Le problème de Monge

D. Feyel

Le problème de Monge, modifié par Kantorovitch, peut s'énoncer de la manière suivante : on se donne un espace polonais X et deux mesures bornées de même masse, le déblai μ et le remblai ν. On se propose de transporter μ sur ν au moindre coût, c'est-à-dire par une application borélienne $T : X \to X$ telle que $T(\mu) = \nu$, minimisant l'expression

$$\int_X c(x, Tx)\, d\mu(x)$$

où $c(x, y) \geq 0$ est une fonction donnée sur X^2, qu'on appelle en général le "coût".

Monge posait le problème [8] pour l'espace $X = \mathbb{R}^m$, le coût $c(x, y) = |x - y|$, et des mesures μ et ν ayant des densités $f(x)$ et $g(x)$. A la suite de nombreux auteurs [1,2,7,9,11], on considérera ici le coût quadratique $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ plus agréable à manier, et dont l'interprétation physique est plus aisée.

Dans le problème de Monge-Kantorovitch [7], (en abrégé PMK), on remplace la recherche de l'application T par celle d'une mesure γ sur X^2 ayant pour projections marginales μ et ν et minimisant l'intégrale de coût

$$J(\gamma) = \iint_{X^2} c(x, y)\, d\gamma(x, y)$$

Notons $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X.
L'ensemble $\Pi(\mu, \nu)$ des mesures θ de marginales μ et ν est convexe et compact en topologie faible $\sigma(\Pi(\mu, \nu), \mathcal{C}_b(X^2))$, de sorte que si $c(x, y) \geq 0$ est s.c.i. sur X^2, le minimum de $J(\theta)$ est toujours atteint. Si ce minimum vaut $+\infty$, le PMK est dégénéré. Sinon, toute mesure γ réalisant le minimum est dite *optimale*. Si une mesure γ optimale est portée par un graphe, elle résout à la fois le PMK et le problème initial de Monge.

Si le PMK est non dégénéré, Kantorovitch a montré que γ est optimale si et seulement si l'on a

$$J(\gamma) = \mathrm{Sup}\left\{ \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\nu \;\Big/\; \varphi, \psi \in \mathcal{C}_b(X),\ \text{et } \forall x, y\ \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\}$$

comme il résulte du théorème de Hahn-Banach. Si un couple (φ, ψ) réalise le Sup, on l'appelle *potentiel de Kantorovitch*. On autorisera aussi φ et ψ à être boréliennes non bornées pourvu qu'elles soient respectivement μ et ν-intégrables.

C'est bien ce qui arrive pour $X = \mathbb{R}^m$, pour $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$, et pour μ et ν bornées, pourvu que le PMK ne soit pas dégénéré, c'est-à-dire pourvu que la "distance" de Kantorovitch-Wasserstein soit finie

$$d(\mu,\nu) = \inf_{\theta} J(\theta)^{1/2} < \infty$$

On a plus précisément

1 Théorème (Brenier-McCann) : *Dans ces dernières hypothèses, et si μ a une densité, il existe une unique mesure γ optimale, et elle est portée par le sous-différentiel d'une fonction convexe Φ.*

On observera que puisque μ a une densité, γ est portée par le graphe de $T = \nabla\Phi$, et que cette application T est évidemment solution unique du problème de Monge.

De plus, posons $\varphi(x) = \Phi(x) - x^2/2$ et $\psi(y) = \Psi(y) - y^2/2$ où Ψ est la fonction convexe conjuguée de Legendre de Φ. Alors le couple $(-\varphi, -\psi)$ est un potentiel de Kantorovitch pour le PMK en question.

Cela peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} &\varphi(x) + \psi(y) + \frac{1}{2}|x-y|^2 \geq 0 \quad &\text{partout} \\ &\varphi(x) + \psi(y) + \frac{1}{2}|x-y|^2 = 0 \quad &\gamma - \text{presque partout} \end{aligned}$$

Les fonctions φ et ψ sont donc 1-convexes au sens de [4], c'est-à-dire telles que $\varphi(x) + x^2/2$ et $\psi(y) + y^2/2$ soient convexes.

Extension à l'espace de Wiener abstrait

On considère maintenant un espace de Wiener abstrait (W, H, μ), par exemple $(\mathbb{R}^\infty, \ell^2, \mu)$ où $\mu = \mathcal{N}(0,1)^\infty$, ou encore $(\mathcal{C}_0[0,1], H_0^1, \mu)$ où μ est la mesure de Wiener usuelle, et H_0^1 l'espace de Sobolev que l'on sait. On prend $X = W$, et $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|_H^2$, de sorte que la fonction de coût est toujours s.c.i., mais prend très souvent la valeur $+\infty$ puisque l'espace de Cameron-Martin H est μ-négligeable [3].

2 Théorème [5,6] : *Soient μ la mesure de Wiener abstraite, et $\nu = L\,d\mu$ une mesure de probabilité ayant une densité L par rapport à μ, avec $\mathbb{E}(L \operatorname{Log} L) < +\infty$. Alors*

a) $d(\mu,\nu)^2 \leq 2\mathbb{E}(L \operatorname{Log} L)$ (extension de l'inégalité de Talagrand)

b) Si $d(\mu,\nu) < +\infty$, alors la mesure γ optimale existe et est unique, elle est portée par un graphe d'application borélienne $T : W \to W$

c) Il existe deux fonctions 1-convexes φ et ψ telles que

$$\varphi(x) + \psi(y) + \frac{1}{2}|x-y|^2 \geq 0 \quad \textit{partout}$$
$$\varphi(x) + \psi(y) + \frac{1}{2}|x-y|^2 = 0 \quad \gamma - \textit{presque partout}$$

d) La fonction φ appartient à l'espace de Sobolev gaussien $D^{1,2}(W,\mu)$

e) On a $T(x) = x + \nabla\varphi(x)$ presque partout.

En d'autres termes, les problèmes de Monge et de Monge-Kantorovitch sont résolus pour (μ,ν) pourvu que $\mathbb{E}(L \operatorname{Log} L)$ ou plus généralement $d(\mu,\nu)$ soit fini.

En dimension infinie, une fonction φ est 1-convexe si $h \to h^2/2 + \varphi(x+h)$ est convexe sur H à valeurs dans $L^0(W,\mu)$ [4]. Il existe alors une version borélienne de φ telle que pour tout $x \in W$ la fonction $h \to h^2/2 + \varphi(x+h)$ soit convexe sur H.

L'extension de l'inégalité de Talagrand se fait facilement par passage à la limite sur la dimension. Elle se fait aussi grâce au théorème de Girsanov appliqué à l'espace de Wiener standard. Cette dernière méthode a l'avantage de donner une démonstration directe dont *a contrario* on déduit facilement l'inégalité pour dimension finie.

La démonstration du théorème 2 se fait aussi par approximations à partir de la dimension finie. Naturellement toute la difficulté est de faire converger les graphes des applications optimales de la dimension finie vers un graphe optimal.

Comme corollaire, on peut retrouver des inégalités isopérimétriques concernant les mesures gaussiennes.

On peut en fait affaiblir les hypothèses du théorème 2, le lecteur pourra se reporter à [5,6].

Références

[1] P. Appell. *Le problème géométrique des déblais et des remblais.* Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXVII, Paris (1928).

[2] Y. Brenier *Décomposition polaire et réearrangement monotone des champs de vecteurs.* CRAS Paris 305, séerie I, 805-808 (1987).

[3] D. Feyel and A. de La Pradelle. *Capacités gaussiennes.* Annales de l'Institut Fourier, t.41, f.1, 49-76, 1991.

[4] D. Feyel and A. S. Üstünel. *The notion of convexity and concavity on Wiener space.* Functional Analysis, 176, 400-428, 2000.

[5] Feyel and A. S. Üstünel. *Transport of measures on Wiener space and the Girsanov theorem.* C.R.A.S., Vol. 334, Issue 1, 1025-1028, 2002.

[6] Feyel and A. S. Üstünel. *Monge-Kantorovitch measure transportation and Monge-Ampère equation on the Wiener space.* A paraître au PTRF (2003).

[7] R.J. McCann *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps.* Duke Math. J. 80, 309-323 (1995).

[8] G. Monge. *Mémoire sur la théeorie des déblais et des remblais.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris (1781).

[9] L.V. Kantorovitch *On the transfer of masses.* Dokl. Acad. Nauk. SSSR 37, 227-229 (1942).

[10] R.T. Rockafellar *Convex analysis.* Princeton University Press (1972).

[11] C. Villani. *Topics in optimal transportation.* Graduate Studies in Math. Vol. 58, Amer. Math. Soc. (2003).

D. Feyel
Université d'Evry-Val-d'Essonne
e-mail : feyel@maths.univ-evry.fr