Equations différentielles stochastiques

Equations différentielles stochastiques

Quelques propriétés

Lien avec les équations aux dérivées partielles

Processus de Bessel

Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

1 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.1 *Soient* $d, m \in \mathbb{N}$, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *et* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *deux fonctions mesurables bornées. Soit* $x \in \mathbb{R}^d$ *une condition initiale. Une solution de l'EDS*

$$E_x(b,\sigma) \quad : \left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x \\ dX_t & = & b(t, X_t)\, dt \; + \; \sigma(t, X_t)\, dB_t \end{array} \right.$$

est constituée par :

(a) *Un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}, P)$

(b) *Un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement brownien* $B = (B_1, \ldots, B_m)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$.

(c) *Un processus* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *continu* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté tel que les intégrales*

$$\int_0^t b(s, X_s)\, ds \quad et \quad \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

aient un sens et tel que l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\ ds\ +\ \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

soit satisfaite pour tout t P *p.s. Autrement dit, pour tout* $i = 1, \ldots, d$ *on a*

$$X_t^i = x + \int_0^t b^i(s, X_s)\ ds\ +\ \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\, dB_s^j.$$

Le caractère aléatoire des EDS impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. On dit qu'il y a

(1) Existence d'une **solution faible** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X.

(2) Existence d'une **solution forte** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X qui soit adaptée à la filtration du Brownien porteur.

(3) **Unicité faible** si tous les processus X solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont même loi.

(4) **Unicité trajectorielle** si, l'espace de probabilité et le Brownien porteur étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de $E_x(b, \sigma)$ sont indistinguables au sens où

$$P\left[\exists\, t \in I\!R \;/\; X_t \neq X'_t\right] \;=\; 0.$$

L'exemple suivant montre que l'on peut avoir (1) et (3) (existence et unicité faible), mais ni (2) ni (4) :

Soit $\{W_t,\ t \geq 0\}$ un MB. On considère le processus

$$B_t \ = \ \int_0^t \operatorname{sign}(W_s)\, dW_s$$

où sgn est la fonction définie par

$$\operatorname{sgn}(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Par le théorème de caractérisation de Paul Lévy, B est donc un mouvement brownien. On considère maintenant l'EDS

$$\begin{cases} X_0 & = & 0 \\ dX_t & = & \operatorname{sgn}(X_t)\, dB_t \end{cases}$$

Par construction on voit que W est solution de cette équation. De plus, par le même argument que précedemment, on voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements browniens et sont donc égaux en loi : on a existence et unicité faibles. En revanche le point (4) n'est pas vérifié : le processus $-W$ est aussi solution de l'équation avec pour tout $t > 0$,

$$P[W_t \neq -W_t] \;=\; P[2W_t \neq 0] \;=\; 1,$$

de sorte que W et $-W$ sont deux processus solution qui ne sont pas indistinguables.

Le théorème suivant montre que $(1) + (4) \implies (2) + (3)$:

Théorème 1.2 [Yamada-Watanabe] *Supposons que $E_x(b, \sigma)$ admette une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables. Alors $E_x(b, \sigma)$ admet une unique solution forte.*

Théorème 1.3 [Théorème d'existence sous conditions lipschitziennes] *Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

(a)

$$|b_i(t,x) - b(t,y)| + |\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)| \leq M\,|x-y|$$

pour tout $i = 1 \dots d$, $j = 1 \dots m$, $t \geq 0$, $\forall x, y$

(b) $|b_i(t,x)| + |\sigma_{ij}(t,x)| \leq M(1+|x|)$ *pour tout* $i = 1 \dots d$, $j = 1 \dots m$, $t \geq 0$, $x, y \in I\!R^d$ (condition de croissance linéaire),

alors il existe une unique solution forte à $E_x(b,\sigma)$, *de durée de vie infinie.*

L'idée est de construire une suite X^n par

$$X_t^n = x + \int_0^t b^i(s, X_s^{n-1})\, ds \; + \; \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{n-1})\, dB_s^j \,,$$

et de montrer la convergence de cette suite vers une solution.

Unicité :

Soit $t > 0$ fixé et X et Y deux solutions distinctes de $E_x(b, \sigma)$. On a

$$\begin{aligned}
E\left(|X_t - Y_t|^2\right) &= E\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s)\, ds \;+\; \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\, dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left(E\left(\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|\, ds\right)^2\right. \\
&\quad \left. + E\left(\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|\, dB_s\right)^2\right) \\
&\leq 2M^2\left(t^2 \int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\; ds \;+\; \int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\; ds\right) \\
&\leq K \int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\; ds
\end{aligned}$$

$\triangle$

On peut améliorer ce théorème dans le cas unidimensionel :

Théorème 1.4 [Yamade-Watanabe II] *Soit $d = m = 1$. Supposons que b et σ soient à croissance linéaire, que b vérifie la condition de Lipschitz locale et que $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ pour tout $t \geq 0$, où ρ est une fonction borélienne de $]0,\infty[$ dans lui-même telle que*

$$\int_{|z|\leq\epsilon} \frac{dz}{\rho^2(z)} \;=\; +\infty.$$

pour tout $\epsilon > 0$. Alors $E_x(b,\sigma)$ admet une unique solution forte.

Exemple : Processus de Bessel :

$$X_t \;=\; x \;+\; 2\int_0^t \sqrt{X_s}dW_s \;+\; \delta\, t \tag{1.1}$$

sur $I\!R$, où W est un Brownien réel et $x, \delta > 0$.

2 Quelques propriétés

2.1 Propriété de Markov

Supposons que $E_x(b, \sigma)$ ait une unique solution forte $\{X_t(x),\ t \geq 0\}$. Par linéarité de l'intégrale, on voit que pour tout $s, t \geq 0$,

$$X_{s+t}(x) \ = \ X_s(x) \ + \ \int_s^{s+t} b(u, X_u(x)\, du \ + \ \int_s^{s+t} \sigma(u, X_u(x))\, dB_u.$$

On peut écrire

$$X_{s+t}(x) \ = \ X_s(x) \ + \ \int_0^t b(s+u, X_{s+u}(x))\, du \ + \ \int_0^t \sigma(s+u, X_{s+u}(x))\, dB'_u$$

et par unicité, ceci entraîne que $X_{s+t}(x) = X_t^s(X_s(x))$ pour tout $t \geq 0$, où $X_t^s(x)$ est l'unique solution de $E_x(b(s+.,.), \sigma(s+.,.))$ portée par le Brownien B'.

Pour tout $s, t \geq 0$ et toute fonction borélienne f, on déduit alors que

$$E\left[f(X_{t+s}) \,|\, \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[f(X_{t+s}) \,|\, X_t\right] \;=\; \Phi_t(s, X_s)$$

où $\Phi_t(s,x) = E\left[f(X_t^s(x))\right]$. Ceci signifie que X vérifie la **propriété de Markov inhomogène**.

Dans le cas où les coefficients b et σ ne dépendent pas du temps, X vérifie la *propriété de Markov homogène,*

$$E\left[f(X_{t+s}) \,|\, \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[f(X_{t+s}) \,|\, X_s\right] \;=\; \Phi_t(X_s)$$

avec $\Phi_t(x) = E\left[f(X_t(x))\right]$.

Dans le cas homogène, on peut étendre la propriété aux temps d'arrêt finis :

Théorème 2.1 [Propriété de Markov forte] *Soit X l'unique solution forte de $E_x(b,\sigma)$ avec b et σ ne dépendant pas du temps. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour la filtration naturelle du Brownien porteur. Alors pour tout $t \geq 0$ et toute fonction f mesurable bornée,*

$$E\left[f(X_{T+t})\,|\,\mathcal{F}_T^B\right] \;=\; E\left[f(X_{T+t})\,|\,X_T\right] \;=\; \Phi_t(X_T)$$

où l'on a noté $\Phi_t(x) = E\left[f(X_t(x))\right]$.

Dans le cas inhomogène, on montre que le processus espace-temps $t \mapsto (t, X_t)$ vérifie la propriété de Markov forte, au sens où pour tout temps d'arrêt fini T et toute fonction f de deux variables,

$$E\left[f(T+t, X_{T+t})\,\middle|\,\mathcal{F}_T^B\right] \;=\; E\left[f(T+t, X_{T+t})\,|\,T, X_T\right] \;=\; \Phi_t(T, X_T)$$

avec la notation $\Phi_t(s,x) = E\left[f(s+t, X_t^s(x))\right]$.

2.2 Théorème de comparaison

Théorème 2.2 *Soit* $\{W_t,\ t \geq 0\}$ *un mouvement brownien réel,* b_1, b_2 *et* σ *trois fonctions globablement lipschitziennes,* $x_1 \geq x_2$ *deux réels. On considère les deux EDS*

$$X_t^i \ = \ x_i \ + \ \int_0^t b_i(X_s^i)\, ds \ + \ \int_0^t \sigma(X_s^i)\, dW_s$$

pour $i = 1, 2$*. Supposons que* $b_1(x) \geq b_2(x)$ *pour tout* $x \in I\!R$*. Alors* $X_t^1 \geq X_t^2$ *p.s. pour tout* $t \geq 0$*.*

2.3 Fonction d'échelle

On considère l'EDS homogène

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b(X_s)\; ds \;+\; \int_0^t \sigma(X_s)\; dB_s$$

où b et σ sont des fonctions de $I\!R$ dans $I\!R$ globalement lipschitziennes.
D'après la formule d'Itô, on voit que si f est une fonction de $I\!R$ dans $I\!R$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées et telle que

$$b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) \;=\; 0$$

pour tout $x \in I\!R$, alors le processus $(f(X_t)\,;t \geq 0)$ **est une martingale** (martingale locale si f n'est pas à dérivées bornées).

La fonction f est appelée **fonction d'échelle** du processus X. Elle est déterminée par la formule

$$f(x) \;=\; \int_{c_1}^{x} \exp\left(-2\int_{c_2}^{u} b(v)/\sigma^2(v)\,dv\right) du.$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ qui à $f \in \mathcal{C}^2(I\!R, I\!R)$ fait correspondre

$$\mathcal{L}f : x \mapsto b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

s'appelle le **générateur infinitésimal** du processus X. Il vérifie

$$\mathcal{L}f(x) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{E_x\left[f(X_t)\right] - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in I\!R^d$.

Le générateur infinitésimal a aussi un sens dans le cas inhomogène : si l'on considère l'EDS

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b(s, X_s)\; ds \;+\; \int_0^t \sigma(s, X_s)\; dB_s,$$

alors on peut définir son générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}(f)(t,x) \;=\; b(t,x)f'_x(t,x) \;+\; \frac{\sigma^2(t,x)}{2} f''_{xx}(t,x).$$

Si f est une fonction de $I\!R_+ \times I\!R$ dans $I\!R$ telle que

$$\mathcal{L}(f)(t,x) + f'_t(t,x) = 0,$$

alors le processus $\{f(t, X_t),\ t \geq 0\}$ est une martingale locale.

EXEMPLE : Supposons que

$$dX_t \;=\; rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

et soit f une fonction de $I\!R_+ \times I\!R$ dans $I\!R$ telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) \;+\; \mathcal{L}(f)(t,x) \;=\; rf(t,x), \tag{2.1}$$

alors le processus $(e^{-rt} f(t, X_t), t \geq 0)$ est **une martingale**. En particulier, si f vérifie $\forall x\,,\; f(T,x) = h(x)$ comme condition au bord, alors

$$f(t, X_t) \;=\; e^{r(t-T)}\; E\left[h(X_T) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le cas d'un call européen sur un sous jacent

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dW_t)$$

on a

$$C(t, S_t) \;=\; e^{r(t-T)}\; E\left[(\widetilde{S}_T - K)^+ \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right],$$

pour

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t(rdt + \sigma dW_t)\,.$$

2.4 Martingale exponentielle et condition de Novikov

Soit θ un bon processus local et Z_0 une constante. L'unique solution de l'EDS

$$Z_t \;=\; Z_0 \;+\; \int_0^t \theta_s Z_s \, dB_s \tag{2.2}$$

est

$$Z_t \;=\; Z_0 \exp\left[\int_0^t \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

Le processus Z, noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est appelé **l'exponentielle de Doléans-Dade** de $\theta * B$. C'est une martingale locale positive dès que $Z_0 > 0$.

Théorème 2.3 [Condition de Novikov] *Supposons que*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)\right] \;<\; \infty$$

pour tout $t > 0$. *Alors* $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ *est une vraie martingale.*

Quand la condition de Novikov n'est pas satisfaite, $\mathcal{E}(\theta * B)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et $E\left[Z_t\right] \leq E\left[Z_s\right] \leq Z_0$ pour tout $t \geq s \geq 0$.

Proposition 2.4 *Supposons* $\theta_t = f(t, B_t)$ *où* f *est une fonction globalement lipschitzienne. Alors* $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ *est une vraie martingale.*

3 Lien avec les équations aux dérivées partielles

3.1 Problème parabolique

On considère l'opérateur $\mathcal{A}f(t,x) = f'_t(t,x) + \mathcal{L}f(t,x)$ où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X solution de l'EDS

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b(s,X_s)\;ds \;+\; \int_0^t \sigma(s,X_s)\;dB_s. \tag{3.1}$$

On cherche les solutions du problème parabolique suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathcal{A}f(t,x) & = & 0 & \text{pour tout } x \in I\!R \text{ et } t \in [0,T] \\ f(T,x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in I\!R. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

où g est une fonction de $I\!R$ dans $I\!R$.

Si f est une solution de (3.2) et si pour tout $u \geq t \geq 0$ on note $X_u^{x,t}$ une solution de

$$X_u^{x,t} \;=\; X_t^{x,t} \;+\; \int_t^u b(s, X_s^{x,t})\; ds \;+\; \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})\; dB_s$$

avec pour condition initiale $X_t^{x,t} = x$, la formule d'Itô conduit alors à

$$f(u, X_u^{x,t}) \;=\; f(t,x) \;+\; \int_t^u f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t}) dB_s.$$

On en déduit que

$$g(X_T^{x,t}) \;=\; f(t,x) \;+\; \int_t^T f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})\, dB_s.$$

Si f'_x et σ vérifient des conditions d'intégrabilité suffisante, alors l'intégrale stochastique est une martingale.

On en déduit une importante **représentation probabiliste de la solution** de (3.2) :

$$f(t,x) \;=\; E\left[g(X_T^{x,t})\right].$$

On écrit parfois ce résultat sous la forme $f(t,x) = E_{x,t}\left[g(X_T)\right]$, où X est la solution de (3.1) prise sous la probabilité $P_{x,t}$ qui est telle que processus X prend la valeur x à l'instant t.

On peut s'intéresser à un problème un peu plus général que (3.2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}f(t,x) & = & \alpha f(t,x) & \text{pour tout } x \in I\!R \text{ et } t \in [0,T] \\ f(T,x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in I\!R. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

avec $\alpha > 0$. Avec les notations précédentes, si f est solution de (3.3), la formule d'Itô entre t et T conduit à

$$e^{-\alpha T} f(T, X_T^{x,t}) \;=\; e^{-\alpha t} f(t,x) \;+\; \int_t^T e^{-\alpha s} f'_x(s, X_s^{x,t}) \sigma(s, X_s^{x,t})\, dB_s.$$

A nouveau sous des conditions d'intégrabilité suffisantes sur f'_x et σ, l'intégrale stochastique est une martingale et on en déduit la représentation probabiliste

$$f(t,x) \;=\; E_{x,t}\left[e^{\alpha(t-T)} g(X_T) \right].$$

3.2 Formule de Black & Scholes

On considère à nouveau un sous jacent de dynamique

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t)\,.$$

La solution de l'équation de Black & Scholes

$$xr\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) \;+\; \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) \;+\; \frac{\sigma^2 x^2}{2}\,\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t,x) \;=\; rC(t,x)$$

avec $C(T,x) = (x-K)^+$, est donnée par

$$C(t,x) \;=\; E\left[e^{r(t-T)}(\widetilde{S}_T^{x,t} - K)^+\right] \tag{3.4}$$

avec

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t(rdt + \sigma dW_t)\,.$$

Soit

$$\widetilde{S}_T^{x,t} = xe^{\sigma\sqrt{T-t}G+(r-\sigma^2/2)(T-t)}$$

et $G \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $t = 0$, le calcul donne

$$\begin{aligned}
E\left[e^{-rT}(\widetilde{S}_T^x - K)^+\right] &= e^{-rT}\left(E\left[\widetilde{S}_T^x \mathbb{1}_{\{\widetilde{S}_T^x \geq K\}}\right] \; - \; KP\left[\widetilde{S}_T^x \geq K\right]\right) \\
&= xe^{-rT}E\left[e^{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)}\mathbb{1}_{\left\{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)\geq \ln(K/x)\right\}}\right] \\
&\quad -Ke^{-rT}P\left[\sigma\sqrt{T}\,G + (r-\sigma^2/2)(T) \;\geq\; \ln(K/x)\right]
\end{aligned}$$

L'espérance et la probabilité se calculent alors en explicitant les intégrales qui font intervenir la densité gaussienne.

L'expression (3.4) permet également de calculer le 'Delta' de l'option : dans le cas $t = 0$, on a

$$C(0,x) \;=\; E\left[e^{-rT}(xM_T e^{rT} - K)^+)\right]$$

avec la notation $S_t = xM_t e^{rt}$. En dérivant par rapport à x sous l'espérance, on retrouve

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0,x) \;=\; E\left[M_T 1_{\{xM_T e^{rT} \geq K\}}\right] \;=\; \mathcal{N}(d_1)$$

avec la formule pour d_1 donnée au chapitre précédent.

3.3 Formule de Feynman-Kac

On s'intèresse au problème de **Sturm-Liouville** :

$$(\alpha + k)f \;=\; \frac{f''}{2} \;+\; g \tag{3.5}$$

où $\alpha > 0$, $k : I\!R \to I\!R^+$ est une fonction continue et $g : I\!R \to I\!R$ une fonction continue telle que:

$$\int_{I\!R} |g(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}}\, dy \;<\; +\infty$$

pour tout $x \in I\!R$. On a le

Théorème 3.1 [Formule de Feynman-Kac] *La fonction f définie par:*

$$f(x) \;=\; E\left[\int_0^\infty g(x+B_t)\exp\left(-\alpha t - \int_0^t k(x+B_s)ds\right)dt\right],$$

est l'unique solution bornée et $\mathcal{C}^2$ de (3.5).

Ce résultat nous donne en particulier la transformée de Laplace en temps de la variable

$$g(B_t)\exp - \int_0^t k(B_s)ds$$

pour toute fonction g, et donc par inversion la loi du couple

$$\left(B_t, \int_0^t k(B_s)ds\right).$$

La formule de Feynman-Kac permet aussi de calculer la densité de la variable aléatoire

$$A_t^+ \;=\; \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\infty[}(B_s)\,ds$$

qui représente **le temps d'occupation de $\mathbb{R}^+$** par le Brownien. En effet, si on pose $k(x) = \beta \mathbb{1}_{x\geq 0}$ et $g(x) = 1$, on en déduit que pour $\alpha, \beta > 0$ la fonction

$$f(x) \;=\; E\left[\int_0^\infty \exp\left(-\alpha t - \beta \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x + B_s)ds\right) dt\right]$$

est solution de l'EDO

$$\begin{cases} \alpha f(x) & = & 1 - \beta f(x) + \frac{f''(x)}{2} & \text{si } x \geq 0, \\ \alpha f(x) & = & 1 + \frac{f''(x)}{2} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

L'unique solution bornée et continue de cette EDO est donnée par:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} Ae^{-x\sqrt{2(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{\alpha+\beta} & \text{si } x \geq 0, \\ Be^{x\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En imposant la continuité de f et f' en zéro, on trouve

$$A \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} - \frac{1}{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad B \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} - \frac{1}{\alpha}\,.$$

On en déduit que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} E\left[e^{-\beta A_t^+}\right] dt \;=\; f(0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

et, en utilisant l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int_0^t du \frac{e^{-\beta u}}{\pi\sqrt{u(t-u)}} \right) dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}\,,$$

que la densité de A_t^+ est donnée par:

$$P\left[A_t^+ \in du\right] \;=\; \frac{\mathbb{1}_{\{u<t\}}du}{\pi\sqrt{u(t-u)}}\,.$$

La fonction de répartition de cette loi est

$$P\left[A_t^+ \leq \theta\right] \;=\; \int_0^\theta \frac{ds}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \;=\; \int_0^{\theta/t} \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \;=\; \frac{2}{\pi}\arg\sin\sqrt{\frac{\theta}{t}}$$

et l'on donne alors à la loi de A_t^+ le nom de **loi de l'arcsinus**. On remarque enfin que

$$P\left[A_t^+ \leq \theta\right] \;=\; P\left[tA_1^+ \leq \theta\right],$$

ce qui montre que les variables A_t^+ et tA_1^+ ont même loi. On aurait pu aussi obtenir ce résultat directement par scaling du Brownien.

4 Processus de Bessel

4.1 Norme d'un mouvement Brownien n-dimensionel

Soit $n > 1$ et $B = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ un mouvement Brownien n-dimensionel. Soit X défini par $X_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_i)^2(t)$.

$$dX_t^2 = \sum_{i=1}^n 2B_i(t)dB_i(t) + n\,dt$$

Le processus β défini par

$$d\beta_t = \frac{1}{X_t} B_t \cdot dB_t = \frac{1}{||B_t||} \sum_{i=1}^n B_i(t)dB_i(t), \quad \beta_0 = 0,$$

est un mouvement Brownien.

$$d(X_t^2) = 2X_t d\beta_t + n\,dt\,.$$

$$dX_t = d\beta_t + \frac{n-1}{2}\frac{dt}{X_t}$$

En posant $V_t = X_t^2$

$$dV_t = 2\sqrt{V_t}d\beta_t + n\,dt\,.$$

On dit que X **est un processus de Bessel (BES)** de dimension n, et que V **est un processus de Bessel carré (BESQ)** de dimension n.

4.2 Définition générale

Pour tout $\delta \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, l'unique solution forte de

$$\rho_t = \alpha + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{\rho_s}\, dW_s$$

est le **processus de Bessel carré de dimension δ**, partant de α et est noté BESQ^δ.

Soit ρ un BESQ^δpartant de α. Le processus $R = \sqrt{\rho}$ est un processus de Bessel de dimension δ, partant de $a = \sqrt{\alpha}$ et est noté BES^δ.

Le nombre $\nu = (\delta/2) - 1$ (soit $\delta = 2(\nu + 1)$) est l'indice du processus de Bessel, et un processus de Bessel d'indice ν est noté $\mathrm{BES}^{(\nu)}$.

Pour $\delta > 1$, un BES^δest solution de

$$R_t = \alpha + W_t + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s}\, ds\,.$$

4.3 Probabilités de transition

Les fonctions de Bessel modifiées I_ν et K_ν solutions de

$$x^2u''(x) + xu'(x) - (x^2 + \nu^2)u(x) = 0$$

sont données par :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu + n + 1)}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))}{2 \sin \pi z}$$

Les probabilités de transition $q_t^{(\nu)}$ d'un BESQ$^{(\nu)}$sont

$$q_t^{(\nu)}(x,y) = \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) I_\nu(\frac{\sqrt{xy}}{t})$$

et le processus de Bessel d'indice ν a une probabilité de transition $p_t^{(\nu)}$ donnée par

$$p_t^{(\nu)}(x,y) = \frac{y}{t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2t}) I_\nu(\frac{xy}{t})$$

5 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t \tag{5.1}$$

• L'unique solution telle que $r_0 = x > 0$ r^x est un processus positif pour $k\theta \geq 0$. ll n'est pas possible d'obtenir une formule explicite.

• Le processus de CIR process (5.1) est un BESQ changé de temps : en effet,

$$r_t = e^{-kt}\rho(\frac{\sigma^2}{4k}(e^{kt} - 1))$$

où $(\rho(s), s \geq 0)$ est un BESQ$^\delta(\alpha)$, avec $\delta = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$.

- Si $T_0^x \stackrel{def}{=} \inf\{t \geq 0 : r_t^x = 0\}$ et $2k\theta \geq \sigma^2$ alors $P(T_0^x = \infty) = 1$.

- Si $0 \leq 2k\theta < \sigma^2$ et $k > 0$ alors $P(T_0^x < \infty) = 1$ et si $k < 0$ on a $P(T_0^x < \infty) \in]0, 1[$.

Théorème 5.1 *Soit r le processus vérifiant*

$$dr_t \;=\; k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t.$$

L'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle sont données par

$$E(r_t\,|\mathcal{F}_s) \;=\; r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}),$$

$$Var(r_t\,|\mathcal{F}_s) \;=\; r_s\,\frac{\sigma^2(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)})}{k} + \frac{\theta\sigma^2(1 - e^{-k(t-s)})^2}{2k}.$$

5.0.1 Calcul du prix d'un zéro-coupon

Proposition 5.2 *Soit*

$$dr_t \;=\; a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t.$$

Alors

$$E\left(\exp - \int_t^T r_u\, du\,|\mathcal{F}_t\right) = G(t, r_t)$$

avec

$$G(t,x) = \Phi(T-t)\exp[-x\Psi(T-t)]$$

$$\Psi(s) = \frac{2(e^{\gamma s}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma},\ \Phi(s) = \left(\frac{2\gamma e^{(\gamma+a)\frac{s}{2}}}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\rho^2}},\ \gamma^2 = a^2+2\rho^2\,.$$

Si l'on note $B(t,T)$ le prix du zero-coupon associé,

$$B(t,T) \;=\; \Phi(T-t)\exp[-r_t\Psi(T-t)]$$

on montre que

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r_t dt + \sigma(T-t,r_t)dB_t\right)$$

avec $\sigma(u,r) = \sigma\Psi(u)\sqrt{r}$