I Vade-Mecum

Règles : Les travaux sont effectués en binôme : un travail copié ou effectué en collaboration entre N binômes divise les notes des binômes concernés par N.
Cette première partie du projet se déroule sur 3h30, de 9h à 12h30. Le rapport et les codes sources devront être envoyés par mail (ou rendu sur papier pour les rapports manuscrits) **avant 12h30**.

Objectif et contenu : Le projet consiste en la résolution mathématique d'un problème et sa mise en oeuvre informatique. Le **rapport** devra donc d'une part répondre aux questions théoriques posés dans l'énoncé et d'autre part expliquer les choix d'implémentation. Ce deuxième point nécessite tout d'abord la description précise des fonctions implémentées (les types des arguments et les propriétés mathématiques qu'ils doivent vérifier, la définition mathématique de la sortie, la description du fonctionnement de l'algorithme, ...). Ensuite, les résultats obtenus dans les applications numériques devront être vérifiés, analysés et commentés.
Les **codes sources (fichiers sci et sce)** seront réalisés de manière modulaire, les variables auront des noms explicites, ou au moins univoque. On vérifiera qu'ils sont compilables et que les sorties obtenues à partir d'un historique vide sont celles attendues.
NB : Il est recommandé de lire intégralement l'énoncé en premier lieu.

II Epitome

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t, y(t)), \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

On souhaite intégrer numériquement l'équation (P) sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ et on considère la subdivision Π_N à pas constant $h = T/N$ de $[t_0, t_0 + T]$. Dans `Scilab`, elle sera représentée par le vecteur ligne $(t_i)_{i=0}^N$ (points de la subdivision).

Pour les applications numériques, on considérera le problème de Cauchy noté (P_1) obtenu à partir de (C) avec la fonction $f : (t, x) \mapsto -2x$ et $(t_0, y_0) = (0, 1)$.

III Préliminaires

1. Implémenter une fonction nommée `mkgrid` prenant comme argument t_0, T et N et renvoyant la subdivision de pas constant T/N de $[t_0, t_0 + T]$.
   A l'aide de cette fonction, créer la subdivision `grid100` pour $t_0 = 0$, $T = 1$ et $N = 100$.
2. Quelle est la solution exacte de (P_1) ?
   Implémenter la fonction $f : (t, x) \mapsto -2x$ et la solution exacte de (P_1) dans `Scilab`.
3. Construire dans `Scilab` le vecteur ligne des valeurs de la solution de (P_1) associé à la subdivision `grid100`. Utiliser ces vecteurs pour représenter la solution de (P_1) sur un graphique.

IV Méthodes de Runge-Kutta

On considère les schémas de Runge-Kutta explicites à q étages notés RKq. Un tel schéma est défini par l'expression matricielle :

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & {}^tB \end{array}$$

1. Quelles sont les caractéristiques de A, B, C ?
2. Rappeler l'expression itérative associé à RKq. On introduira ainsi les notations choisies pour l'implémentation demandée dans la suite.
   Rappeler pour quelles couples (A, B, C) on retrouve la méthode d'Euler explicite, la méthode du point milieu, la méthode $RK4$ classique.
3. Implémenter une fonction `RKq` prenant en argument la fonction f, t_0, y_0, T, N, A, B et C et renvoyant le vecteur ligne $(y_i)_{i=0}^{N}$ obtenu à l'aide de RKq pour la subdivision Π_N.
4. Tester la fonction `RKq` en l'appliquant au problème (P_1) avec $t_0 = 0$, $T = 1$ et$N = 10$ avec la méthode d'Euler explicite, la méthode du point milieu et $RK4$ classique.
5. Représenter sur un même graphique la solution exacte de (P_1) et le 3 approximations obtenues à avec les méthodes de la question précédente. Commenter.
6. Reprendre les 2 questions précédentes avec $T = 10$.

V Erreur de consistance

1. Rappeler la définition de l'erreur de consistance ε_i à l'étape i d'un schéma numérique à un pas appliqué sur la subdivision Π_N. On introduira toutes les notations nécessaires.
2. Implémenter la fonction prenant, entre autres, en arguments T, N, A, B, C et renvoyant le vecteur ligne des erreurs de consistance du schéma RKq défini par (A, B, C) appliqué au problème (P_1).
   Représenter sur un même graphique l'erreur de consistance ε_i en fonction de l'étape i pour chacune des trois méthodes Euler explicite, point milieu et $RK4$ classique appliqué au problème (P_1) avec $T = 1$, $N = 100$, A, B, C et renvoyant l'erreur de consistance globale ε du schéma RKq défini par (A, B, C) appliqué au problème (C_1).
3. Pour chacune des méthodes Euler, point milieu et $RK4$ classique, tracer $\log(\varepsilon)$ en fonction de $\log(N)$. Qu'obtient-t'on ? Quelles différences y-a'il entre les graphes log obtenus pour les différents schémas ? Comment peut-on inférer l'ordre de la méthode sur ces graphes ? Justifier mathématiquement ce résultat.

VI Convergence

1. Trouver un protocole pour étudier la convergence d'un schéma appliqué au problème (P_1). Etudier la convergence des trois schémas Euler, point milieu et $RK4$ classique.