17 mai 1994

SUR LES DRAPS DE DIMENSION INFINIE

par

Denis Feyel et Arnaud de La Pradelle

Introduction. Dans des travaux récents ([13],[14]), S.Song a montré comment caractériser les ensembles $W^{2,n}$-polaires à l'aide des draps d'Ornstein-Uhlenbeck. Ensuite, J.Bauer [1],[2] a étendu la construction de Song à des multi-processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés au sens de [9],[10] et vérifiant une hypothèse de régularité (hypothèse (R)).

Entretemps, F.Hirsch appliquait les méthodes de Song à des multi-processus associés à des systèmes de semi-groupes de convolution. Dans les cas du type Ornstein-Uhlenbeck, les draps obtenus sont d'un type différent du brownien classique en ce sens qu'ils ne s'annulent pas sur les axes.

Nous nous proposons ici de modifier la construction de Song et Bauer en partant d'un drap brownien non nul sur les axes, et en obtenant le drap d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé comme solution d'un système d'équations aux dérivées partielles stochastique linéaire (du type de Langevin). On est amené pour cela à décrire précisément l'espace de Cameron-Martin associé à la mesure de Wiener généralisée construite à partir de quatre mesures gaussiennes centrées sur un espace localement convexe lusinien.

Lorsque les quatre mesures de base sont égales, le drap d'Ornstein-Uhlenbeck obtenu est stationnaire.

Il faut remarquer que la condition (F4) de Cairoli et Walsh résulte immédiatement de la construction du drap brownien, alors que chez Song et Bauer, cette condition résultait de la propriété de Markov convenablement interprétée. Ici, c'est au contraire la propriété de Markov qui résulte de (F4), et qui permet de calculer le semi-groupe de transition à deux ou plusieurs paramètres associé au drap considéré. On trouve la quantification $\Gamma(e^{-sA-tB})$ pour deux paramètres, A et B étant deux opérateurs commutant et non bornés de l'espace de Cameron-Martin.

Remarquons aussi que la capacité naturelle associée au drap est tendue sur les compact sous l'hypothèse de régularité. C'est d'ailleurs cette même hypothèse qui permet de résoudre le système stochastique de Langevin.

Enfin, dans le cas que nous étudions, comme dans les travaux de Hirsch, le drap obtenu n'est pas symétrique.

L'essentiel de l'article concerne d'abord le drap brownien à deux indices, puis de drap d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé à deux indices. Dans les dernières parties, on généralise rapidement à plusieurs indices, et on indique comment on peut obtenir les inégalités de Song.

Notation : si γ est une mesure gaussienne centrée sur un espace localement convexe lusinien F, on désigne toujours par $\mathcal{H}(\gamma)$ son espace de Cameron-Martin. Rappelons qu' on a toujours compactement $\mathcal{H}(\gamma) \subset F$.

I. Rappels sur le mouvement brownien

Soit E un espace localement convexe lusinien. Nous supposons que E est fortement convexe, c'est-à-dire que l'enveloppe convexe fermée de tout compact est compacte. Si (ξ, λ) est un couple de mesures gaussiennes centrées sur E, il existe une unique mesure gaussienne centrée θ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ telle que le processus des coordonnées W_t soit un mouvement brownien issu de ξ et de loi λ. Cela signifie que

$$\mathbb{E}(f(W_s)g(W_t)) = \int fg\,d\xi + (s \wedge t) \int fg\,d\lambda = \int fg\,d(\xi * \lambda_{s\wedge t})$$

pour tout couple (f, g) de formes linéaires continues sur E. Dans cette formule, λ_t désigne la puissance de convolution. Cela résulte de [9],[10]. En particulier, $W_t(\theta) = \xi * \lambda_t$.

Rappelons que θ est portée par un sous-espace lusinien (de type K_σ) $\Omega \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$.

Le sous-espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}(\xi, \lambda) = \mathcal{H}(\theta)$ est constitué des trajectoires particulières $\omega(t)$ vérifiant

$$\|\omega\|^2 = \|\omega(0)\|_\xi^2 + \int_0^\infty \|\omega'(t)\|_\lambda^2\,dt < +\infty$$

où les indices ξ et λ désignent les normes prises dans les espaces de Cameron-Martin $\mathcal{H}(\xi)$ et $\mathcal{H}(\lambda)$. On a toujours $\mathcal{H}(\xi, \lambda) \subset \Omega$.

Nous dirons aussi que θ est *la mesure de Wiener associée au triplet* (E, ξ, λ).

Si F est une forme linéaire θ-mesurable sur Ω, associée à l'élément $f \in \mathcal{H}(\xi, \lambda)$, on a

$$F = \langle f(0), W_0 \rangle_\xi + \int_0^\infty \langle f'(t), dW_t \rangle_\lambda$$

où la deuxième intégrale converge au sens de Wiener-Itô.

Remarquons enfin que le processus $\widetilde{W}_t = W_{a+t}$ est un mouvement brownien issu de $\xi * \lambda_a$ et de loi λ.

II. <u>Draps browniens</u>

Considérons maintenant quatre mesures gaussiennes centrées $(\kappa, \xi, \eta, \lambda)$ sur E, et l'espace $\mathcal{H}(\kappa, \xi, \eta, \lambda)$ des fonctions $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2, E)$ qui s'écrivent sous la forme

$$(1) \quad \omega(s,t) = \omega(0,0) + \int_0^s \varphi(u)du + \int_0^t \psi(v)dv + \iint_{u \leq s, v \leq t} g(u,v)dudv$$

et telles que la norme définie par

$$(2) \quad \|\omega\|^2 = \|\omega(0,0)\|_\kappa^2 + \int_0^\infty \|\varphi(s)\|_\xi^2 ds + \int_0^\infty \|\psi(t)\|_\eta^2 dt + \iint_{\mathbb{R}_+^2} \|g(s,t)\|_\lambda^2 dsdt$$

soit finie, les indices désignant les normes de Cameron-Martin correspondantes. Posons $\widetilde{\omega}(s) = [t \to \omega(s,t)]$. On a

$$\widetilde{\omega}(s) = \widetilde{\omega}(0) + \int_0^s \Phi(u)du$$

où $\widetilde{\omega}(0) = \omega(0,0) + \int_0^\cdot \psi(v)dv \in \mathcal{H}(\kappa, \eta)$, et

$$\Phi(u) = \varphi(u) + \int_0^\cdot g(u,v)dv \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}(\xi, \lambda))$$

Considérons les mesures de Wiener ν et θ sur un sous-espace lusinien $\Omega_1 \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ asociées aux couples (κ, η) et (ξ, λ). On a

$$\|\omega\|^2 = \|\widetilde{\omega}(0)\|_\nu^2 + \int_0^\infty \|\Phi(u)\|_\theta^2 du$$

Soit $\widetilde{\mu}$ la mesure de Wiener $\widetilde{\mu}$ sur $\mathcal{C}(\mathrm{I\!R}_+, \Omega)$ associée au couple (ν, θ). On déduit de l'isométrie précédente que $\mathcal{H}(\kappa, \xi, \eta, \lambda)$ est exactement l'espace de Cameron-Martin de la mesure μ image de $\widetilde{\mu}$ par l'isomorphisme $\widetilde{\omega} \to \omega$. On a donc montré

1 THÉORÈME : *soit E un espace localement convexe lusinien muni d'un quadruplet $(\kappa, \xi 2, \eta, \lambda)$ de mesures gaussiennes centrées. Il existe une unique mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathrm{I\!R}^2_+, E)$ ayant $\mathcal{H}(\mu) = \mathcal{H}(\kappa, \xi, \eta, \lambda)$ pour espace de Cameron-Martin.*

2 REMARQUE : a) on notera que μ est portée par un sous-espace lusinien Ω_2 de $\mathcal{C}(\mathrm{I\!R}^2_+, E)$. Evidemment Ω_2 contient nécessairement $\mathcal{H}$.

b) on a du même coup démontré l' existence du drap brownien finidimensionnel. Le processus des coordonnées $(W_{s,t})_{(s,t)\in\mathrm{I\!R}^2_+}$ admet l'unique décomposition

$$W_{s,t} = W_{0,0} + X_s + Y_t + Z_{s,t} \tag{3}$$

où X_s et Y_t sont nuls en 0 et $Z_{s,t}$ nul sur les axes.

Si f et g sont deux formes linéaires continues sur E on trouve

$$\mathrm{I\!E}[f(W_{s,t})g(W_{s',t'})] = \int fg\, d\rho_{\sigma,\tau}$$

où $\rho_{\sigma,\tau} = \kappa * \xi_\sigma * \eta_\tau * \lambda_{\sigma\tau}$ avec $\sigma = \mathrm{Inf}(s, s')$ et $\tau = \mathrm{Inf}(t, t')$.

En particulier, $W_{0,0}$ est une v.a. de loi κ, X est un mouvement brownien nul en 0 et de loi ξ, Y un mouvement brownien nul en 0 et de loi η, enfin Z est un *drap brownien nul sur les axes, et de loi λ*. Cette formule de covariance prouve que les quatre processus sont indépendants.

Enfin, toute forme linéaire μ-mesurable F admet la représentation de Wiener-Itô

$$F(\omega) = \langle f(0,0), W_{0,0}(\omega)\rangle_\kappa + \int_0^\infty \langle \varphi(s), dX_s(\omega)\rangle_\xi + \\ + \int_0^\infty \langle \psi(t), dY_t(\omega)\rangle_\eta + \iint_{\mathrm{I\!R}^2_+} \langle g(s,t), d^2 Z_{s,t}(\omega)\rangle_\lambda$$

Dans cette formule les trois premiers termes ont le sens ordinaire ([9],[10]). Le dernier terme désigne l'unique prolongement linéaire μ-mesurable de la forme linéaire continue G sur $\mathcal{H}(\mu)$ définie par

$$G(u) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \langle g(s,t), \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \rangle \, ds dt$$

Dans le cas où l'espace d'états est de dimension finie, cette intégrale est un cas particulier de l'intégrale double définie par Wong et Zakaï ([15]).

3 PROPOSITION : *le drap* $\widetilde{W}_{s,t} = W_{a+s,b+t}$ *est brownien, de la forme*

$$\widetilde{W}_{s,t} = \widetilde{W}_{0,0} + \widetilde{X}_s + \widetilde{Y}_t + \widetilde{Z}_{s,t}$$

où $\widetilde{W}_{0,0}$ *est une v.a. de loi* $\kappa * \xi_a * \eta_b * \lambda_{ab}$, $\widetilde{X}$ *est un mouvement brownien nul en* 0, *et de loi* $\xi * \lambda_b$, $\widetilde{Y}$ *un mouvement brownien nul en* 0 *et de loi* $\eta * \lambda_a$, *enfin* $\widetilde{Z}$ *est un drap brownien nul sur les axes, et de loi* λ. *Les quatre processus sont indépendants.*

On note $\mathfrak{F}_s$ la tribu engendrée par les $W_{u,t}$ pour $0 \le u \le s, 0 \le t < +\infty$, $\mathfrak{G}_t$ la tribu engendrée par les $W_{s,v}$ pour $0 \le s < +\infty, 0 \le v \le t$, et $\mathfrak{K}_{s,t}$ la tribu engendrée par les $W_{u,v}$ pour $0 \le u \le s, 0 \le v \le t$.

4 PROPOSITION : *on a* $\mathfrak{K}_{s,t} = \mathfrak{F}_s \cap \mathfrak{G}_t$ *pour tout* (s,t), *de plus les tribus* $\mathfrak{F}_s$ *et* $\mathfrak{G}_t$ *sont conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathfrak{K}_{s,t}$. *Cela signifie que la condition (F4) de Cairoli et Walsh est satisfaite ([3]).*

Démonstration : : si $\mathfrak{F}$ est une sous-tribu, nous notons encore $\mathfrak{F}$ l'opérateur d'espérance conditionnelle associé. Si de plus $\mathfrak{F}$ est une sous-tribu gaussienne, c'est à dire engendrée par un sous-espace fermé F de $\mathcal{H}'$, on connaît ([8]) la relation

$$\mathfrak{F} = \Gamma(\pi_F)$$

où π_F est la projection orthogonale sur le sous-espace de $\mathcal{H}$ correspondant à F dans l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$, et où Γ est l'opérateur de quantification. Soient donc F_s et G_t les sous-espaces de $\mathcal{H}'$ associés aux tribus $\mathfrak{F}_s$ et $\mathfrak{G}_t$, et $J_{s,t} = F_s \cap G_t$. On a

$$\pi_{J_{s,t}} = \pi_{F_s} \circ \pi_{G_t} = \pi_{G_t} \circ \pi_{F_s}$$

donc

$$\mathfrak{K}_{s,t} = \Gamma(\pi_{J_{s,t}}) = \mathfrak{F}_s \circ \mathfrak{G}_t = \mathfrak{G}_t \circ \mathfrak{F}_s$$

la dernière égalité prouve l'indépendance conditionnelle par rapport à $\mathfrak{F}_s \cap \mathfrak{G}_t$, et la première égalité prouve que $\mathfrak{K}_{s,t} = \mathfrak{F}_s \cap \mathfrak{G}_t$.

III. Draps d'Ornstein-Uhlenbeck

Soient $C_s = \mathrm{e}^{-sA}$ et $S_t = \mathrm{e}^{-tB}$ deux semi-groupes hermitiens contractant dans l'espace $\mathcal{H}(\kappa{*}\xi{*}\eta{*}\lambda)$. On suppose que C_s et S_t opèrent en semi-groupes contractant hermitiens et fortement continus dans chacun des quatre espaces de Cameron-Martin. On suppose en outre qu'ils commutent.

Considérons le problème de Cauchy-Langevin

$$(4)\qquad \begin{cases} \widetilde{\omega}(0,0) = \omega(0,0) \\ (A + \dfrac{\partial}{\partial s})\,\widetilde{\omega}(s,0) = \varphi(s) = \dfrac{\partial \omega}{\partial s}(s,0) \\ (B + \dfrac{\partial}{\partial t})\,\widetilde{\omega}(0,t) = \psi(t) = \dfrac{\partial \omega}{\partial t}(0,t) \\ (B + \dfrac{\partial}{\partial t})(A + \dfrac{\partial}{\partial s})\,\widetilde{\omega}(s,t) = g(s,t) = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} \end{cases}$$

pour $\omega(0,0) \in \mathcal{H}(\kappa)$, $\varphi(s) = \frac{\partial \omega}{\partial s}(s,0) \in L^2(\mathrm{I\!R}_+, \mathcal{H}(\xi))$, $\psi(t) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(0,t) \in L^2(\mathrm{I\!R}_+, \mathcal{H}(\eta))$, $g(s,t) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t}(s,t) \in L^2(\mathrm{I\!R}_+^2, \mathcal{H}(\lambda))$. Ce système admet la solution unique

(5)

$$H(\omega)_{s,t} = \widetilde{\omega}(s,t) = C_s S_t \omega(0,0) + S_t \int_0^s C_{s-u}\varphi(u)du + \\ + C_s \int_0^t S_{t-v}\psi(v)dv + \iint_{u\,\leq\, s,\, v\,\leq\, t} C_{s-u}S_{t-v}g(u,v)dudv$$

où $\widetilde{\omega} \in \mathcal{H}(\kappa,\xi,\eta,\lambda)$. L'application H définit ainsi un opérateur continu de $\mathcal{H}(\kappa,\xi,\eta,\lambda) = \mathcal{H}(\mu)$. Elle admet donc un unique prolongement linéaire μ-mesurable sur l'espace $\Omega_2 \subset \mathcal{C}(\mathrm{I\!R}_+^2, E)$ qui est donné par

$$(6)\qquad H_{s,t} = C_s S_t H_{0,0} + S_t \int_0^s C_{s-u}dX_u + \\ + C_s \int_0^t S_{t-v}dY_v + \iint_{u\,\leq\, s,\, v\,\leq\, t} C_{s-u}S_{t-v}d^2 Z_{u,v}$$

où les deux premières intégrales stochastiques ont le sens de Wiener-Itô faible de [9],[10], et de la même manière, l'intégrale stochastique double est obtenue par prolongement linéaire μ-mesurable de l'intégrale double ordinaire qui à $w \in \mathcal{H}$ associe $\widetilde{u} \in \mathcal{H}$ définie par

$$\widetilde{u}(s,t) = \iint_{u\,\leq\,s,\,v\,\leq\,t} C_{s-u}S_{t-v}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dudv$$

On en déduit que $H_{s,t}$, (drap d'Ornstein-Uhlenbeck) est à trajectoires continues.

5 Proposition : *on introduit le processus auxiliaire*

$$U_{s,t} = S_t(H_0 + X_s) + \int_0^t S_{t-v}dY_v + \iint_{u\,\leq\,s,\,v\,\leq\,t} S_{t-v}d^2 Z_{u,v} \tag{7}$$

Alors U est brownien en s et d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé en t au sens de [9],[10]. De plus, on a

$$H_{s,t} = C_s H_{0,t} + \int_0^S C_{s-u}d_u U_{u,t} \tag{8}$$

Démonstration : : $U_{s,t}$ est solution du problème de Cauchy-Langevin (4) dans lequel on a fait $A = 0$. Rappelons qu'elle est obtenue par prolongement linéaire μ-mesurable de la solution du même problème posé dans $\mathcal{H}(\mu)$. Cette dernière propriété justifie la deuxième équation.

6 Corollaire : *pour $s \leq S$ et $t \leq T$, on a*

$$\mathfrak{R}_{s,t}H_{S,T} = C_{S-s}S_{T-t}H_{s,t}$$

Démonstration : : on a d'abord $\mathfrak{F}_s U_{S,T} = U_{s,T}$ puis $\mathfrak{R}_{s,t}U_{S,T} = \mathfrak{G}_t U_{s,T} = S_{T-t}U_{s,t}$. Ensuite on applique la deuxième équation de la proposition 5, ce qui fournit le résultat.

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante de régularité :

<u>Hypothèse (R)</u> : les deux opérateurs $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ et $\sqrt{AB}$ sont respectivement prolongeables en opérateurs linéaires ξ- (resp.η-, resp.λ-) mesurables de E.

7 Proposition : *le processus*

$$\begin{aligned} H_{s,t} = {} & C_s S_t H_{0,0} + S_t\sqrt{2A}\int_0^S C_{s-u}dX_u + \\ & + C_s\sqrt{2B}\int_0^t S_{t-v}dY_v + \sqrt{4AB}\iint_{u\,\leq\,s,\,v\,\leq\,t} C_{s-u}S_{t-v}d^2 Z_{u,v} \end{aligned} \tag{9}$$

est presque sûrement à trajectoires continues.

Démonstration : : posons $\widetilde{\kappa} = \kappa$, $\widetilde{\xi} = \sqrt{2A}(\xi)$, $\widetilde{\eta} = \sqrt{2B}(\eta)$, $\widetilde{\lambda} = \sqrt{4AB}\lambda$, et soit $\widetilde{\mu}$ la mesure associée au quadruplet $(\widetilde{k}, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\lambda})$ par le théorème 1. La formule (9) est l'image de la formule (6) par le changement de mesure (*cf.* [9],[10] pour le cas des processus à un seul indice).

8 Remarque : cela revient en fait à changer les espaces de Cameron-Martin, *i.e.* à considérer le problème de Cauchy-Langevin

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}(0,0) = \omega(0,0) \\ (A + \dfrac{\partial}{\partial s})\, \widetilde{\omega}(s,0) = \sqrt{2A}\ \varphi(s) = \sqrt{2A}\ \dfrac{\partial \omega}{\partial s}(s,0) \\ (B + \dfrac{\partial}{\partial t})\, \widetilde{\omega}(0,t) = \sqrt{2B}\ \psi(t) = \sqrt{2B}\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t}(0,t) \\ (B + \dfrac{\partial}{\partial t})(A + \dfrac{\partial}{\partial s})\, \widetilde{\omega}(s,t) = \sqrt{4AB}\ g(s,t) = \sqrt{4AB}\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} \end{cases}$$

9 Proposition : *pour $s \le S$, et $t \le T$, on a*

$$\mathfrak{F}_{s,t} H_{S,T} = C_{S-s} S_{T-t} H_{s,t} \tag{10}$$

De plus, si $\kappa = \xi = \eta = \lambda$, la loi de $H_{s,t}$ est λ.

Démonstration : : la formule (10) se démontre comme la formule (8). D'autre part, on a comme en proposition 5 un processus auxiliaire

$$U_{s,t} = S_t(H_0 + X_s) + \sqrt{2B} \int_0^t S_{t-v} dY_v + \sqrt{2B} \iint_{u \le s, v \le t} S_{t-v} d^2 Z_{u,v} \tag{11}$$

vérifiant

$$H_{s,t} = C_s H_{0,t} + \sqrt{2A} \int_0^s C_{s-u} d_s U_{u,t} \tag{12}$$

Si les quatre mesures sont égales à λ, un calcul simple appliqué à (11) montre que pour $f \in H'$

$$\mathbb{E}(f(U_{s,t} - U_{0,t})^2) = s|f|^2_\lambda$$

Le même calcul appliqué alors à (12) montre que

$$\mathbb{E}(f(H_{s,t})^2) = |f|^2_\lambda$$

Utilisant alors la formule (10), on arrive à la relation

$$\mathbb{E}[f(H_{s,t})g(H_{s',t'})] = \langle C_{|s-s'|}S_{|t-t'|}f, g\rangle$$

pour f et g dans H'_λ, ce qui prouve que le drap est stationnaire.

10 THÉORÈME : *on suppose que les quatre mesures $\kappa, \xi, \eta, \lambda$ sont égales. Alors $H_{s,t}$ est un "drap markovien", et admet le double semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck*

$$(13)\quad \Gamma(\mathrm{e}^{-sA}\,\mathrm{e}^{-tB})f(x) = \iint f(C_sS_tx+C'_sS_ty+C_sS'_tu+C'_sS'_tv)d\lambda(y)d\lambda(u)d\lambda(v)$$

comme semi-groupe de transition. De plus, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $H_{s,t}$ est stationnaire.

Démonstration : : on a posé $C'_s = \sqrt{I - C_s^2}$, $S't = \sqrt{I - S_t^2}$, ce qui a un sens d'après [8]. D'abord la formule (13) s'obtient en remarquant que la répartition de $(u, v) \to C_su + C'_sv$ sous $\lambda \otimes \lambda$ vaut λ d'après [9],[10]. On raisonne ensuite comme dans [10] : tout revient à montrer que pour tous $S > 0$ et $T > 0$,

$$M_{s,t} = \Gamma(\mathrm{e}^{-(S-s)A}\,\mathrm{e}^{-(T-t)B})F(H_{s,t})$$

est une martingale sur $[0, S] \times [0, T]$ par rapport à la filtration $\mathfrak{F}_{s,t}$. Il suffit de le faire lorsque $F = k_f = \mathrm{e}^{(f-|f|^2/2)}$ pour $f \in E'$. On a

$$\Gamma(\mathrm{e}^{-(S-s)A}\,\mathrm{e}^{-(T-t)B})k_f = k_{C_{S-s}S_{T-t}f}$$

selon la formule de Mehler, de sorte que

$$M_{s,t} = \exp\left(N_{s,t} - |N_{s,t}|^2/2\right)$$

est une martingale en chaque indice, où

$$N_{s,t} = C_{S-s}S_{T-t}f(H_{s,t})$$

En effet, $N_{s,t}$ est une martingale en chaque indice (propriété (F.4)), linéaire en ω de sorte que son crochet vaut $|N_{s,t}|^2$ d'après [9] et la proposition 9.

IV. Draps multidimensionnels

Nous voulons généraliser le drap d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire, nous commençons donc par le cas brownien. Soit λ une mesure gaussienne centrée sur E. Nous considérons l'espace $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n, E)$ des fonctions ω qui s'écrivent sous la forme

$$\omega(t_1 \dots t_n) = \sum_i \int_0^{t_i} \varphi_i(u)du + \dots +$$

$$+ \sum_\alpha \int_{\Delta_\alpha} \varphi_\alpha(u_1 \dots u_k)du_1 \dots du_k + \dots + \int_\Delta g(u_1 \dots u_n)du_1 \dots du_n$$

où pour tout $k \in [1 \dots n]$ on a noté $\alpha = (i_1 \dots i_n)$ avec $i_1 < \dots < i_n$, la sommation étant effectuée sur tous les α, où Δ_α désigne l'ensemble $\{\, u_j \le t_{i_j} \;\big|\; 1 \le j \le k \,\}$, et où la fonction φ_α appartient à $L^2(du_1 \dots du_k)$. L'espace $\mathcal{H}$ est muni de la norme

$$\|\omega\|^2 = \sum_i \int_0^\infty |\varphi_i(u)|^2 du + \dots +$$

$$+ \sum_\alpha \int |\varphi_\alpha(u_1 \dots u_k)|^2 du_1 \dots du_k + \dots + \int |g(u_1 \dots u_n)|^2 du_1 \dots du_n$$

où $|.|$ désigne la norme de $\mathcal{H}(\lambda)$.

Nous avons alors le même énoncé qu'au théorème 1 :

11 THÉORÈME : *soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n, E)$ ayant l'espace $\mathcal{H}(\mu) = \mathcal{H}$ pour espace de Cameron-Martin.*

Démonstration : : l'unicité est évidente. L'existence se voit par récurrence sur n à partir du théorème 1.

On notera comme plus haut que μ est portée par un sous-espace lusinien Ω_n de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n, E)$.

On a une décomposition des coordonnées W_t analogue à la décomposition (3)

$$W_t = \sum_k \sum_\alpha X^\alpha_{t_1 \dots t_k}$$

où $t = (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Toute forme linéaire μ-mesurable F admet la représentation de Wiener-Itô

$$F(\omega)=\sum_k\sum_\alpha\int\langle\varphi_\alpha,d^kX^\alpha_{t_1\ldots t_k}\rangle$$

Chaque terme de cette somme est l'unique prolongement linéaire μ-mesurable de la forme linéaire continue G_α définie par

$$G_\alpha(u)=\iint\langle\varphi_\alpha,\frac{\partial^k u}{\partial t_{i_1}\ldots\partial t_{i_k}}\rangle dt_{i_1}\ldots dt_{i_n}$$

On note $\mathfrak{F}^i_t$ la tribu engendrée par les W_s pour s de la forme $s=(s_1\ldots s_n)$ où $s_i\leq t_i$. Ce réseau de tribus vérifie la condition (F4) de Cairoli et Walsh.

Passons maintenant au drap multiple d'Ornstein-Uhlenbeck. On se donne un système de semi-groupes $C^i_s=\mathrm{e}^{-sA_i}$ hermitiens contractant et fortement continus de l'espace $\mathcal{H}(\lambda)$. On suppose que ces semi-groupes commutent.

Considérons le problème de Cauchy-Langevin

$$\begin{cases}\widetilde{\omega}(0,0)=\omega(0,0)\\ [\prod_{j=1}^k(A_{i_j}+\dfrac{\partial}{\partial s_{i_j}})]\ \widetilde{\omega}(\tau_\alpha)=\varphi_\alpha(t_\alpha)\end{cases}$$

cette équation est posée pour chaque $\alpha=(i_1\ldots i_k)$ où $i_1<\ldots<i_k$, k variant de 1 à n, où $t_\alpha=(t_{i_1}\ldots t_{i_k})$, et $\tau_\alpha=(t'_1\ldots t'_n)$ où $t'_i=0$ si $i\notin\alpha$ et $t'_i=t_i$ si $i\in\alpha$. Il y a en tout 2^n équations.

Ce système admet la solution unique

$$\widetilde{\omega}(t)=C_t\omega(0)+..+\sum_k\sum_\alpha C^\alpha_{\tau_\alpha}\int_{\Delta_\alpha}C^\alpha_{t_\alpha}\varphi_\alpha(u_\alpha)d^ku_\alpha$$

où $\widetilde{\omega}\in\mathcal{H}(\mu)$. Dans cette formule, Δ_α désigne le pavé $\Pi^k_{j=1}[0,t_{i_j}]$
L'application $\omega\rightarrow\widetilde{\omega}$ est ainsi un opérateur continu de $\mathcal{H}(\mu)$. Son prolongement linéaire μ-mesurable est donné par

$$H_t=C_tH_0+..+\sum_k\sum_\alpha C^\alpha_{\tau_\alpha}\int_{\Delta_\alpha}C^\alpha_{t_\alpha}d^kX^\alpha_{t_\alpha}$$

On en déduit comme plus haut la continuité des trajectoires.

12 PROPOSITION : *pour $t_i\leq T_i$, on a*

$$\mathfrak{F}_tH_T=C_{T-t}H_t$$

où $\mathfrak{F}_t$ désigne l'opérateur d'espérance sur la tribu engendrée par les W_u pour $u\leq t$.

Démonstration : : la raison est la même qu'au corollaire 5.

Nous faisons comme plus haut l'hypothèse de régularité :

Hypothèse (R) : tous les opérateurs $\sqrt{A^\alpha}$ sont prolongeables en opérateurs λ-mesurables de E.

13 PROPOSITION : *le processus*

$$H_t = C_t H_0 + .. + \sum_k \sqrt{2^k A^\alpha} \sum_\alpha C^\alpha_{\tau_\alpha} \int_{\Delta_\alpha} C^\alpha_{t_\alpha} d^k X^\alpha_{t_\alpha}$$

est presque sûrement à trajectoires continues.

Démonstration : : identique à celle de la proposition 7.

14 PROPOSITION : *pour $t_i \leq T_i$, on a*

$$\mathfrak{F}_t H_T = C_{T-t} H_t$$

et la loi de H_t est λ.

Démonstration : : la raison est la même qu'en proposition 9.

On en déduit alors comme plus haut que le multi-processus H_t est stationnaire.

V. Application à la capacité

Pour simplifier les notations, nous nous plaçons ici dans le cas de deux indices, l'extension aux multi-indices étant évidente.

Nous faisons toujours l'hypothèse (R) de régularité.
On considère la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^2_+$ définie par

$$\rho(ds, dt) = \pi^{-1}(st)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-s-t}\, ds dt$$

et le noyau

$$Uf = \iint_{\mathbb{R}^2_+} \Gamma(\mathrm{e}^{-sA-tB}) f \rho(ds, dt)$$

défini pour toute f borélienne bornée sur E.

Si $g \geq 0$ est une fonction s.c.i. , on définit

$$C(g) = \mathrm{Inf}\{\, N_2(h) \;\big|\; Uh \geq g \lambda \text{presque partout } \}$$

puis pour f quelconque

$$C(f) = \mathrm{Inf}\{\, C(g) \;\big|\; g \text{ s.c.i. } \geq |f|\,\}$$

La capacité C a des propriétés analogues aux capacités $C_p^{A,\rho}$ définies dans [8]. En particulier, nous avons

15 Théorème : *C est tendue sur les compacts de E.*

Démonstration : : soit θ l'image de λ par l'opérateur prolongé $\sqrt{(I+A)(I+B)}$. Comme E est fortement convexe, il existe un compact K de mesure $\theta(K) > 0$. Soit g la jauge de K, c'est-à-dire la fonction définie par

$$g(x) = \mathrm{Inf}\{\; \lambda > 0 \;\;\big|\;\; x \in \lambda K \;\}$$

On sait (*cf.* [FLP.2]) que g est s.c.i. finie θ-presque partout. D'après le théorème de Hahn-Banach et la propriété de Lindelöf de E (*cf.* [4], n°67), g est l'enveloppe supérieure d'une suite de formes linéaires continues $f_i \in E'$. Soit

$$V = \iint \mathrm{e}^{-sA-tB}\, \rho(ds, dt) = ((I+A)(I+B))^{-1/2}$$

L'opérateur V^{-1} est linéairement prolongeable en opérateur λ-mesurable de E d'après [8]. En posant $h_i = f_i \circ V^{-1}$, on trouve une suite d'éléments $h_i \in H'$, dont on notera q l'enveloppe supérieure. On a $\int g d\theta < +\infty$ de sorte que q est λ-mesurable et vérifie $\int q d\lambda = \int g d\theta < +\infty$. On a pour tout i

$$2h_i(C_s x) = h_i(C_s x + C'_s y) + h_i(C_s x - C'_s y)$$

pour tout $(x,y) \in E \times E$, où $C's = \sqrt{1 - C_s^2}$ (prolongement linéaire λ-mesurable). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intégration en y fournit

$$h_i(C_s x) = \Gamma(\mathrm{e}^{-sA}) h_i(x)$$

Le même raisonnement pour l'opérateur B fournit

$$h_i(C_s S_t x) = \Gamma(\mathrm{e}^{-sA-tB}) h_i(x) \leq \Gamma(\mathrm{e}^{-sA-tB}) q(x)$$

L'intégration au sens de Bochner fournit $h_i \circ V \leq Uq$ λ-presque partout. On en déduit $g = q \circ V \leq Uq$ λ-presque partout. Soit alors l'ouvert $G_n = \{g > n\}$. On a

$$C(G_n) \leq N_2(q)/n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

C'est maintenant une routine de montrer la suite d'inégalités suivantes de [1],[2],[12],[13],[14].

16 THÉORÈME : *si $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$, on a*

$$\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}^2_+} \mathrm{e}^{-s-t} f(H_{s,t})\Big)^2 = N_2(Uf)^2$$

et

$$\mathbb{E}\big(\operatorname*{Sup}_{s,t}\big[\int_{u\leq s, v\leq t} \mathrm{e}^{-u-v} f(H_{u,v})dudv\big]^2\big) \leq KN_2(Uf)^2$$

où K est une constante, et pour toute fonction borélienne f

$$\mathbb{E}\big(\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}^2_+}[\mathrm{e}^{-s-t} f(H_{s,t})]^2\big) \leq 16C(f)^2$$

$$K'C(f)^2 \leq \mathbb{E}\big(\operatorname*{Sup}_{s,t\leq T} f^2(H_{s,t})\big) \leq K''C(f)^2$$

où K' et K'' sont des constantes.

On en déduit que les ensembles évités par les bi-trajectoires sont les ensembles C-polaires. Les fonctions continues sur μ-presque toute trajectoire sont les fonctions C-quasi-continues.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.Bauer *Multiparameter processes associated with Ornstein-Uhlenbeck semi-groups*
Proc. Nato Advanced Research Workshop Potential Theory, Bonas, (1993)

[2] J.Bauer *Sur les draps d'Ornstein-Uhlenbeck et les capacités associées*
CRAS Paris, 317, série I, 1993, p.879-882

[3] R.Cairoli-JB.Walsh *Stochastic integrals in the plane*
Acta Math. 134, p.111-183 (1975)

[4] C.Dellacherie-P.A.Meyer *Probabilités et potentiel, ch.I-IV*
Paris, Hermann, Asi 1372, (1975)

[5] D.Feyel-A.de La Pradelle *Espaces de Sobolev gaussiens*
Ann. Inst. Fourier, t.39, fasc.4, 1989, p.875-908

[6] D.Feyel, A.de La Pradelle *Capacités gaussiennes*
Ann. Inst. Fourier, t.41, f.1, p.49-76, 1991

[7] D.Feyel-A.de La Pradelle *Opérateurs linéaires et espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener*
CRAS, t.316, série I, p.227-229, 1991

[8] D.Feyel-A.de La Pradelle *Opérateurs linéaires gaussiens*
Potential Analysis, vol.4, n°2, p.89-106, 1993

[9] D.Feyel-A.de La Pradelle *Sur les processus browniens en dimension infinie*
CRAS, Paris, 316, série I, 1993, p.149-152

[10] D.Feyel-A.de La Pradelle *Processus browniens de dimension infinie*
Preprint de l'Université d'Evry-Val d'Essonne, 1993

[11] D.Feyel-A.de La Pradelle *Brownian processes in infinite dimensions*
à paraître in Potential Analysis, 1994

[12] F.Hirsch *Potential theory related to multiparameter processes*
à paraître in Potential Analysis (1994)

[13] S.Song *Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et ensembles $W^{2,2}$-polaires*
Potential Analysis, vol.2, n°2, p.171-186, (1993)

[14] S.Song *Inégalités relatives aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres et capacités gaussiennes $C_{n,2}$*
To appear

[15] E.Wong-M.Zakai *Martingales and stochastic Integrals for processes with multidimensional parameters*
ZfWahrscheinlichkeitstheorie, 29,p.109-122 (1974)

[16] X.Fernique *Intégrabilité des vecteurs gaussiens*
CRAS, t.270, série A, p.1698, 1970

D.Feyel
Université d'Evry-Val d'Essonne
Equipe d'Analyse et de Probabilités
Bureau B-313
Boulevard des Coquibus
91025 Evry Cedex

A.de La Pradelle
Université Paris VI
UA 754 au CNRS
Tour 46-0, bureau 413
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05