$.

<u>1er cas:</u> Supposons $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$. Alors, d'après (2.2.4), on a forcément $Z \subset \Theta_{\varphi}$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_{\varphi}$. Mais, comme $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, on a d'après (2.2.2) l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi}$ et donc $Z \subset \Theta_{-\varphi} \cap \Theta_{\varphi}$. On conclut que Z est une composante irréductible de $\Theta_{-\varphi} \cap \Theta_{\varphi}$.

<u>2ème cas:</u> Supposons $Z \not\subset \Theta_{\varphi}$. Alors, d'après (2.2.4) $Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha}$. En utilisant (2.2.3) on en déduit l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$ et donc l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$. Donc, on obtient

$$Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}.$$

D'où la démonstration du lemme 2.0.5.

Proposition 2.0.6 *On pose* $D = \Big(\Theta_{\varphi} \cap \Theta_{-\varphi}\Big) \cup \Big(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}\Big)$, *avec* $2\varphi \neq 0$ *et* $2\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. *Alors, on a les inclusions*

$$t^*_{\varphi}(D) \subset D \quad \textit{et} \quad t^*_{-\varphi}(D) \subset D; \ \textit{où } t^*_{\varphi}(D) := \textit{le translaté de } D \textit{ par } \varphi$$

Démonstration : Le membre de droite du lemme 2.0.5 possède un groupe d'automorphisme d'ordre 4, engendré par

i) La multiplication par -1 i.e $\varphi \to -\varphi$

ii) La translation par α, qui échange $\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$ et $\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}$. On conclut que

$$(\Theta \cap \Theta_{2\varphi}) \cup (\Theta_\alpha \cap \Theta_{2\varphi+\alpha}) \text{ et } (\Theta \cap \Theta_{-2\varphi}) \cup (\Theta_\alpha \cap \Theta_{-2\varphi+\alpha})$$

sont contenus dans le membre de droite de l'inclusion du lemme 2.0.5, Ceci est équivalent au résultat qu'on veut démontrer.

Remarque 2.0.7 *On a aussi* $D = E \cup t_\alpha^* E$ *où* $E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$

3 Démonstration du théorème principal

On travaille sur une variété abélienne principalement polarisée A. Commençons par la démonstration de deux lemmes préparatoires.

Lemme 3.0.8 *On suppose que* (A, Θ) *est simple et jacobienne d'une courbe projective lisse* C*, de genre* $\geqslant 2$*, munie de sa polarisation canonique. On choisit* $\alpha \in A \backslash A[2]$.

S'il existe $\varphi \in A \backslash A[2]$ *tels que : les images des points*

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et } \alpha/2, \alpha \in A[2] \backslash \{0\}$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger sont alignées , alors la courbe C *est hyperelliptique.*

Démonstration :
Le cas $g = 2$ se traite aisément. Lorsque $g \geqslant 3$, d'après [12] p.76 et [7] , on a l'équivalence
(3.2)

$$\left(\begin{array}{c} \Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_b \cup \Theta_c \\ \text{pour } 0, a, b \text{ et } c \\ \text{quatre points distincts de } Jac(C) \\ \text{tels que } \{0; a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{après échange éventuel de } b \text{ et } c \\ \text{il existe } s, t, u \text{ et } v \in C \text{ tel que} \\ a = \phi(u) - \phi(v), \\ b = \phi(s) - \phi(v), \\ c = \phi(u) - \phi(t), \\ \text{où } \phi \text{ est l'application canonique} \\ \text{d'Abel-Jacobi } \phi : C \to Jac(C). \end{array}\right)$$

On en déduit, de (3.2) et des inclusions (2.2.1) qu'ils existent deux points P_0 et P_1 de C tels que

$$\alpha = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

et donc, $2P_1 \sim 2P_0$, autrement dit $2P_1 - 2P_O$ est le diviseur d'une fonction méromorphe sur A. D'après [10], ceci impose à C d'être un recouvrement de $\mathbb{P}^1$ de degré 2, d'où : C est hyperelliptique.

Donc, dans toute la suite, on se ramène au cas où C est hyperelliptique. On note par I l'involution hyperelliptique. Donc, d'après (3.2) et (2.2.2), il existe P_2 tel que : $\varphi = \phi(P_2) - \phi(P_0)$, ce qui implique

$$2\varphi = 2\phi(P_2) - 2\phi(P_0) = \phi(P_2) + (\phi(P_2) + \phi(I(P_2)) - 2\phi(P_0)) - \phi(I(P_2))$$

Comme $P_2 + I(P_2) \sim 2P_0$, on otient alors

$$2\varphi = \phi(P_2) - \phi(I(P_2))$$

D'où le lemme suivant

Lemme 3.0.9 *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3.0.8, on trouve que le point 2φ est de la forme $\phi(P) - \phi(Q)$ avec $Q = I(P)$, P point de C.*

Démonstration : Démontrons le théorème principal. D'après les lemmes 3.0.8 et 3.0.9, on se ramène au cas où C est hyperelliptique et 2φ est de la forme $P - Q$ avec $Q = I(P)$, P point de C. En fait, d'après [11] Chap 11 Prop.9.1 b), le lemme 3.0.9 implique que

$$E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi} = t_\varphi^*\Big(\Theta \cap \Theta_{2\varphi}\Big) \quad \text{est irréductible.}$$

D'autres part, d'après [15] Hilfsatz 1, on a précisément

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} = W_{\phi(P)} \cup W^*_{-\phi(P)},$$

où $W_{\phi(P)}$ = est le translaté de $\phi^{(g-2)}(C)$ par $\phi(P)$ et $W^*_{-\phi(P)}$ = est l'image de $W_{-\phi(P)}$ par l'application $u \mapsto -u + \phi(Z)$ où Z est un diviseur canonique sur C. D'après le Hilfsatz 3 [15], $W_{\phi(P)}$ et $W^*_{-\phi(P)}$ coïncident. Or ce même Hilfsatz 3 [15], assure que $W_{\phi(P)}$ n'est invariant par aucune translation, si ce n'est par l'identité.

Il vient donc vu la prop.2.4

$$t_\varphi^*(E \cup t_\alpha^* E) = E \cup t_\alpha^* E$$

alors que

i) E est irréductible et

ii) E n'est invariant par aucune translation,

On en conclut donc $t_\varphi^* = Id$ ou $t_\varphi^* = t_\alpha^*$, c'est -à-dire $\varphi = 0$ ou $\varphi = \alpha$. Finalement on aboutit à la conclusion suivante: en dehors des points φ d'ordre 2 l'alignement des trois points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et } \alpha/2$$

sur la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$, conduit à une contradiction. D'où le théorème principal.

4 Généralisation

On pose

$$\mathfrak{J}ri_g =$$

$$\Big\{(A,\Theta) \text{ indécomposable tel que sa variété de Kummer-Wirtinger possède au moins une trisécante}\Big\}$$

Soit alors $\mathfrak{T}$une partie de $\mathcal{A}_g$ = l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, en bijection avec le quotient de l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ sous l'action de $Sp(g,\mathbb{Z})$ par la construction

$$\Omega \mapsto \Theta_\Omega$$

qui vérifie les axiomes suivants

$$\begin{cases} (\alpha) & J_g \subset \mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g \\ (\beta) & \mathfrak{T} \cap \mathfrak{J}ri_g = J_g \end{cases} \tag{4.1}$$

où $J_g = \{$ Jacobiennes des courbes algébriques lisses de genre $g\}$

On a le corollaire:

Corollaire 4.0.10 *Soient $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g$ vérifiant (4.1), et $(A,\Theta) \in \mathcal{A}_g$. On suppose (A,Θ) indécomposable. On choisit $\alpha \in A[2]\backslash\{0\}$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes:*
(i) $\varphi \notin A[2]$;

(ii) les images dans la variété de Kummer-Wirtinger par $P_{(0)}$, associé au système linéaire $|2\Theta|$, des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;

(iii) Ces trois images forment la base d'un plan projectif.

Démonstration :
On a clairement $(i) \Longrightarrow (ii)$, puisque $\alpha \in A[2] - \{0\}$, et de plus $(iii) \Longrightarrow (ii)$.

Montrons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$: pour cela il suffit de revenir au théorème principal, à l'aide de la propriété (4.1) satisfaite par $\mathfrak{T}$. En effet, comme par hypothèse (A,Θ) est indécomposable, si les trois points distincts étaient sur une même droite alors, par définition, on aurait

$$(A,\Theta) \in \mathfrak{J}ri_g;$$

l'hypothèse (4.1) implique donc que (A,Θ) est la jacobienne d'une courbe lisse.

En particulier, d'après [6], les hypothèses (4.1) sont vérifiées pour

$$\mathfrak{T} = \mathcal{P}_g$$

où $\mathcal{P}_g$ désigne le lieu des variétés de Prym généralisées, au sens de [3] dont la dimension est $3g$ pour $g \geqslant 5$, et qui vérifient $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$ si $g \leqslant 5$; ainsi le théorème principal peut-être énoné avec (A,Θ) variété de Prym indécomposable au lieu de (A,Θ) variété jacobienne.

Corollaire 4.0.11 *Si $2 \leqslant g \leqslant 5$, le théorème principal est donc valable pour toutes les variétés abéliennes (A, Θ), indécomposables et principalement polarisées par Θ, de dimension g.*

Démonstration : Si $g \leqslant 5$, on a $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$.

Remarque 4.0.12 *Soit $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ une variété abélienne indécomposable de dimension g, tel que*

$$(A, \Theta) \notin J_g.$$

Alors l'existence d'un point φ de A, tel que $2\varphi \neq 0$, pour lequel les images par $P_{(o)}$ des trois points

$$\varphi + \alpha/2, -\varphi + \alpha/2 \text{ et } \alpha/2$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger contredirait la conjecture avancée par Welters [14] d'après laquelle

$$\mathfrak{J}ri_g = J_g.$$

Autrement dit, si cette conjecture est vraie, alors

$$\mathfrak{T} = \mathcal{A}_g$$

vérifie (4.1).

References

[1] A. Andreotti and A. Mayer, *On the period relations for integrals on algebraic curves*, Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa, **21** , (1967)189–238.

[2] E. Arbarello, *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobians varieties*, Amer.Math.soc,Proc.Sympo.Pure Math, Part 1, **46**, (1988),47–61.

[3] A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent.Math .**41**, (1977), 149–196.

[4] A. Beauville, O. Debarre, R. Donagi et G. Van der Geer, *Sur les fonctions thêta d'ordre deux et les singularités du diviseur thêta*, C.R.A.S—t.307 série I, (1988), 481–484.

[5] O. Debarre, *Trisecant lines and Jacobians*, J.Algebraic geometry,**1**, (1992), 5–14.

[6] O. Debarre, *The Trisecant Conjecture for Pryms*, Proc.Sympo.Pure Math, Part 1, Vol **49**, (1989), 621–626.

[7] O. Debarre, *Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes*, Comp. Math. **58**, (1986), 3–11.

[8] H.M. Farkas and I.Kra, *Riemann Surfaces*, Springer Verlag (Graduate Texts in Mathematics Vol 71), 1980.

[9] B. Geemen and G. van der Geer, *Kummer varieties and the moduli spaces of abelians varieties,* Amer.J.Of Math, **108**, (1986), 615–642.

[10] P.A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience series, 1978.

[11] H. Lange and C. Birkenhake, *Complex Abelian varieties* , Springer Verlag (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 302), 1992.

[12] D. Mumford, *Curves and their Jacobians*, Ann Arbor The University of Michigan Press, 1975.

[13] G. Welters, *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Invent.Math **74**, (1983), 437–440.

[14] G. Welters, *A criterion for Jacobi varieties*, Ann.Math **120**, (1984), 497–504.

[15] A. Weil, *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen), 1957.

[16] W. Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Teubner, 1895.

Received: September, 2009