Intégrale stochastique

Plan

- L'intégrale stochastique générale
- Processus d'Itô
- Formule d'Itô
- Formule de Black & Scholes

Le processus B est un mouvement Brownien et $\left\{\mathcal{F}_t^B,\ t \geq 0\right\}$ est sa filtration naturelle.

1 L'intégrale stochastique générale

On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s \, dB_s$$

quand $\{\theta_s,\ s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Définition 1.1 *On dit que* $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ *est un* bon processus *s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)$*-adapté, càglàd, et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right] \ < \ +\infty$$

pour tout $t > 0$.

1.1 Cas des processus étagés

Ce sont les processus du type

$$\theta_t^n \;=\; \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

où $p_n \in I\!N$, $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_{p_n}$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$ pour tout $i = 0, \ldots, p_n$. On définit

$$I_t(\theta^n) \;=\; \int_0^t \theta_s^n \, dB_s \;=\; \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Propriétés:

$$
\begin{aligned}
E\left[I_t(\theta^n)\right] &= 0 \\
\mathrm{Var}\left[I_t(\theta^n)\right] &= E\left[\int_0^t (\theta_s^n)^2 \, ds\right].
\end{aligned}
$$

Les processus $I_t(\theta^n)$ et $I_t^2(\theta^n) - \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds$ sont des martingales.

1.2 Cas général

Si θ est un bon processus, il existe $\{\theta^n,\ n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$E\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2\, ds\right] \ \to\ 0$$

quand $n \uparrow +\infty$. Il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$E\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \ \to\ 0$$

quand $n \uparrow +\infty$. On pose

$$I_t(\theta) \ =\ \int_0^t \theta_s\, dB_s$$

pour tout $t \geq 0$.

Propriétés:

$$\begin{aligned} E\left[I_t(\theta)\right] &= 0 \\ \mathrm{Var}\left[I_t(\theta)\right] &= E\left[\int_0^t \theta_s^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

Linéarité :

$$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) \;=\; a_1 I_t(\theta^1) \;+\; a_2 I_t(\theta^2).$$

Propriétés de martingale : Pour tout bon processus θ, les processus

$$t \mapsto I_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-**martingales** continues.

$$E\left[(I_t(\theta) - I_s(\theta))^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[\int_s^t \theta_u^2 du \,\middle|\, \mathcal{F}_s^B\right].$$

Propriété d'isométrie : Pour tous bons processus φ, θ et tout $s, t \geq 0$, on a

$$E\left[I_s(\varphi) I_t(\theta)\right] \;=\; E\left[\int_0^{s\wedge t} \theta_u \varphi_u \, du\right].$$

Le processus

$$I_t(\theta) I_t(\varphi) - \int_0^t \theta_u \varphi_u \, du$$

est une $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale.

Proposition 1.2 *Pour tout* $t \geq 0$ *on a*

$$\int_0^t B_s \, dB_s \;=\; \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Il est possible de définir $I_t(\theta)$ sous la seule condition

$$\int_0^t \theta_s^2 \, ds \; < \; +\infty \quad \text{p.s.}$$

Cependant, $t \mapsto I_t(\theta)$ n'est plus nécessairement une martingale.

Définition 1.3 *Soit $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)$-**martingale locale** s'il existe une suite $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que*

$$P\left[\tau_n \to +\infty\right] \; = \; 1$$

et le processus $X^n : t \mapsto X_{t \wedge \tau_n}$ est une martingale pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.4 *On dit que $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ est un* bon processus local *s'il est càglàd, $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, et si*

$$\int_0^t \theta_s^2 \, ds \; < \; +\infty \quad p.s.$$

pour tout $t > 0$.

Soit θ un bon processus local. On peut définir $I_t(\theta)$ pour tout $t > 0$, qui est une martingale locale. De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt, on montre que le processus

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds$$

est une martingale locale.

Définition 1.5 *Si Z est une martingale locale continue , $< Z >$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $t \mapsto Z_t^2 - < Z >_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.*

Par polarité, on peut définir le crochet de deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales M et N en écrivant

$$< M, N >_t = \frac{1}{2} \left(< M + N >_t - < M >_t - < N >_t \right).$$

Le crochet $< M, N >$ est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - < M, N >$ soit une martingale locale.

Enfin, la proposition suivante donne enfin de $< M, N >$ une importante construction trajectorielle :

Proposition 1.6 *Soient M et N deux martingales locales continues. Alors p.s. pour tout $t \geq 0$,*

$$< M, N >_t \;=\; \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

où $\{t_i^n,\ i = 0 \ldots 2^n\}$ désigne la subdivision régulière sur $[0, t]$.

$$< I(\theta) >_t = \int_0^t \theta_s^2 \, ds \quad \text{et} \quad < I(\theta), I(\varphi) >_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds.$$

On dit que deux martingales continues sont *orthogonales* si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale. Par exemple, deux Browniens indépendants sont des martingales orthogonales.

2 Processus d'Itô

Ce sont des processus écrits sous la forme

$$X_t \;=\; x \;+\; \int_0^t b_s\, ds \;+\; \int_0^t \sigma_s\, dB_s \tag{2.1}$$

où b est un processus $\mathbf{F}_t^B$-adapté tel que

$$\int_0^t |b_s|\, ds \;<\; +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour tout $t \geq 0$, et σ un bon processus local. On utilise la notation formelle

$$\begin{aligned} dX_t &= b_t\, dt + \sigma_t\, dB_t \\ X_0 &= x\,. \end{aligned}$$

Le coefficient b s'appelle la *dérive* (ou le *drift*) du processus, et σ son coefficient de diffusion.

Le processus

$$t \mapsto x + \int_0^t b_s \, ds$$

est la *partie à variation finie* de X, et le processus

$$t \mapsto \int_0^t \sigma_s \, dB_s$$

la *partie martingale* de X (c'est a priori une martingale locale). La décomposition (2.1) du processus X est unique, au sens où si X admet une autre décomposition

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{b}_s \, ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s \, dB_s,$$

alors $b \equiv \tilde{b}$ et $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$. En particulier, X sous la forme (2.1) est une martingale locale si et seulement si $b \equiv 0$.

En fait, cette représentation des martingales locales dans une filtration Brownienne est caractéristique, indépendamment de ce que le processus soit *a priori* un processus d'Itô :

Théorème 2.1 [Théorème de représentation des martingales locales] *Soit B un mouvement brownien et M une $\mathcal{F}_t^B$-martingale locale continue. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ bon processus local tel que*

$$M_t \;=\; x \;+\; \int_0^t \theta_s \, dB_s.$$

Ce théorème est extrémement important en Finance (marché complet).

Si X^1 et X^2 sont deux processus d'Itô de décomposition

$$X_t^i \;=\; x \;+\; \int_0^t b_s^i \, ds \;+\; \int_0^t \sigma_s^i \, dB_s$$

pour $i = 1, 2$, leur crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales. Autrement dit

$$< X^1, X^2 > = \; < I(\sigma^1), I(\sigma^2) > .$$

3 Formule d'Itô

On se donne un processus d'Itô réel X de décomposition (2.1) et une fonction $f : I\!R \to I\!R$ suffisamment régulière.

Théorème 3.1 [Première formule d'Itô] *Supposons f de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) \;=\; f(x) \;+\; \int_0^t f'(X_s)dX_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Si f est à dérivées bornées, le processus
$f(X_t) \;-\; \int_0^t f'(X_s)b_s\,ds \;-\; \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$ *est une martingale.*

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt \\ &= \left(f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\,\sigma_t^2\right)dt + f'(X_t)\sigma_t dB_t \\ &= f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)\,d\langle X\rangle_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

On utilise souvent la notation

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t \cdot dX_t$$

avec la table de multiplication

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

En particulier, $t \mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô de dérive

$$\int_0^t \left(f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2 \right) ds$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s)\sigma_s \, dB_s.$$

Quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale, et on en déduit :

$$\begin{aligned} E\left[f(X_t)\right] &= E\left[f(X_0)\right] + \int_0^t E\left[f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2\right] ds \\ E\left[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s^B\right] &= f(X_s) + E\left[\int_s^t \left(f'(X_u)b_u + \frac{1}{2}f''(X_u)\sigma_u^2\right) du \,\middle|\, \mathcal{F}_s^B\right] \end{aligned}$$

Théorème 3.2 [Deuxième formule d'Itô] *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x. On a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left(f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2 \right) dt \; + \; f'_x(t, X_t)dX_t \\ &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)d\langle X \rangle_t. \\ &= \left(f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t)b_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2 \right) dt \\ &\quad + f'_x(t, X_t)\sigma_t dB_t \end{aligned}$$

Exemple fondamental: Le **mouvement brownien géométrique**, ou **processus log-normal** est défini par l'équation

$$X_t \;=\; x \;+\; \mu \int_0^t X_s \, ds \;+\; \sigma \int_0^t X_s \, dB_s$$

avec $\mu, \sigma \in I\!R$. On montre que

$$X_t \;=\; x \exp\left[\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2\right].$$

Dans le cas où μ et σ sont des fonctions déterministes :

$$X_t \;=\; x \;+\; \int_0^t \mu(s) X_s \, ds \;+\; \int_0^t \sigma(s) X_s \, dB_s$$

$$X_t = X_0 \exp - \left[\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \,.\right]$$

Théorème 3.3 [Troisième formule d'Itô] *Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp. de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp. b^2), de coefficient de diffusion σ^1 (resp. σ^2) et portés respectivement par deux Browniens B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\mathcal{F}_t^{B^i}$-adaptés. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées. On a*

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) \; + \; \int_0^t f_1'(X_s^1, X_s^2)\, dX_s^1 \; + \; \int_0^t f_2'(X_s^1, X_s^2)\, dX_s^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left(f_{11}''(X_s^1, X_s^2)\left(\sigma_s^1\right)^2 + 2\rho f_{12}''(X_s^1, X_s^2)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''(X_s^1, X_s^2)\left(\sigma_s^2\right)^2 \right) ds$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

Proposition 3.4 [Formule d'intégration par parties]

$$X_t^1 X_t^2 \;=\; x_1 x_2 \;+\; \int_0^t X_s^1 \, dX_s^2 \;+\; \int_0^t X_s^2 \, dX_s^1 \;+\; \rho \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 \, ds.$$

$$d(X^1 X^2)_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + d\langle X^1, X^2 \rangle_t \, .$$

4 Formule de Black & Scholes

On considère un marché financier comportant un actif dit sans risque de taux constant r et de prix $S_t^0 = e^{rt}$ et un actif risqué dont le prix S vérifie

$$dS_t \;=\; b\,S_t\,dt \;+\; \sigma\,S_t\,dB_t$$

soit

$$S_t \;=\; S_0 \exp\left[\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t\right]$$

On fixe un horizon $T > 0$ et on souhaite donner le prix d'un actif financier qui versera $h(S_T)$ à la date T.

Le cas d'un **call Européen** de maturité T et de strike K correspond au cas $h(x) = (x - K)^+$.

On procède par duplication (hedging): on forme un portefeuille et d' *alpha* parts de l'actif sans risque (le montant de la richesse investie dans cet actif est αe^{rt}) et de β_t parts de l'actif risqué.

On va trouver un portefeuille **auto-financant** de valeur terminale $h(S_T)$. La valeur de ce portefeuille à la date t est

$$V_t \;=\; \alpha_t S_t^0 \;+\; \beta_t S_t \,.$$

La condition d'*auto-financement* se formalise par

$$dV_t \;=\; \alpha_t dS_t^0 \;+\; \beta_t dS_t \,;$$

soit

$$dV_t \;=\; rV_t dt + \beta_t S_t \left((b-r)dt + \sigma dB_t\right)$$

On suppose que la valeur du portefeuille à la date t est une fonction déterministe du temps et de la valeur de l'actif risqué, soit $V(t, S_t)$.

En utilisant la deuxième formule d'Itô, on calcule

$$\begin{aligned} dV_t &= \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + b\, S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt \\ &+ \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \right) dB_t. \end{aligned}$$

En identifiant avec la condition d'auto-financement,

$$\sigma \beta_t S_t \;=\; \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \quad \text{soit} \quad \beta_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t),$$

ce qui entraîne alors

$$r S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) \;+\; \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) \;-\; rV(t, S_t) = 0$$

avec pour condition terminale $V(T, S_T) = h(S_T)$.

Comme S_t est une v.a. qui peut prendre toutes les valeurs de $I\!R^+$, on en déduit que V satisfait l'EDP

$$\boxed{rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(t,x) \;-\; rV(t,x) \;=\; 0} \tag{4.1}$$

avec pour condition terminale $V(T,x) = h(x)$.

Dans le cas d'un call européen $h(x) = (x-K)^+$, et pour $\sigma > 0$, cette équation se résoud alors en :

$$V(t,x) \;=\; x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition d'une v.a. gaussienne standard :

$$\mathcal{N}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

et avec les notations

$$d_1 = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(x e^{r(T-t)}/K \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

La quantité

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \;=\; \mathcal{N}(d_1)$$

qui représente la *couverture* du marché, soit le nombre de parts de l'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option s'appelle le Delta de l 'option et représente aussi la sensibilité du prix de l option par rapport au prix du sous jacent.

Comme conséquence de la formule d'Itô appliquée aux EDS, on verra plus tard une formule probabiliste pour le prix du call :

$$C(t, S_t) \;=\; e^{r(t-T)} E\left[(\widetilde{S}_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

lorsque le $\widetilde{S}$ a pour dynamique

$$d\widetilde{S}_t = r\widetilde{S}_t dt + \sigma \widetilde{S}_t dB_t \,.$$

Cette interprétation est **fondamentale** en Finance, et fait intervenir un changement de probabilité.