

Une remarque sur l'inégalité de McKean

Commentarii Mathematici Helvetici, 78 (2003), 884-888.

Alain R. Veeravalli

Abstract

Soient M une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète et non-compacte, $B_p(\delta)$ sa boule ouverte de centre p et de rayon $\delta > 0$ et $\lambda_1(\delta)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{sur } B_p(\delta) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B_p(\delta) \end{cases},$$

Δ désignant le laplacien sur M . Notons que $\lambda_1(\delta)$ est strictement positive et décroissante en la variable δ . La limite $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \lambda_1(\delta)$ existe donc dans \mathbb{R}_+ et on peut montrer qu'elle est indépendante du point p . Elle est appelée la première valeur propre du laplacien et notée $\lambda_1(M)$. La recherche de conditions conduisant à la non-nullité de $\lambda_1(M)$ est une importante question posée par R. Schoen et S.-T. Yau ([2]). A ce sujet, rappelons les résultats suivants :

- Pour l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m(-\kappa^2)$ de dimension m et de courbure sectionnelle $-\kappa^2 < 0$, on a

$$\lambda_1(\mathbb{H}^m(-\kappa^2)) = \frac{(m-1)^2\kappa^2}{4}$$

- D'autre part, on a un résultat de comparaison, appelé inégalité de McKean ([1]) : si M est une variété ouverte de dimension m et de courbure sectionnelle majorée par une constante $-\kappa^2 < 0$, alors nous avons une borne inférieure optimale pour la première valeur propre de M :

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(m-1)^2\kappa^2}{4}$$

C'est dans le prolongement de ces résultats que ce travail s'insère en présentant une borne inférieure optimale pour la première valeur propre d'une large classe de variétés riemanniennes équipées de métriques *tordues*. L'inégalité de McKean est étendue à des variétés dont la courbure peut être de signe variable et une réponse partielle est apportée à la question de R. Schoen et S.-T. Yau.

Références

- [1] H.P. McKean, An upper bound to the spectrum on a manifold of negative curvature, *J. Differ. Geom.* 4 (1970), 359-366.
- [2] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures in differential geometry*, International Press, 1994.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C20, 53C40, 53C42.

Keywords. Valeur propre du laplacien, problème de Dirichlet, formules d'O'Neill, inégalité de McKean, courbure moyenne, métriques tordues.
