Options exotiques

Nicole El Karoui,[*] Monique Jeanblanc[†]

April 18, 2000

1 Introduction

Les options exotiques sont des produits complexes, qui constituent un marché d'une réelle importance depuis les années 1990. Leur nom vise surtout à les différencier des options standards européennes ou américaines. Ce sont des options qui ne sont traitées que sur les marchés de gré à gré (Over the Counter) à la différence des options standards traitées dans les marchés organisés. Elles visent à répondre à des besoins spécifiques d'assurance des grands groupes financiers, des compagnies d'assurance, fonds de pension, etc...
La notion d'exotisme est bien sûr toute relative, car au fur et à mesure qu'un produit financier devient très liquide il perd progressivement son caractère d'exotisme.

L'intérêt pour les options exotiques provient de la réduction de l'investissement par rapport à l'option classique qu'elles offrent souvent. Les options barrières sont un exemple d'une telle réduction, puisque l'option pourra être exercée dans un nombre de configurations moindre que l'option classique, par exemple seulement si le sous-jacent est passé en dessous d'une barrière définie dans le contrat. Pour le vendeur de l'option, la principale difficulté sera de mettre en place une stratégie de couverture efficace, car le delta de telles options présente souvent des discontinuités, notamment au voisinage de la barrière.

Nous nous intéressons particuliérement aux options barrières et aux options lookbacks. De manière assez surprenante, il existe des formules fermées pour le prix de telles options, qui reposent sur un principe de symétrie bien connu des probabilistes. Elles ont été obtenues par Reiner [4] pour les options barrières et par Conze et Visvanathan [2] pour les lookbacks. Peter Carr [1] est le premier à avoir montré comment ce principe, appliqué directement à un sous-jacent log-normal sans coût de portage permet de définir un prix et une couverture statique d'options barrière.
Nous reprenons les mêmes idées, en montrant comment elles s'étendent à un sous-jacent log-normal quelconque. Les options barrières binaires nous servent de transi-

[*]CMAP, Ecole Polytechnique. 91128 Palaiseau Cedex, France
[†]Université d'Evry-Val-d'Essonne, Boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry Cedex, France.

tion pour l'obtention des formules fermées pour les barrières et les look-backs et de plus elles nous permettent de proposer des stratégies de couverture quasi-statiques.

2 Symétrie Call-Put, Delta de couverture

2.1 Formules de symétrie Call-Put

La célèbre formule de Black et Scholes écrite sur un sous-jacent avec taux d'intérêt r et dividende q, de dynamique

$$dX_t = X_t[(r-q)dt + \sigma dW_t]$$

donne le prix à la date t d'un Call de prix d'exercice K de maturité T, lorsque le sous-jacent vaut x à la date t

$$\text{Call }(t,x,K) = xe^{-q(T-t)}\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{xe^{-q(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{xe^{-q(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right] \tag{2.1}$$

et celui d'un Put

$$\text{Put }(t,x,K) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{Ke^{-r(T-t)}}{xe^{-q(T-t)}}\right)\right] - xe^{-q(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{Ke^{-r(T-t)}}{xe^{-q(T-t)}}\right)\right] \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\text{Ln}(\alpha) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ d_0(\alpha) &= d_1(\alpha) - \sigma\sqrt{T-t}\,. \end{aligned}$$

Comme d'habitude, $\mathcal{N}$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien. Si σ est une fonction déterministe, il convient de modifier la définition de d_1 et de d_0 par

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= \frac{1}{\Sigma_{t,T}}\text{Ln}(\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma_{t,T} \\ d_0(\alpha) &= d_1(\alpha) - \Sigma_{t,T} \end{aligned}$$

avec $\Sigma_{t,T}^2 = \int_t^T \sigma^2(s)ds$.

Nous rappellons que le Call (resp. le Put) sont des fonctions homogènes

$$\lambda\text{Call }(t,x,K) = \text{Call }(t,\lambda x,\lambda K); \quad \lambda\text{Put }(t,x,K) = \text{Put }(t,\lambda x,\lambda K)\ , \tag{2.3}$$

et que les Delta qui sont la dérivée de l'option par rapport au sous jacent, sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathrm{DeltaC}(t,x,K) &= e^{-q(T-t)}\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{xe^{-q(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right] \\ \mathrm{DeltaP}(t,x,K) &= -e^{-q(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{Ke^{-r(T-t)}}{xe^{-q(T-t)}}\right)\right] \end{aligned}$$

et vérifient

$$\mathrm{DeltaC}\ (t,x,K) = \mathrm{DeltaC}\ (t,\lambda x,\lambda K),\ \mathrm{DeltaP}\ (t,x,K) = \mathrm{DeltaP}\ (t,\lambda x,\lambda K)\,. \tag{2.4}$$

Nous utiliserons souvent que $d_1(\alpha) = -d_0(1/\alpha)$.

Dans toutes les formules, nous notons le temps courant en première variable, la valeur du sous jacent en seconde variable, et la valeur du strike en troisième variable. Ainsi, Call (t,K,x) désigne le prix d'un call sur un sous jacent de valeur K, de strike x. Lorsque le temps considéré est 0, nous ne le faisons pas apparaître. Au moyen des formules explicites (2.1, 2.2), on obtient le résultat suivant

Proposition 2.1 *La formule de symétrie entre Call et Put s'écrit*

$$\mathrm{Call}(t,Ke^{-\mu(T-t)},x) = \mathrm{Put}(t,xe^{-\mu(T-t)},K) \tag{2.5}$$

où μ est le coût de portage $\mu = r - q$.

En utilisant l'homogéneité du prix du Call on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Call}\ (t,x,K) &= e^{-\mu(T-t)}\mathrm{Put}(t,K,xe^{2\mu(T-t)}) && (2.6) \\ \mathrm{Put}\ (t,x,K) &= e^{-\mu(T-t)}\mathrm{Call}(t,K,xe^{2\mu(T-t)}) && (2.7) \end{aligned}$$

2.1.1 Les options binaires et les Delta de couverture

Parmi les options exotiques récemment mises sur le marché, les options binaires sont les plus simples. En théorie, elles ne présentent pas de difficultés d'évaluation, mais la couverture est délicate, car la fonction de couverture est discontinue au voisinage du prix d'exercice.

Un Call binaire (BinC) est une option qui paye 1FF si le sous-jacent est supérieur au strike, et 0 sinon. De même un Put binaire est une option qui paye 1FF si le sous-jacent est inférieur au strike, et 0 sinon.

Le Call binaire est donc la limite quand $h \to 0$ du Call-spread $\frac{1}{h}[C(T,K) - C(T,K+h)]$, c'est à dire l'opposé de la dérivée par rapport au strike d'un Call. De même, le Put binaire est la dérivée du Put par rapport au strike.

Il est bien connu que le prix d'un Call binaire (resp. d'un put binaire) est

$$\begin{aligned} \mathrm{BinC}(t,x,K) &= e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{xe^{\mu(T-t)}}{K}\right)\right] && (2.8) \\ \mathrm{BinP}\ (t,x,K) &= e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{K}{xe^{\mu(T-t)}}\right)\right] && (2.9) \end{aligned}$$

En dérivant la formule de symétrie (2.6) par rapport à la variable K, on obtient les formules de symétris suivante et des stratégies de replication statique pour les Delta:

Proposition 2.2

$$\begin{aligned} \mathrm{BinC}(t,x,K) &= -e^{-\mu(T-t)}\mathrm{DeltaP}(t,K,xe^{2\mu(T-t)}) && (2.10) \\ \mathrm{BinP}(t,x,K) &= e^{-\mu(T-t)}\mathrm{DeltaC}(t,K,xe^{2\mu(T-t)} && (2.11) \end{aligned}$$

Les Delta sont replicables au moyen de portefeuillles statiques

$$\begin{aligned} \mathrm{DeltaC}\ (t,x,K) &= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Call}\ (t,x,K) + K\mathrm{BinC}\ (t,x,K)\right] \\ \mathrm{DeltaP}\ (t,x,K) &= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Put}\ (t,x,K) - K\mathrm{BinP}\ (t,x,K)\right] \end{aligned} \qquad (2.12)$$

3 Options barrières : caractéristiques générales

Les options barrières sont un nom générique donné aux produits dérivés dont les payoffs dépendent du fait que le sous-jacent a atteint ou non un niveau donné (ou barrière) durant la durée de vie de l'option. Les plus courantes sont

- knock-out options : L'option expire automatiquement quand le sous-jacent touche une ou plusieurs barrières prédéterminées.
- knock-in options : L'option est activée si les barrières sont touchées.

Par ailleurs, ces options barrières sont structurées comme des puts ou calls européens. Par exemple

- Un DOC (down-and-out Call) de strike K, de barrière H et maturité T est l'option d'acheter le sous-jacent au prix K au temps T si le sous-jacent ne descend jamais en-dessous de H.
- Un UOC (up-and-out Call) possède les mêmes caractéristiques, mais la barrière est montante.
- Un DIC (down-and-in Call) est activé si le sous-jacent passe au-dessous de la barrière.
- Un UIC (up-and-in Call) est activé si le sous-jacent passe au-dessus de la barrière .

Les mêmes définitions s'appliquent aux puts et aux options binaires. Par exemple

- Un DIP est un (down-and-in Put).

- Un BinDIC est un Call binaire, qui n'est activé que si le sous-jacent passe au-dessous de la barrière.
- Un DIB (down-and-in Bond) est un produit qui paye 1FF à l'échéance si la barrière a été touchée.

Les options barrières sont spécialement utilisées sur le marché des changes. Elles constituent environ 10% de l'activité de ce domaine.

Exemple :

Une grande entreprise doit périodiquement convertir en marks ses revenus perçus en dollars. Etant donné la faiblesse du Dollar, l'entreprise craint une forte dépréciation de ses revenus en Marks, et cherche à acquérir un put (en dollars sur le mark) expirant dans 6 mois. Si le change mark-dollar est de 1,4225, la valeur d'un put de prix d'exercice 1,42 de maturité 6 mois est de $ 0,039. Si l'entreprise achète un DIP au niveau $H = 1,27$ la valeur de l'option 0,011 est presque 4 fois moindre.

Les options barrières peuvent être classées selon la valeur intrinsèque à la barrière :

- Une option barrière qui est en dehors de la monnaie lorsque la barrière est touchée, (par exemple, pour un DIC telle que $K \geq H$ la valeur intrinsèque $(x-K)^+$ est nulle pour $x = H$) est appellée une *regular* option.
- Une option barrière qui est dans la monnaie lorsque la barrière est touchée, (par exemple, pour un DIC telle que $K < H$ la valeur intrinsèque $(x-K)^+$ est non nulle pour $x = H$) est appellée une *reverse* option.
- Certaines options barrières sont assorties d'une compensation, le *rebate*, sous forme de cash si l'option est out. Le prix du rebate est celui d'une option binaire à barrière. En particulier, le rebate est souvent choisi pour qu'il y ait continuité des payof à maturité à la barrière, soit si le payoff est $f(S_T)$ en T, on choisit un rebate de $f(H)$ à la barrière.

Remarquons que par arbitrage, être long d'une option in et d'une option out est équivalent à détenir une option standard, dite encore *vanilla*. Il suffit donc d'étudier les options in.

4 Evaluation et couverture de l'option DIC regular sur sous-jacent martingale

Nous étudions le cas où l'option barrière est écrite sur un sous-jacent *sans coût de portage*. Elle est payée si le prix du sous-jacent est passé en dessous d'une certaine barrière $H \leq K$.

La dynamique du sous-jacent est une martingale de volatilité déterministe, soit

$$dM_t = M_t \sigma(t) dW_t \,.$$

Dans toute cette section, la date t de négociation de l'option et celle de l'échéance T, ainsi que la volatilité de référence ne seront rappellées dans les prix d'options barrières ou d'options classiques qu'en cas d'ambiguité. La valeur du sous-jacent à la date t de négociation est notée x.

Nous désignons par $\mathrm{DIC}^M(x, K, H)$ le prix de l'option DIC, par $\mathrm{Call}^M(x, K)$ le prix du Call standard sur le sous-jacent **M**artingale. Comme le coût de portage est nul, la formule de symétrie (2.5) s'écrit

$$\mathrm{Call}^M(t, x, K) = \mathrm{Put}^M(t, K, x) \,. \tag{4.1}$$

4.1 Evaluation de l'option DIC regular sans coût de portage

Les résultats de ce paragraphe ont été essentiellement mis en évidence par Peter Carr [1]. Comme l'option est une DIC regular ($K \geq H$), la barrière est inférieure au strike par hypothèse.

Proposition 4.1 *Considérons une option DIC regular sur un sous-jacent sans coût de portage.*
a) Son prix est donné par
(i) Pour $x \leq H$,

$$\mathrm{DIC}^M(x, K, H) = \mathrm{Call}^M(x, K) \,. \tag{4.2}$$

(ii) Pour $x \geq H$,

$$\mathrm{DIC}^M(x, K, H) = \frac{K}{H} \mathrm{Put}^M(x, \frac{H^2}{K}) = \mathrm{Call}^M(H, K\frac{x}{H}) \,. \tag{4.3}$$

b) La replication statique est constituée,
(i) pour $x \geq H$, de K/H Puts de strike H^2/K
(ii) d'un Call pour $x \leq H$.

Démonstration :(i) Lorsque la valeur x du sous-jacent (à la date t) est inférieure à la barrière H, la contrainte est réalisée, l'option est donc une option vanilla classique, et la formule (4.2) en résulte.
(ii) Lorsque la valeur du sous-jacent (à la date t) est supérieure à la barrière, il existe encore une formule explicite pour l'option DIC^M. Nous désignons par

$$T_H = \inf\{s \geq t \,; X_s \leq H\} \tag{4.4}$$

le premier instant après t où le sous-jacent passe en-dessous de la barrière.

Pour évaluer l'option à la date t, nous pouvons par arbitrage choisir d'évaluer l'option à la date T_H pour $T_H < T$ puis donner un prix en t pour ce flux aléatoire payé en T_H. A la barrière, le niveau du sous-jacent est connu, seule la maturité restante $T - T_H$ est aléatoire et l'option DIC^M est équivalente à un $\mathrm{Call}^M(T_H, H, K, T)$. Comme le sous-jacent est martingale, et la volatilité déterministe, la dynamique du sous-jacent initialisé au temps aléatoire T_H et au point H, est, conditionnellement à l'observation du passé jusqu'en T_H à distribution log-normale. La formule de symétrie (4.1) et l'homogénéité du prix du Put montrent que

$$\mathrm{Call}^M(T_H, H, K) = \frac{K}{H}\,\mathrm{Put}^M(T_H, H, \frac{H^2}{K})$$

L'option qui à la barrière vaut $\mathrm{Put}^M(T_H, H, \frac{H^2}{K}, T)$ est un Down and In Put. Par suite, l'option $\mathrm{DIC}^M(x, K, H)$ est équivalente à $\frac{K}{H}$ options $\mathrm{DIP}^M(x, \frac{H^2}{K}, H)$.

A l'échéance, le Put a de la valeur seulement si le sous-jacent est inférieur à $\frac{H^2}{K}$, quantité inférieure à H puisque $H \le K$. La barrière H a donc été atteinte durant la vie de l'option avec une probabilité 1; la barrière n'a donc plus d'influence sur le prix. L'option barrière $\mathrm{DIP}^M(x, \frac{H^2}{K}, H)$ est donc égale à l'option vanilla $\mathrm{Put}^M(x, \frac{H^2}{K})$ pour $H \le K$ d'où le résultat. Il reste à utiliser une nouvelle fois la formule de symétrie pour conclure. □

Proposition 4.2 *Pour $x \ge H$, l'option binaire* BinDIC *vérifie,*

$$\mathrm{BinDIC}^M(x, K, H) = \frac{x}{H}\,\mathrm{BinC}^M(H, \frac{Kx}{H}) \tag{4.5}$$

$$\mathrm{DeltaDIC}^M(x, K, H) = -\frac{K}{H}\mathrm{BinC}^M(H, \frac{Kx}{H}) = -\frac{Ke^{-rT}}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H^2}{xK}))\,. \tag{4.6}$$

La BinDIC est replicable par un portefeuille dynamique de DeltaP

$$\mathrm{BinDIC}^M(x, K, H) = -\frac{x}{H}\mathrm{DeltaP}(x, \frac{H^2}{K})\,. \tag{4.7}$$

Le prix de l'option binaire DIB *est donné par*

$$\mathrm{DIB}^M(x, H) = \frac{xe^{-rT}}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H}{x})) + \mathcal{N}(d_1(\frac{H}{x}))\,.$$

Démonstration : La formule concernant les options binaires est obtenue par dérivation par rapport à K des premiers et troisièmes termes de la formule (4.3) en remarquant que $\mathrm{BinDIC}^M(x, K, H) = -\frac{\partial}{\partial K}\mathrm{DIC}^M(x, K, H)$. Celle sur le Delta est obtenue en dérivant les premiers et deuxièmes termes de la formule (4.3) par rapport à x. L'option binaire DIB vaut 1 si la barrière est touchée avant T, soit

$$\begin{aligned}\mathrm{DIB}^M(x,H) &= \mathrm{BinDIC}^M(x,H,H)+\mathrm{BinP}^M(x,H)\\ &= \frac{x}{H}\mathrm{BinC}^M(H,x)+\mathrm{BinP}^M(x,H)\\ &= e^{-rT}[\frac{x}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H}{x}))+\mathcal{N}(d_1(\frac{H}{x}))]\,.\end{aligned}$$

Notons que cette quantité est plus petite que 1. □

On obtient de la même façon le prix d'un Put binaire :

Proposition 4.3 *Le prix d'un Up and In Put regular ($H \geq K$) sur un sous jacent sans coût de portage est donné par*
(i) Pour $x \geq H$, $\mathrm{UIP}^M(x,K,H)=\mathrm{Put}^M(x,K)$,
(ii) Pour $x \leq H$, $\mathrm{UIP}^M(x,K,H)=\dfrac{K}{H}\mathrm{Call}^M(x,\dfrac{H^2}{K})$.

4.2 Couverture de l'option DIC regular

L'option DIC regular est réplicable statiquement par $\frac{K}{H}$ Puts tant que le sous-jacent est au dessus de la barrière et par un Call standard ensuite. A la barrière, la symétrie Call-Put garantit qu'il n'y a pas de discontinuité du prix. Il n'en est pas de même du delta de couverture qui admet une limite à droite donnée d'après (4.6) par

$$\Delta_+\mathrm{DIC}^M(H,K,H)=-\frac{Ke^{-rT}}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H}{K}))$$

alors que, d'après (4.2) la limite à gauche est donnée par

$$\Delta_-\mathrm{DIC}^M(H,K,H)=\mathrm{DeltaC}^M(H,K)=\mathcal{N}(d_1(\frac{H}{K}))$$

Par suite, le delta de couverture n'est pas continu à la barrière, et admet un saut négatif, égal à la probabilité pour qu'un sous jacent issu de K franchisse la barrière avant T

$$\begin{aligned}[\Delta_+-\Delta_-]\mathrm{DIC}^M(H,K,H) &= -\frac{e^{-rT}}{H}[K\mathcal{N}(d_0(\frac{H}{K}))+H\mathcal{N}(d_1(\frac{H}{K}))]\\ &= -\mathrm{DIB}^M(K,H)\,.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Le saut est donc toujours plus petit que 1 en valeur absolue.

4.3 Version mathématisée des résultats précédents

Nous considérons un sous-jacent martingale $(M_t, t \geq 0)$, c'st-à-dire sans coût de portage, de volatilité déterministe $\sigma = (\sigma(t), t \geq 0)$ sous la probabilité risque-neutre $\mathbf{Q}$, soit

$$dM_t = M_t\sigma(t)dW_t,\; M_0 = x\,. \tag{4.9}$$

Remarquons que si M_1 et M_2 vérifient (4.9) avec

$$M_1(0) = x_1, M_2(0) = x_2 \quad M_2(t) = \frac{x_2}{x_1} M_1(t)\,. \tag{4.10}$$

Comme d'habitude, le prix d'une option d'achat (de vente) et celui d'une option binaire sont donnés par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Call}^M(x,K,T) &= e^{-rT}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[(M_T-K)^+] \\
\mathrm{Put}^M(x,K,T) &= e^{-rT}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[(M_T-K)^-] \\
\mathrm{BinC}^M(x,K,T) &= e^{-rT}\mathbf{Q}[M_T \geq K] \\
\mathrm{BinP}^M(x,K,T) &= e^{-rT}\mathbf{Q}[M_T \leq K]\,.
\end{aligned}$$

Les options barrières ont des pay-offs de la même forme, lorsque le sous-jacent est passé au-dessous d'une certaine frontière. Introduisons le premier temps de passage en dessous de la frontière et les événements qui traduisent que la frontière a été franchie,

$$\begin{aligned}
&T_H = \inf\{t; M_t \leq H\} \quad \inf(\emptyset) = +\infty \\
&\{T_H \leq T\} = \{\inf_{0\leq t\leq T} M_t \leq H\}\,.
\end{aligned}$$

Les prix à l'émission des options barrières et des options binaires associées sont liés flux terminaux par les relations

$$\begin{aligned}
e^{rT}\mathrm{DIC}^M(x,K,H) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_{\{T_H\leq T\}}(M_T-K)^+] \\
e^{rT}\mathrm{BinDIC}^M(x,K,H) &= \mathbf{Q}[\{T_H \leq T\}\cap\{M_T \geq K\}] \\
&= \mathbf{Q}[\{\inf_{0\leq t\leq T} M_t \leq H\}\cap\{M_T \geq K\}]\,.
\end{aligned}$$

4.3.1 Loi jointe du minimum et du sous jacent d'un Brownien géométrique martingale

Les formules précédentes donnent la loi jointe du couple $(\inf_{0\leq t\leq T} M_t, M_T)$ et donc la loi du minimum.

Proposition 4.4 *Soit $(M_t, t \geq 0)$ un sous-jacent martingale log normal sous la probabilité Q*

$$dM_t = M_t\sigma(t)dW_t\,,\ M_0 = x$$

de condition initiale x avec $x \geq H$.
Pour tout $K \geq H$, la loi du couple $(\inf_{t\leq T} M_t,\ M_T)$ est donnée par

$$Q(\inf_{t\leq T} M_t \leq H,\ M_T \geq K) = \frac{x}{H}Q(M_T \geq \frac{Kx^2}{H^2}) = \frac{x}{H}\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{H^2}{Kx}\right)\right]$$

et celle du minimum $\inf_{t\leq T} X_t$ est

$$Q(\inf_{t\leq T} M_t \leq H) = \frac{x}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H}{x})) + \mathcal{N}(d_1(\frac{H}{x}))$$

Si nous écrivons barrière et strike en pourcentage de la valeur initiale, nous obtenons que

$$Q(\inf_{t\leq T} M_t \leq h,\ M_T \geq k|M_0 = 1) = \frac{1}{H}Q(M_T \geq \frac{k}{h^2}|M_0 = 1)$$

Cette formule est l'analogue pour les martingales exponentielles du principe de symétrie obtenu pour le mouvement Brownien. En passant au logarithme, quand σ est constant, on peut d'ailleurs retrouver la formule pour le Brownien avec drift :

$$P(W_T - \nu T \geq \alpha, \inf_{0\leq t\leq T}(W_t - \nu t) \leq \beta) = e^{-2\nu\beta}P(W_T - \nu T \geq \alpha - 2\beta)$$

.

L'étude des prix à la date t permet de calculer les distributions conditionnelles du minimum et du sous jacent. Pour ce faire, nous avons besoin de distinguer la valeur courante du sous-jacent, soit $M_t = y$, du minimum réalisé sur la période $(0, t)$, soit $m = \inf_{s\leq t} M_s$ (avec $m \leq y$). Ceci nous permet de distinguer le cas où l'option a été activée ($m \leq H$) du cas où elle ne l'a pas été ($m > H$). Dans ce dernier cas, l'événement $\inf_{0\leq u\leq T} M_u \leq H$ est identique à l'événement $\inf_{t\leq u\leq T} M_u \leq H$.

De même, l'égalité sur les options binaires

$$\mathrm{BinDIC}^M(t, M_t, K, H) = \frac{M_t}{H}\mathrm{BinC}^M(H, \frac{KM_t}{H})$$

se traduit en utilisant (4.10) par les égalités suivantes, valables sur sur $\{T_H \geq t\}$,

$$\mathbf{Q}(\{T_H \leq T\} \cap \{M_T \geq K\}|\mathcal{F}_t] = \mathbf{Q}[\{\inf_{t\leq u\leq T} M_u \leq H\} \cap \{M_T \geq K\}|\mathcal{F}_t]$$

$$= \frac{M_t}{H}\mathbf{Q}[M_T\frac{H}{M_t} \geq \frac{KM_t}{H}|\mathcal{F}_t] = \frac{M_t}{H}\mathcal{N}(d_0(\frac{H^2}{KM_t})) \qquad (4.11)$$

L'égalité (4.11) nous donne la fonction de répartition conditionnelle de la loi du couple $(\inf_{0\leq t\leq T} M_t, M_T)$, sur $\{T_H \geq t\}$, comme une fonction dérivable.
Pour simplifier les écritures des densités, nous noterons $x = M_t$ et $m = \inf_{0<u<t} M_u$, qui sont deux v.a. connues à la date t. L'événement $\{T_H \geq t\}$ est donc identique à $\{x \geq m > H\}$
La loi conditionnelle étant donnée $\mathcal{F}_t$ admet donc une densité $f(h, k)$ sur le domaine $0 < h < k$ que l'on calcule à partir de la densité p_{σ^2} d'une loi log-normale, d'espérance 1 et de $\mathrm{var}(\mathrm{Ln}X) = \Sigma^2_{t,T}$,

$$p_{\sigma^2}(y) = \frac{1}{y\Sigma_{t,T}}\exp[-\frac{1}{2\Sigma^2_{t,T}}\left(\mathrm{Ln}(y) - \frac{1}{2}\Sigma^2_{t,T}\right)^2]. \qquad (4.12)$$

Proposition 4.5 *La densité f du couple $(\inf_{t\leq u\leq T} M_u, M_T)$ est donnée sur le domaine $\{h < k, h < m\}$ par*

$$Q(\inf_{t\leq u\leq T} M_u \in dh, M_T \in dk) = [\frac{3x^2}{h^4}p_{\sigma^2}(\frac{kx}{h^2}) + \frac{2kx^3}{h^6}p'_{\sigma^2}(\frac{kx}{h^2})]\,dh\,dk \qquad (4.13)$$

Remarquons que lorsque la volatilité est constante, la formule sur les options binaires peut s'interpréter, à condition de passer au logarithme comme une formule donnant la loi du minimum et de l'état d'un mouvement brownien avec drift.

5 Evaluation et couverture de l'option DIC regular. Le cas général

5.1 Evaluation

Les caractéristiques de l'option sont les mêmes, mais le sous-jacent a un coût de portage $\mu = r - q$: sous la probabilité risque-neutre sa dynamique est de la forme

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r-q)dt + \sigma_X dW_t\,, X_0 = x\,. \tag{5.1}$$

Une méthode classique pour se ramener au cas martingale est d'étudier le forward associé $X_t^F = X_t e^{\mu(T-t)}$ qui est une martingale sous la probabilité forward neutre. Dans ce cas, il est nécessaire d'actualiser la barrière. Nous allons éviter cet inconvénient en remarquant que tout actif lognormal est une puissance d'un actif martingale.

Lemme 5.1 *Soit X un sous-jacent vérifiant l'équation (5.1) sous la probabilité risque neutre. Il existe une martingale log-normale M, de valeur initiale $M_0 = m = x^\gamma$, de volatilité $\sigma_M = \gamma\sigma_X$, telle que $X_t = (M_t)^{\frac{1}{\gamma}}$ où γ est le nombre réel défini par*

$$\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma_X^2} \tag{5.2}$$

Démonstration :Nous cherchons une martingale log-normale de volatilité σ_M telle que

$$\exp(\mu t + \sigma_X W_t - \frac{1}{2}\sigma_X^2 t) = \exp[\frac{1}{\gamma}(\sigma_M W_t - \frac{1}{2}\sigma_M^2 t)]$$

L'identification conduit à $\sigma_M = \gamma\sigma_X$ et $\mu - \frac{1}{2}\sigma_X^2 = -\frac{\gamma\sigma_X^2}{2}$ d'où l'égalité $\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma_X^2}$ et

$$M_t = M_0 \exp[\gamma\sigma_X W_t - \frac{1}{2}(\sigma_X\gamma)^2 t]. \tag{5.3}$$

□

Cette remarque[1] permet d'évaluer et de répliquer instantanément la BinDIC^X sur un sous-jacent X de dynamique (5.1) et plus généralement l'option DIC.

Théorème 5.2 *L'option Down and In binaire sur un sous-jacent avec coût de portage μ est réplicable par un portefeuille dynamique de DeltaPut dont les strikes dépendent de barrières actualisées, soit, pour $x \geq H$*

$$\text{BinDIC}^X(x, K, H) = -\left(\frac{x}{H}\right)^\gamma e^{-\mu T}\text{DeltaP}^X(x, \frac{(He^{\mu T})^2}{K}) \tag{5.4}$$

[1]Il convient de remarquer que si les coefficients de (5.1) ne sont pas constants, la méthode précédente n'est opérationnelle que si la fonction $\mu(\cdot)$ est proportionnelle à la fonction $\sigma_X^2(\cdot)$.

De la même façon, l'option DIC regular est réplicable par un portefeuille dynamique de Puts dont les strikes dépendent de barrières actualisées, soit pour $x \geq H$

$$\mathrm{DIC}^X(x,K,H) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} \frac{K}{He^{\mu T}}\, \mathrm{Put}^X(x, \frac{(He^{\mu T})^2}{K}) \tag{5.5}$$

Les prix sont obtenus à partir des égalités

$$\begin{aligned} \mathrm{BinDIC}^X(x,K,H) &= \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinC}^X(H, \frac{Kx}{H}) && (5.6)\\ \mathrm{DIC}^X(x,K,H) &= \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} \mathrm{Call}^X(H, \frac{Kx}{H}) && (5.7) \end{aligned}$$

Démonstration : Nous supposons dans toute la première partie de la preuve que le paramètre γ est positif, de telle sorte que le sous-jacent avec coût de portage est une fonction croissante du sous-jacent martingale.
Cette identification permet de valoriser facilement les options binaires

$$\begin{aligned} \mathrm{BinC}^X(x,K) &= \mathrm{BinC}^M(x^\gamma, K^\gamma)\\ \mathrm{BinDIC}^X(x,K,H) &= \mathrm{BinDIC}^M(x^\gamma, K^\gamma, H^\gamma)\,. \end{aligned}$$

D'après l'équation (4.3)

$$\mathrm{BinDIC}^M(x^\gamma, K^\gamma, H^\gamma) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinC}^M(H^\gamma, \left(\frac{Kx}{H}\right)^{\gamma}) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinC}^X(H, \frac{Kx}{H}). \tag{5.8}$$

La formule de symétrie Call-Put (2.6) sur les options binaires et les formules (2.4) impliquent que

$$\mathrm{BinC}^X(H, \frac{Kx}{H}) = -e^{-\mu T}\mathrm{DeltaP}^X(\frac{Kx}{H}, He^{2\mu T}) = -e^{-\mu T}\mathrm{DeltaP}^X(x, \frac{(He^{\mu T})^2)}{K})\,. \tag{5.9}$$

Il reste à prendre une primitive de cette option entre K et $+\infty$ pour avoir le prix de DIC^X

$$\begin{aligned} \mathrm{DIC}^X(x,K,H) &= \int_K^\infty \mathrm{BinDIC}^X(x,k,H)dk = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \int_K^\infty \mathrm{BinC}^X(H, k\frac{x}{H})dk\\ &= \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} \mathrm{Call}^X(H, \frac{Kx}{H})\,. \end{aligned}$$

La formule de symétrie Call-Put (2.6) donne

$$\mathrm{DIC}^X(x,K,H) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} \frac{K}{He^{\mu T}}\, \mathrm{Put}^X(x, \frac{(He^{\mu T})^2}{K})\,. \tag{5.10}$$

Dans le cas où γ est négatif, l'option DIC binaire sur le sous-jacent est transformée en une option UIP binaire sur le sous-jacent martingale. En particulier, on a de la même façon que

$$\mathrm{BinDIC}^X(x,K,H) = \mathrm{BinUIP}^M(x^\gamma, K^\gamma, H^\gamma)\,,$$

et que $\mathrm{BinP}^M(H^\gamma, \left(\frac{Kx}{H}\right)^\gamma) = \mathrm{BinC}^X(H, \frac{Kx}{H})$ puisque ces deux options binaires ont même payoff. D'après l'analogue de l'équation (4.5) pour les options UIP

$$\mathrm{BinUIP}^M(x^\gamma, K^\gamma, H^\gamma) = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathrm{BinP}^M(H^\gamma, \left(\frac{Kx}{H}\right)^\gamma) = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathrm{BinC}^X(H, \frac{Kx}{H}).$$

Ce qui est l'analogue de la formule obtenue dans le cas des coûts de portage positifs, qui s'étend donc sans restriction au cas des coûts de portage négatifs. □

Remarque
Remarquons que lorsque $\mu = 0$ et $\gamma = 1$ la formule ci-dessus donne exactement la formule (4.3).

La présence de coûts de portage revient d'une part à considérer une frontière forward déjà introduite par P. Carr pour encadrer le prix de l'option. En effet si μ est positif et $(x/H)^{\gamma-1} \leq 1$, le membre de droite donne la majoration de Carr, si μ est négatif, c'est la minoration. Nous voyons que l'approximation de Carr est d'autant meilleure que $\frac{2\mu}{\sigma_X^2}$ est petit ou que x est proche de H puisqu'à la frontière les deux formules coincident.

5.2 Couverture de l'option DIC regular dans le cas général

Comme pour l'option DIC regular sans coût de portage, nous avons une discontinuité du delta à la frontière. Par analogie avec les calculs précédents et en utilisant (2.12), nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_+ \mathrm{DIC}^X(t, H, K, H) &= \frac{\gamma - 1}{H} \mathrm{Call}^X(t, H, K) - \frac{K}{H} \mathrm{BinC}^X(t, H, K) \\
&= \frac{\gamma}{H} \mathrm{Call}^X(t, H, K) - \mathrm{DeltaC}^X(t, H, K)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(\Delta_+ - \Delta_-)\mathrm{DIC}^X(t, H, K, H) = \frac{\gamma}{H} \mathrm{Call}^X(t, H, K) - 2\,\mathrm{DeltaC}^X(t, H, K) \qquad (5.11)$$

mais cette quantité n'est pas toujours plus petite que 1 en module ce qui était le cas pour des coûts de portage nuls. Ainsi, en fonction du niveau des coûts de portage la discontinuité peut être soit positive, soit négative.
Pour la convexité du payoff, les choses sont plus compliquées que précédemment puisque sa convexité peut changer en des points différents de H, en raison de la multiplication par $(x/H)^{\gamma-1}$ du prix du put pour $x \geq H$.

6 Evaluation et couverture des options à barrière reverse

L'exemple typique est le Down-and-out Call. En toute généralité, il se déduit des options précédentes par des arguments d'arbitrage. Les options binaires à barrière vont jouer un rôle important dans la prise en compte du caractère reverse par lequel les options sont dans la monnaie à la barrière.

6.1 Evaluation des options DIB

Les options Down-and-in Bond (DIB) payent 1F à l'échéance si la barrière est touchée entre 0 et T. Mathématiquemment, cette option a pour prix $e^{-rT}P(\min_{s\leq T} X_s \leq H)$. Ces options s'expriment aisément à partir des $\mathrm{BinDIC}(x,H,H)$ et d'un Put binaire standard, puisque la première option paye 1F si le sous jacent dépasse H et si la barrière est touchée, la deuxième paye 1F si le sous jacent est à échéance sous la barrière. Détenir ces deux options garantit un payoff de 1F si la barrière a été touchée; par suite

$$
\begin{aligned}
\text{pour } x \geq H, \mathrm{DIB}(x,H) &= \mathrm{BinP}(x,H) + \mathrm{BinDIC}(x,H,H) \\
\text{pour } x \leq H, \mathrm{DIB}(x,H) &= B(0,T)\,.
\end{aligned}
$$

En utilisant les équations (5.6) et la formule de Black et Scholes, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DIB}(x,H) &= \mathrm{BinP}(x,H) + \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinC}(H,x) \\
&= e^{-rT}\left[\mathcal{N}(d_1(\frac{H}{xe^{\mu T}})) + \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma}\mathcal{N}(d_0(\frac{He^{\mu T}}{x}))\right] \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

Il peut être intéressant de noter que la BinDIC peut être répliquée par des options standard et digitales, puisque d'après les formules (2.12), (5.4) et (5.5)

$$
\begin{aligned}
& DIC(x,H,H) + H\mathrm{BinDIC}(x,H,H) \\
= & \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} e^{-\mu T}\left[\mathrm{Put}^X(x,He^{2\mu T}) - H\frac{x}{H}\mathrm{DeltaPut}^X(x,He^{2\mu T}\right] \\
= & \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} e^{\mu T} H\mathrm{BinP}^X(x,He^{2\mu T})
\end{aligned}
$$

Il nous reste à utiliser cette remarque pour définir la couverture d'une option DIB à l'aide d'options binaires simples et de DIC regular.

$$
\mathrm{DIB}(x,H) = \mathrm{BinP}(x,H) + \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} e^{\mu T}\mathrm{BinP}(x,He^{2\mu T}) - \frac{1}{H}\mathrm{DIC}(x,H,H) \qquad (6.2)
$$

6.2 Evaluation de la DIC reverse, cas $K < H$

Etudions l'option DIC reverse avec strike inférieur à la barrière ($K \leq H$). Nous pouvons décomposer le payoff d'une telle option en distinguant si le sous jacent dépasse la barrière à l'échéance ou non. Nous nous plaçons dans le cas $x \geq H$.

- L'option qui paye $(X_T - K)^+$ si le sous-jacent est plus grand que H et si la barrière est touchée, peut être répliquée par une option $\mathrm{DIC}(x,H,H)$ qui verse à l'échéance un flux de $(X_T - H)$ et par $(H - K)$ options $\mathrm{BinDIC}(x,H,H)$, qui versent $H - K$ FF si la barrière est touchée.

- L'option qui paye $(X_T - K)^+$ si le sous-jacent est compris entre K et H à l'échéance (ce qui implique que la barrière a été touchée) peut être répliquée par un portefeuille de la forme

$$-\mathrm{Put}(x, H) + \mathrm{Put}(x, K) + (H - K)\mathrm{BIP}(x, H)$$

puisque les flux associés sont de

$$-(H - X_T)^+ + (K - X_T)^+ + (H - K)\mathbf{1}_{X_T \leq H} + \mathrm{Put}(x, K) + (H - K)\mathrm{DIB}(x, H)$$

Cette formule très générale est une simple conséquence de l'arbitrage et ne suppose aucune hypothèse particulière sur les sous-jacents, contrairement à la formule d'évaluation de la DIB.
La couverture d'une telle option requiert essentiellement de couvrir des options vanilla, une option DIC regular avec strike et barrière confondues et une option moins régulière sur le plan de la couverture qui est l'option DIB(x, H) qui présente les mêmes difficultés de couverture que les options binaires standards. En particulier, dans le cas de volatilité déterministe, en utilisant (6.2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{DIC}_{rev}(x, K, H) &= \frac{K}{H}\mathrm{DIC}(x, H, H) - \mathrm{Put}(x, H) + \mathrm{Put}(x, K) \\
&+ (H - K)\mathrm{BinP}(x, H) + (H - K)\left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} e^{\mu T}\mathrm{BinP}(x, He^{2\mu T}).
\end{aligned}$$

6.3 La méthodes des Calls émergents

Une autre interprétation de ces options barrières consiste à repérer le moment où le sous-jacent touche la barrière, et à valoriser les Calls de maturité variable qui émergent à ce moment là. Cela revient à déterminer la distribution du temps d'atteinte de la frontière et à sommer grâce à cette pondération les Calls émergents à cet instant. Nous supposons la valeur du sous-jacent x supérieure à la barrière. Désignons comme nous l'avons fait précedemment par

$$T_H = \inf\{t\,; X_t \leq H\}$$

le premier instant où le sous-jacent passe en-dessous de la barrière.
L'option DIB(x, H, T) décrit la probabilité que le sous-jacent passe en dessous de la frontière avant la date T. Si nous désignons par $f_H(x, T) = e^{rT}\partial_T\mathrm{DIB}(x, H, T)$, nous avons la décomposition suivante de l'option barrière, qui met en jeu des calls émergents à la frontière, mais dont la maturité est variable.

$$\mathrm{DIC}(x, K, H, T) = \int_0^T \mathrm{Call}(H, K, T - \tau) f_H(x, \tau) d\tau \tag{6.3}$$

L'avantage de cette représentation est de permettre d'ajuster mieux les volatilités implicites à prendre en compte dans le calcul des options qui interviennent. L'inconvénient est de demander l'intégration d'un très grand nombre de Calls. Nous avons détaillé la densité f_H à partir des équations (6.1). Pour avoir la forme explicite de f_H il faut dériver la formule (6.1) par rapport à T et l'on obtient

$$f_H(T) = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \left[\left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \exp(-\frac{1}{2}d_0^2(\frac{He^{\mu T}}{x})) - \exp(-\frac{1}{2}d_1^2(\frac{H}{xe^{\mu T}})) \right].$$

7 Les options lookback

La formule donnant le prix de la BinDIC peut être utilisée pour évaluer et couvrir les options sur minimum et maximum.
Nous appelons MinC (x, K) le prix d'une option qui permet d'acheter à l'échéance le sous-jacent à un prix égal à K fois la plus petite valeur m_T prise par le cours durant la période où court l'option ($m_T = \min_{0\leq u\leq T} X_u$). Le pay-off final s'écrit $(X_T - Km_T)^+$. Le lien avec les options barrières est fait grâce à l'identité

$$(X_T - Km_T)^+ = \int_{Km_T}^{X_T} dk = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_T\geq k\geq Km_T\}}\, dk$$

de telle sorte que

$$\text{MinC}\ ^X(x, K) = \int_0^{+\infty} \text{BinDIC}^X(x, k, \frac{k}{K})\, dk \tag{7.1}$$

Dans cette dernière expression, il faut distinguer le cas où la valeur x aujourd'hui du sous-jacent est plus grande que la barrière $\frac{k}{K}$, du cas opposé. Dans le premier cas,

$$\text{BinDIC}^X(x, k, \frac{k}{K}) = \left(\frac{xK}{k}\right)^{\gamma} \text{BinC}^X(\frac{k}{K}, xK)$$

tandis que dans le cas $x \leq \frac{k}{K}$, $\text{BinDIC}^X(x, k, \frac{k}{K}) = \text{BinC}^X(x, k)$. La contribution de ce terme au prix de la MinC $^X(x, K)$ est un $\text{Call}^X(x, xK)$. Le premier terme est un peu plus compliqué à calculer. Nous avons donc

$$\text{MinC}\ ^X(x, K) = \int_0^{xK} \text{BinDIC}^X(x, k, \frac{k}{K})\, dk + \text{Call}^X(x, xK)$$

• Supposons $\gamma = 1$, le sous-jacent est une martingale $X_t = xM_t$, $M_0 = 1$. L'égalité $\text{BinDIC}^X(x, K, H) = -\frac{x}{H}\text{DeltaP}^X(H, \frac{K}{H}x)$ a été obtenue pour $x > H$ et $K \geq H$. Pour $x < H$, $\text{BinDIC}^X(x, K, H) = \text{BinC}^X(x, K)$. En utilisant ces égalités pour $k \in [0, xK]$ et $K \geq 1$, on obtient

$$\text{MinC}\ ^X(x, K) = \text{Call}^X(x, xK) + xKE[(\ln\frac{X_T}{xK})^+]$$

soit, en notant $\text{CallLn}^X(x, K)$ le prix d'un call de payoff $(\text{Ln}(M_T) - \text{Ln}K)^+$

$$\text{MinC}^X(x, K) = \text{Call}^X(x, xK) + xK\text{CallLn}^X(x, xK)$$

• Si le sous-jacent est lognormal, comme dans (5.1), on obtient en utilisant le coefficient γ tel que $S = xM^{1/\gamma}$

$$\int_0^{xK} \mathrm{BinDIC}^X(x,k,\frac{k}{K})dk = \int_0^{xK} \left(\frac{xK}{k}\right)^\gamma \mathrm{BinC}^X(\frac{k}{K}, xK)dk$$

De l'indentité $\mathrm{BinC}(x,K) = e^{-rT}Q(xM_T^{1/\gamma} > K)$, on déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^{xK} \mathrm{BinDIC}^X(x,k,\frac{k}{K})dk &= e^{-rT}E\left(\int_0^{xK}\left(\frac{xK}{k}\right)^\gamma \mathbf{1}_{k>xKX_T^{-1}}dk\right) \\
&= e^{-rT}(xK)^\gamma E\left(\int_0^\infty k^{-\gamma}\mathbf{1}_{xK>k>xK^2X_T^{-1}}dk\right) \\
&= e^{-rT}\frac{(xK)^\gamma}{1-\gamma}E[((xK)^{1-\gamma} - (xK^2X_T^{-1})^{1-\gamma})^+] \\
&= e^{-rT}\frac{xK}{1-\gamma}E[(1-(\frac{K}{X_T})^{1-\gamma})^+] \,.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'Itô et $1-\gamma = \dfrac{2\mu}{\sigma^2}$

$$d(X_t^{\gamma-1}) = X_t^{\gamma-1}[\mu dt - \frac{2\mu}{\sigma}dW_t]$$

on obtient

$$\mathrm{MinC}^X(x,K) = x[\mathrm{Call}^X(1,K;\mu,\sigma) + \frac{K\sigma^2}{2\mu}\mathrm{Put}^X(K^{1-\gamma},1;\mu,\frac{2\mu}{\sigma})]$$

où $\mathrm{Put}^X(x,K,\mu,\sigma)$ désigne un put sur un sous jacent de cout de portage μ et de volatiité σ. Le prix à la date t est

$$\mathrm{Min}^X(t,x,K) = \mathrm{Min}^X(X_t, Km_t)$$

où $m_t = \min_{s\le t} X_s$.

References

[1] Carr, P. and Ellis, K. and Gupta, V. Static hedging of path dependent options. *Journal of Finance*, 53: 1165-1190, 1998.

[2] Conze, A. and Viswanathan, R. Path dependent options: the case of lookback Options, *Journal of Finance*, 46: 1893-1907, 1991.

[3] Grabbe, J.O. The pricing of call and put options on foreign exchange *J. Internat. Money Finance*, 2: 239-253, 1983.

[4] Reiner, E. Breaking down the barriers. *Risk*, 9:28-35, 1991.