

Intégration de taux d'intérêt différenciés dans l'évaluation des obligations convertibles

J.C. MEYFREDI*

* Professeur à l'EDHEC. E-mail : jc.meyfredi@edhec.edu

L'auteur tient à remercier C. Bensoussan et A. Lapiéd, professeurs à l'Université d'Aix-Marseille III, O. Jokung, Professeur à l'EDHEC, A. Grorud, Maître de Conférences au Centre de Mathématiques et d'Informatique, et S. Ben Larbi, Maître de Conférences à l'Université de Toulon et du Var, pour leurs précieux conseils, ainsi que R. Longlade du Groupe Prado pour les informations communiquées.
S'il subsistait quelque erreur, celle-ci relèverait uniquement de la seule responsabilité de l'auteur.

Résumé

Les émissions des obligations convertibles ne cessent de croître chaque année, dénotant le large intérêt que le titre procure, aussi bien aux émetteurs qu'aux investisseurs. Pourtant, si leurs avantages sont largement connus et discutés dans la littérature, leur appréciation semble poser un problème encore complexe. Nous avons recherché à améliorer la méthodologie de l'évaluation de ces titres de manière à ce que le décalage existant entre les prix issus du modèle et ceux réellement observés soit minimum.

Deux approches ont traditionnellement été développées. Nous avons retenu une méthode d'évaluation globale sans procéder à la dissociation du titre en ses différentes composantes. En effet, la présence de clauses de remboursement anticipé nécessite la recherche de composantes supplémentaires, pour lesquelles il n'existe pas de solutions analytiques, remettant en cause l'usage d'une approche dissociée. La méthodologie développée, réalisée en temps discret, permet une mise en œuvre pratique très aisée qui s'accompagne d'une grande rigueur théorique.

Le modèle que nous proposons requiert deux taux d'intérêt. Le premier doit permettre l'évaluation des flux versés hors risque de défaillance de l'émetteur. L'application d'une méthode purement empirique représentée par les réseaux de neurones ou un modèle d'équilibre comme celui de Vasicek nous ont permis d'obtenir d'excellents résultats sur un échantillon d'obligations du secteur privé. Le second, quant à lui, intègre le risque de défaillance. Nous avons retenu le modèle développé par Longstaff et Schwartz qui semblent se rapprocher de la réalité du marché.

Les tests que nous avons réalisés montrent que les décalages existants entre les cours observés et les prix issus de la modélisation sont très faibles comparativement à ceux obtenus par d'autres auteurs.

Abstract

Every year convertible bonds issues become more and more numerous, denoting the great interest that this type of security gives to issuers as well as to investors. Nevertheless, if their advantages are well-known and largely discussed in literature, to appreciate them seems to present a problem which is still complex. We have tried to improve this security's valuation in order to minimise the gap between prices obtained from model and those really observed.

Two approaches have been traditionally developed. We retain a global valuation method without breaking down the security into its different components. Indeed, the presence of anticipated redeeming clauses requires to add other components for which no analytical solutions exist, which calls into question the dissociate approach. The methodology used, over discrete time, permits easily to set up a very practical implementation together with a great theoretical rigour.

The model we propose requires two sorts of interest rates. The first permits to evaluate flows excluding the risk of the issuer's default. The application of a purely empirical method like neural networks or an equilibrium model as Vasicek's allows us to obtain very good results on a sample of private sector bonds. The second one integrates the default risk. We have chosen the Longstaff and Schwartz model that seemed to be the nearest to the reality of the market. The tests that we made show that existing gaps are very limited compared to those obtained by other authors.

1. Introduction

Est-il utopique de croire que l'on puisse obtenir un rendement élevé avec un risque minimum ? Si l'on en juge par les déconvenues actuelles d'un grand nombre d'investisseurs, nous ne pourrions répondre que par l'affirmative. Pourtant, depuis quelques années, le nombre d'émissions d'obligations convertibles se fait de plus en plus conséquent, révélant l'attrait que ce titre peut procurer aux investisseurs individuels tout comme aux organismes de gestion collective. Comment pourrait-on ne pas être séduit par un titre permettant de bénéficier du potentiel de hausse des actions tout en limitant le risque de baisse à un certain seuil prédéfini ? Si l'on ajoute à ce caractère convexe de la convertible, une fiscalité avantageuse, une importante diversité sectorielle et des niveaux de risque très larges, nous comprenons le succès des émissions d'obligations convertibles.

Ce succès ne pourrait néanmoins connaître une telle ampleur si les émetteurs ne tiraient profit, eux aussi, de ces émissions. Historiquement, la première justification du recours aux obligations convertibles était de pouvoir réaliser une augmentation différée des fonds propres. Aujourd'hui d'autres intérêts sont recherchés comme l'émission d'une dette moins coûteuse ou encore la possibilité de disposer d'un titre extrêmement flexible favorisant la mise en place de stratégies définies par l'entreprise, et notamment un moyen de défense anti-OPA très performant.

A ces raisons économiques il est encore possible de trouver d'autres éléments de justification du recours aux obligations convertibles. Ainsi, ces titres offrent un outil remarquable pour limiter les conflits d'agence pouvant exister aussi bien entre actionnaires et créanciers qu'entre actionnaires et dirigeants mais permettent également de limiter les asymétries d'information entre ces différents acteurs.

Cependant, si les apports des convertibles sont largement connus et discutés dans la littérature, l'évaluation de ces titres semble constituer un problème encore complexe. Le très faible nombre d'études relatives à la détermination de leur prix en est sans nul doute un excellent révélateur. Cela ne signifie pas pour autant que leur évaluation soit maîtrisée, bien au contraire. Les quelques études qui ont pu être menées s'accompagnaient rarement d'une validation empirique et lorsque, tel était le cas, l'écart qui existait entre les prix issus des modèles proposés et les prix réellement observés sur le marché laissait entrevoir un décalage important.

Or, cette incertitude concernant le prix des obligations convertibles peut apparaître, dès lors, comme une des raisons de la faiblesse du nombre de transactions quotidiennes. En effet, les investisseurs pressentent l'intérêt du titre, mais il leur est beaucoup plus difficile de savoir à quel moment vendre ou acheter le titre et à quel prix il faut initier la transaction.

Il est certain que l'évaluation des obligations convertibles (titre correspondant à une obligation pouvant être convertie, à la demande du porteur, en un nombre d'actions fixé) nécessite de considérer un titre influencé à la fois par les taux d'intérêt et par le cours de l'action sous-jacente. Le problème pourrait apparaître relativement simple si nous ne prenions en compte l'existence de clauses de remboursement anticipé (que ce soit au gré de l'émetteur comme au gré du porteur) qui compliquent énormément les approches qui ont souvent été retenues pour permettre leur valorisation.

Longtemps, la seule méthode d'évaluation a consisté à dissocier la convertible en une composante obligataire, et une composante optionnelle. Or, cette approche devient beaucoup moins précise dès lors que les titres intègrent les clauses de remboursement anticipé dans leur contrat d'émissions, ce qui aujourd'hui constitue l'intégralité des titres émis.

Il apparaissait donc nécessaire de revoir les principes d'évaluation des obligations convertibles pour proposer une méthodologie d'évaluation rigoureuse sur le plan théorique et offrant un faible écart avec les prix observés sur le marché.

En France, les études menées, qu'elles l'aient été par la Barles-Berestycki-Romano [4] ou encore par Augros [2] [3] n'ont jamais pu conduire à un modèle fournissant un prix s'établissant à moins de 5% des prix observés. Nous avons donc cherché à améliorer la modélisation en fournissant une méthodologie d'évaluation permettant de réduire ce seuil fatidique.

Il nous est apparu qu'il pouvait être inutile de chercher une amélioration des modèles d'évaluation si les déterminants du taux d'intérêt utilisés pour réaliser l'actualisation des flux versés n'étaient pas bien choisis. Dans cette optique il devenait primordial de s'attacher à la détermination des taux requis pour l'évaluation des obligations et ce, qu'elles soient dénuées de risque de défaillance ou qu'au contraire ces obligations intègrent ce risque.

L'article sera construit autour des points suivants : dans une première section nous présenterons le modèle d'évaluation des obligations convertibles que nous nous proposons de tester. Dans un second point nous verrons de quelle manière il est possible d'obtenir les différents paramètres nécessaires à l'utilisation du modèle. Enfin, dans un troisième point, nous testerons notre modèle et décrirons les principaux résultats obtenus.

2. Présentation du modèle

Les méthodes d'évaluation des obligations convertibles peuvent être regroupées en deux grandes approches.

La première possibilité cherche à réemployer les résultats obtenus pour l'évaluation des différents titres que semble implicitement incorporer la convertible et procède à une évaluation dissociée du titre. L'utilisation de formulations analytiques des différents titres a rendu cette approche très séduisante. Pourtant, si en l'absence de clauses de remboursement anticipé (que ce soit au gré du porteur ou au gré de l'émetteur) cette dissociation du titre en ses deux principales composantes est tout à fait correcte, ce n'est plus le cas dès lors que l'obligation convertible intègre ces clauses. On conçoit parfaitement que cela provoque l'apparition d'un terme supplémentaire à évaluer pour le call et un autre pour le put. Il faut donc rechercher à évaluer ces différents titres, problème accru non seulement par l'absence de solution analytique pour ces deux derniers éléments¹ mais également par le fait que l'exercice d'une des options fait immédiatement disparaître les autres titres.

La seconde consiste, au contraire, à rechercher une évaluation de manière globale, sans procéder à la dissociation du titre en plusieurs composantes.

Lorsque l'évaluation est réalisée à partir d'une variable unique, la valeur de l'action ou la valeur de l'entreprise peuvent être utilisées. L'utilisation de la valeur de l'entreprise, développée entre autres par Ingersoll [12], Brennan et Schwartz [6], Augros [1] et proposée à l'origine par Merton [14], présente l'avantage de permettre d'intégrer directement la possibilité de la défaillance dans le modèle.

¹ On pourra se référer à la démonstration d'Ingersoll.

Compte tenu de la maturité du titre qui peut atteindre plus de 10 ans, on serait tenté de vouloir adjoindre un taux d'intérêt aléatoire. Or si son intégration présente un avantage théorique certain, elle présente un intérêt pratique bien plus limité. Tout d'abord parce que cela complique énormément la modélisation et parce qu'ensuite Brennan et Schwartz [7], pourtant à l'origine de cette démarche, ont convenu par des simulations que le gain apporté pouvait apparaître extrêmement faible.

Pour simplifier la démarche, sans pour autant diminuer sa rigueur, la modélisation a été réalisée, à l'image de Cox-Ross-Rubinstein [9] pour les options, à partir d'un modèle d'évaluation binomial. En effet, si la modélisation en temps continu présente, il est vrai, un intérêt certain dès lors qu'il est possible d'obtenir des solutions analytiques, l'obtention de telles solutions séduisantes n'est pas envisageable dans le cadre de la convertible, compte tenu des contraintes auxquelles le titre est soumis. Il devient alors nécessaire de mettre en place des méthodes numériques de résolution des équations différentielles partielles. Il paraît alors beaucoup plus judicieux d'initier la modélisation directement en temps discret plutôt que procéder à la discrétisation du système d'équations régissant le prix des titres, ou encore d'avoir recours à des simulations de Monte-Carlo.

Ce faisant, il devient possible d'intégrer très aisément les différents événements tels que le versement de dividendes, de coupons, ou encore les diverses clauses de remboursement anticipé, pouvant intervenir pendant la vie de la convertible.

Le mécanisme, maintenant largement connu, consiste à faire évoluer le cours de l'action sous-jacente (S) jusqu'à l'échéance, date à laquelle on connaît les différentes valeurs possibles de la convertible selon que le détenteur du titre tire profit ou non de la conversion, puis de remonter les différents nœuds du treillis en actualisant les flux.

Ainsi, la valeur de la convertible au nœud (j,t) , avec j l'état de la nature considéré et t l'intervalle entre deux dates, est égale à :

$$CB_{j,t} = [qCB_{j,t+1} + (1-q)CB_{j+1,t+1}] / (1+r_{t,t+1})$$

avec $q = \frac{1+r-d}{u-d}$, la probabilité risque neutre ;

$$r_{t,t+1} = (1+r_T)^{t/n} - 1, \text{ le taux de prêt et d'emprunt pour la période .}$$

La valeur des paramètres u et d dépend du processus d'évolution du cours de l'action choisi. En supposant que celui-ci soit un mouvement brownien géométrique², nous obtenons alors :

$$u = e^{s\sqrt{t/n}},$$

$$d = 1/u = e^{-s\sqrt{t/n}}$$

² Rappelons que dans ce processus le rendement de l'action suit un mouvement brownien : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t$.

Pour une conversion possible à tout moment, si l'on note CB_{us} la valeur de la convertible américaine et CB_{euro} son homologue européenne, il faudra donc vérifier à chaque nœud que :

$$CB_{us} = \text{Max}\{CB_{euro}; S_i \times \text{ratioconv}\}$$

Afin d'éviter d'avoir un treillis explosif, il convient de considérer que le dividende versé par l'entreprise est proportionnel au cours de l'action, ce qui nous permet de conserver le caractère commutatif de la multiplication. Cette hypothèse s'accompagne cependant d'une contrainte supplémentaire puisque nous sortons ici du cadre des marchés complets.

L'intégration des clauses de remboursement anticipé s'effectue en établissant une barrière à la hausse ou à la baisse que le cours de la convertible ne peut franchir. En effet, la clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur consiste soit à permettre à l'entreprise de rappeler les titres en circulation, et ce quelque soit le niveau du sous-jacent (hard call), soit à rappeler les titres en fonction du cours du sous-jacent (soft call ou trigger). Ces clauses qui restreignent le potentiel de hausse de la convertible, diminuent la valeur que l'investisseur donne à cette dernière. Pour éviter que celui-ci ne soit trop lésé, les contrats d'émission prévoient en général, un délai avant que le remboursement anticipé ne puisse être opéré. En conséquence, à partir d'une certaine date, le cours de la convertible ne doit pas, en théorie, pouvoir évoluer au dessus du cours du call. On doit donc, pour les nœuds concernés par cette clause call, introduire cette condition supplémentaire.

L'existence d'une clause de remboursement au gré du porteur s'intègre tout aussi aisément ; la situation est alors l'inverse de celle que nous venons d'exposer. C'est l'investisseur qui a cette fois la possibilité de demander un remboursement de la convertible à un cours généralement égal à sa valeur nominale. Cette faculté supplémentaire le protège donc contre une baisse rapide et profonde du cours du sous-jacent, puisqu'il pourra demander le remboursement de ses titres et profiter d'une évolution plus favorable sur un autre titre. Cet avantage vient donc augmenter le prix de la convertible.

Néanmoins, nous devons noter qu'en réalité les émetteurs n'exercent pas leur option de manière optimale, et attendent que le cours de la convertible leur assure que la conversion ait lieu.

La dernière étape de la modélisation consiste en l'incorporation d'un taux d'intérêt différencié selon les échéances qui puisse tenir compte du risque de défaillance.

Ainsi, lorsque le cours de l'action rend la conversion certaine, le taux d'intérêt requis correspond au taux d'intérêt sans risque. Au contraire lorsque la convertible est proche de sa composante obligataire, le taux utilisé doit être le taux en vigueur servant à l'actualisation des flux risqués. Entre ces deux extrêmes, le taux utilisé doit correspondre à une pondération des deux taux par le ratio de couverture de la période. Cette modélisation développée par Connoly [8] se distingue de celle qu'a proposée par Hull [11] qui intégrait un ratio de couverture dynamique, seul moyen de respecter la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage à chacun des nœuds du treillis.

Enfin, le taux d'intérêt utilisé doit correspondre au taux de la période, ce qui nous contraint à prendre des taux forward et non des taux zéro coupon. Leur obtention découle, cependant, de ces mêmes taux spots :

$$(1 + t_{d, T-d})^{T-d} = \frac{(1 + r_T)^T}{(1 + r_d)^d},$$

avec $t_{T, T-d}$ le taux forward entre d et T .

A titre d'exemple, la figure 1 correspond au schéma d'évolution du prix d'une obligation convertible, hors clause de remboursement afin de ne pas le surcharger, dont les caractéristiques seraient les suivantes³:

| | |
|--------------|--------------------------------|
| n=10 | coupon=4% |
| $\sigma=0,2$ | dividende de 2% |
| taux = 5% | avec 1 ^{er} versement |
| t=5 | au bout de 6 mois |
| VR=105 | |
| S=100 | |

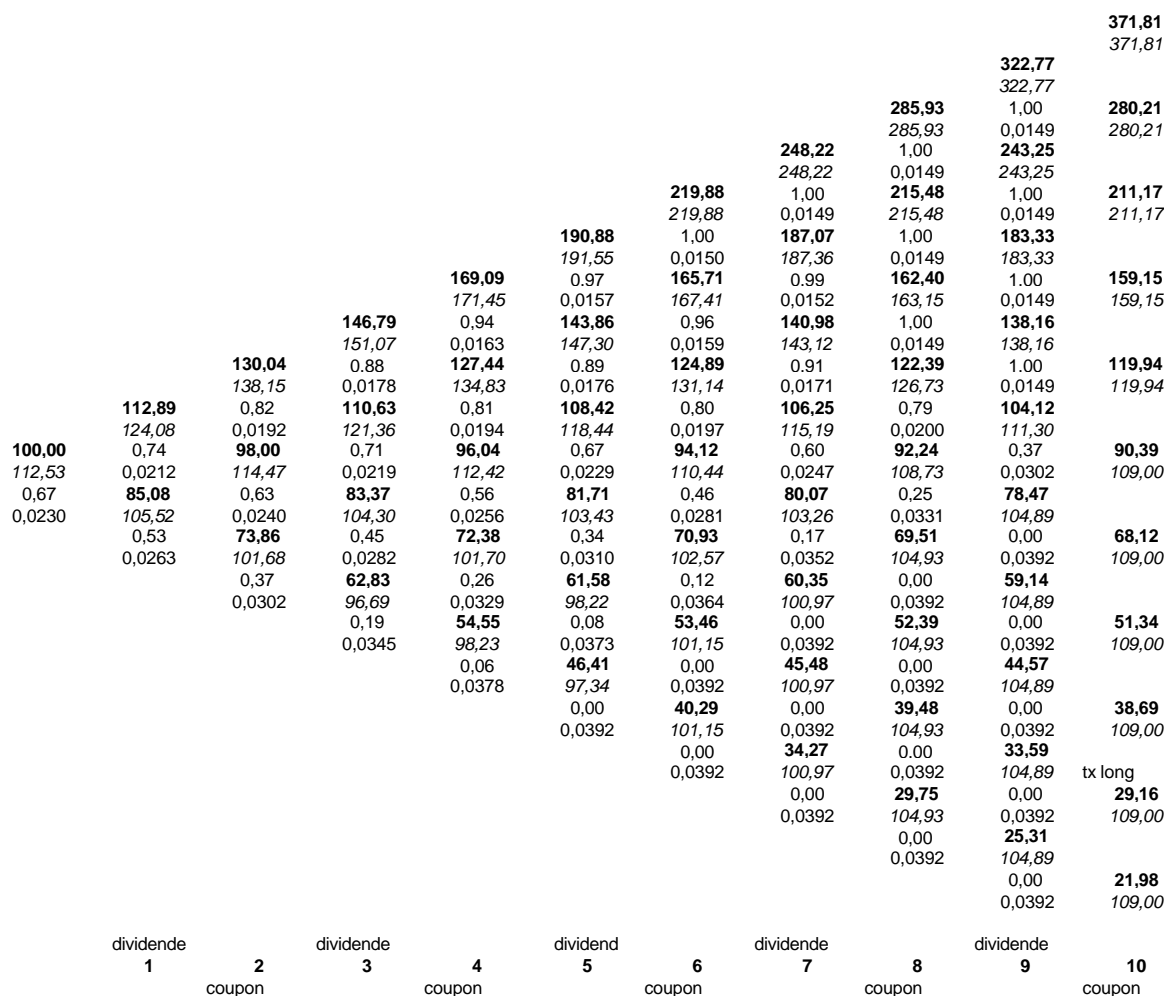


Figure 1 : Treillis d'évolution du cours d'une convertible en présence de coupons, de dividendes et avec un ratio de couverture dynamique

³ A chaque nœud et pour chaque état sont indiqués le cours de l'action (en gras), le cours de la convertible, le ratio de couverture ainsi que le taux d'intérêt de la période. n correspond au nombre de périodes, S au cours du sous-jacent, E à la valeur de remboursement, σ la volatilité du cours de l'action sous-jacente, tx le taux d'intérêt annuel et t la maturité.

Les différentes raisons évoquées précédemment nous ont poussé à privilégier cette approche proposée par Connoly qui offre en plus de la rigueur théorique une simplification de la procédure d'évaluation.

Les choix opérés, nous pouvions nous concentrer sur notre seconde étape, concernant l'analyse empirique de l'approche retenue sur le marché français. Notre étude couvre la période du 1^{er} janvier au 31 octobre 1996. Le choix de cette plage d'analyse était liée à la publication d'un ouvrage écrit par Prunier [16] répertoriant l'intégralité des titres convertibles en circulation ainsi que leurs différentes caractéristiques.

La première étape de notre démarche a alors été de parvenir à déterminer les courbes de structure par terme des taux d'intérêt sans risque de défaut d'une part et celles risquées d'autre part, permettant l'actualisation des différents flux versés par la convertible.

3. Obtention des paramètres

La détermination du taux d'intérêt sans risque a constitué l'étape suivante de notre étude. Comme pour l'évaluation de l'obligation convertible le taux sans risque pouvait être obtenu à partir d'une variable unique ou encore à partir de plusieurs variables afin d'éviter d'avoir une corrélation parfaite entre les taux de différentes échéances. L'idéal correspond à l'utilisation d'un modèle permettant de réaliser un ajustement parfait avec la courbe de structure par terme des taux d'intérêt observée.

Dans cette optique, il est possible de réaliser une dépendance temporelle des paramètres ou encore de considérer la courbe de structure par terme des taux d'intérêt observée comme un input et de lui faire subir plusieurs déformations aléatoires. Pourtant cette approche, parfaitement rigoureuse en théorie, est beaucoup plus longue à réaliser et les quelques études empiriques qui ont été menées ont pu certifier que les modélisations à partir du taux au comptant était bien plus performantes que celles fondées sur le taux forward.

Cette analyse nous a poussé à retenir une modélisation à partir du taux spot, sans pour autant que nous ayons pu être fixés sur le processus requis. C'est l'analyse du taux d'intérêt risqué qui a motivé notre choix.

L'estimation du taux d'intérêt risqué s'est faite en utilisant la modélisation développée par Longstaff et Schwartz [13] et testée dans un article publié par Meyfredi [15].

Ainsi, la validation du modèle de L&S a requis, en plus des paramètres du modèle de Vasicek [17] que l'on cherche⁴ ceux liés à la valeur de l'entreprise et notamment sa variance et le coefficient de corrélation existant entre les browniens du processus du taux d'intérêt et celui de la valeur de l'entreprise.

Pour obtenir ces éléments, nous avons supposé que la valeur de l'entreprise correspondait à la capitalisation boursière des entreprises ayant émis les titres. Nous pouvions dès lors avoir une évolution quotidienne de cet indicateur.

Ce choix méthodologique a été opéré dans un souci de simplification, et nous sommes parfaitement conscients d'avoir intégré un biais, en n'incorporant pas à la valeur de l'entreprise la valeur de marché des différentes dettes. Pourtant celui-ci doit rester relativement faible compte tenu du fait que le cours de l'action doit intégrer le niveau de l'endettement de l'entreprise dans un marché réputé efficient.

⁴ Rappelons que le modèle de Longstaff et Schwartz intègre celui de Vasicek.

4. Validation du modèle sur le marché français

4.1 Détermination de l'échantillon

Pour déterminer notre échantillon de validation, nous sommes partis de l'ensemble des 113 titres convertibles en circulation entre le 1^{er} janvier 96 au 31 octobre 96. Seuls 96 concernaient des obligations convertibles au sens strict, les autres correspondaient principalement à des ORA ou encore à des obligations à option d'échange, dont les caractéristiques peuvent permettre de les intégrer dans les obligations convertibles, mais dont les spécificités ne peuvent permettre une évaluation sans procéder à une modification de la modélisation proposée. Nous avons écarté de notre échantillon ceux intégrant des formes spéciales de remboursement en dehors des clauses de remboursement anticipé qui constitue, par ailleurs, l'intégralité des titres en circulation à l'époque. Il s'agit des émissions dont le remboursement normal se fait par tranches, disposition qui modifie le nombre de titres en circulation et par conséquent les probabilités de remboursement.

La démarche que nous avons suivie pour l'estimation du taux d'intérêt risqué nous a conduit à ne retenir, parmi les convertibles remboursables in fine, que celles émises par des sociétés ayant également procédé à l'émission d'au moins un emprunt obligataire « classique ».

Les titres ne disposant pas d'un nombre de cotations suffisant ont été écartés. En effet, il paraît difficile de prétendre à la moindre significativité des résultats si les tests sont réalisés sur un nombre de données inférieur à 100.

Ceci nous a conduit à retenir 3 titres dont deux émis par Alcatel et 1 par la Société Générale dont les principales caractéristiques sont reprises dans les trois tableaux qui suivent.

| Société Générale 3.5 % | | | |
|--|-------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| Date de jouissance | 17/06/93 | Nominal | 660 F |
| Echéance | 01/01/00 | Taux actuariel brut | 6.22% |
| Durée de l'emprunt | 6 ans, 6 mois, 14 jours | Date de détachement des coupons | 1 ^{er} janvier |
| Nombre de titres émis | 4.545.460 | Montant des coupons | 23.1 F |
| Parité | 1/1 | remboursement | 800 F |
| Call émetteur du 01/01/97 au 31/12/99 offrant un rendement actuariel brut de 6,22% | | | |

| Alcatel 2.5 % | | | |
|---|-------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| Date de jouissance | 07/04/94 | Nominal | 800 F |
| Echéance | 01/01/04 | Taux actuariel brut | 5,5% |
| Durée de l'emprunt | 9 ans, 8 mois, 24 jours | Date de détachement des coupons | 1 ^{er} janvier |
| Nombre de titres émis | 6.250.000 | Montant des coupons | 20 F |
| Parité | 1/1 | remboursement | 1098F |
| Call émetteur du 01/01/98 au 31/12/03 offrant un rendement actuariel brut de 5,5% | | | |

| Alcatel 6.5 % | | | |
|---|-------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| Date de jouissance | 22/05/90 | Nominal | 680 F |
| Echéance | 01/01/00 | Taux actuariel brut | 6,5% |
| Durée de l'emprunt | 9 ans, 7 mois, 10 jours | Date de détachement des coupons | 1 ^{er} janvier |
| Nombre de titres émis | 8.205.000 | Montant des coupons | 44.2 F |
| Parité | 1/1 | remboursement | 1098 F |
| Call émetteur du 01/07/92 au 31/12/99 à 884 F | | | |

Ces trois titres font l'objet d'une cotation au comptant en continu et les actions sous-jacentes sont négociées sur le marché à règlement mensuel, ce qui atteste d'une liquidité optimale.

Les cours des sous-jacents et des convertibles utilisés correspondent aux cours de clôture des titres issus de la base de données Datastream[®] et couvrent la période 1/01/96 au 31/10/96. Si l'évaluation des titres émis par la société Alcatel porte sur la totalité de la période, le nombre de cotations disponibles pour l'obligation Société générale 6% 93-04 ayant servi à récupérer les paramètres de défaillance de l'entreprise nous a limité à 161 dates et cours correspondants, sur lesquels nous avons pu réaliser la validation.

Deux secteurs sont ainsi représentés dans notre échantillon, à savoir le secteur des télécommunications, énergie et transport et celui des banques de dépôts.

Les paramètres de volatilité de la valeur de l'entreprise, S , et le coefficient de corrélation r , ont été estimés à 0.2303 et 0.0763 pour Alcatel, et à 0.2131 et -0.10459 pour la Société Générale.

Etant donné que la notation de la Société Générale était identique à celle d'Alcatel nous avons retenu une valeur du taux de non remboursement des obligataires en cas de défaillance de leur entreprise, w , identique à celui d'Alcatel, c'est à dire 0.125. Notons cependant qu'une autre valeur de ce taux n'aurait que très peu influencé la valeur du seuil de défaillance, X , comme le montre les deux graphiques suivants (figure 2 et figure 3) :

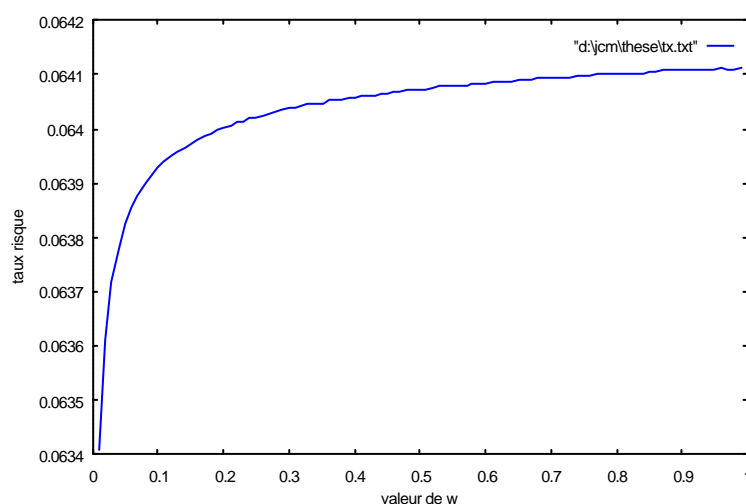


Figure 2 : Valeur de X en fonction de l'évolution de w

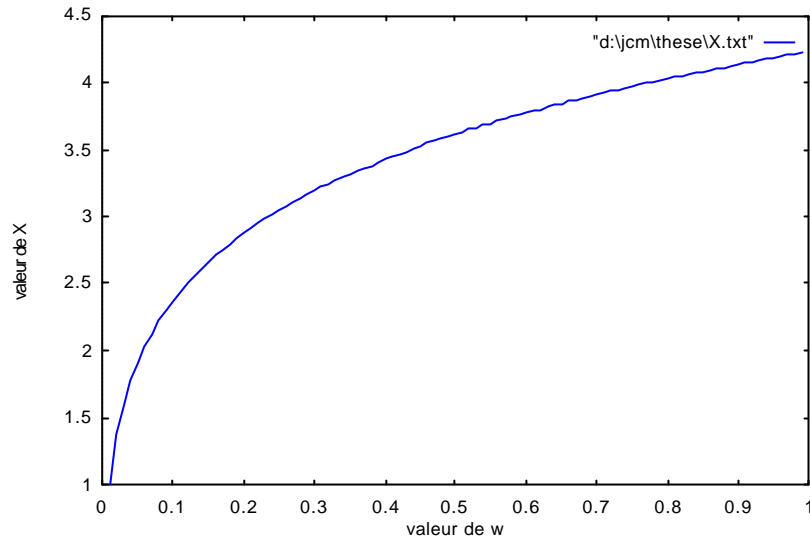


Figure 3 : Evolution du taux d'intérêt implicite en fonction de w

Le tableau 4 reprend les différentes statistiques de la valeur du seuil de défaillance X , alors que les tableaux 5 et 6 recensent les principales caractéristiques des sous-jacents et des convertibles sur la période d'étude.

| | Alcatel | Société générale |
|------------|---------|------------------|
| Moyenne | 2.18098 | 1.97304 |
| Minimum | 1.64786 | 1.63940 |
| Maximum | 2.89491 | 3.39454 |
| Ecart-type | 0.21989 | 0.24777 |

Tableau 4 : statistiques sur les valeurs de X

| | Alcatel Alsthom | Société Générale |
|-------------|-----------------|------------------|
| Cours moyen | 441.16 | 567.94 |
| Ecart-type | 30.46 | 15.82 |
| Minimum | 374.1 | 541 |
| Maximum | 492 | 618 |

Tableau 5 Statistiques sur les sous-jacents

| | Alcatel 6.5% | Alcatel 2.5 % | Soc. Gen. 3.5% |
|-------------|--------------|---------------|----------------|
| Cours moyen | 727.54 | 814.59 | 764.7 |
| Ecart-type | 15.43 | 23.12 | 13.65 |
| Min | 696 | 774 | 742 |
| Max | 762 | 874 | 793 |

Tableau 6 Statistiques sur les convertibles

Deux volatilités ont été distinguées. La première concerne la valeur de l'entreprise qui a été calculée à partir de la capitalisation boursière des sociétés étudiées. La seconde concerne la volatilité des cours de l'action qui a été estimée de manière historique sur la période d'étude. Nous ne pouvions en effet réutiliser une quelconque volatilité implicite d'options émises par l'entreprise, tout d'abord parce qu'elle est fortement liée au modèle d'évaluation des options retenu, et que, de plus, la maturité des options est bien inférieure à celle des convertibles.

Deux taux sans risque ont été utilisés ; le premier estimé à partir du modèle de Vasicek et le second à partir des réseaux de neurones⁵.

L'estimation des dividendes s'est faite à partir d'une moyenne historique pondérée des dividendes versés lors des six années précédant l'année d'évaluation en multipliant chacun des dividendes par son rang. Ainsi le taux du dividende de l'année 90 a été multiplié par 1, celui de 91 par 2, et ce jusqu'au dividende versé en 95. Nous tenons alors compte de tout éventuel changement de la politique de dividende de l'entreprise. Cependant, compte tenu du très faible taux de dividende versé par les entreprises Alcatel et Société Générale sur la période, il n'a que très peu influencé les résultats obtenus. Enfin le choix des dates de versement a été opéré en retenant la date à laquelle les sociétés ont l'habitude de verser leurs dividendes⁶.

La dernière remarque que nous pouvons signaler est liée à l'existence d'un call variable pour les titres Alcatel 2.5 % et Société Générale 3.5%. Il fallait donc prendre en considération le fait que le montant du call correspondait à un taux actuariel brut de la convertible constant. Ceci nous a conduit à utiliser l'équation suivante pour déterminer le niveau du call :

$$call = \left(VN - \left(coupon \cdot \frac{1 - (1 + Tra)^{-\frac{n}{360}}}{Tra} \right) \right) (1 + Tra)^{\frac{n}{360}}$$

où VN est la valeur nominale de la convertible, Tra le taux de rendement actuariel et n le nombre de jours séparant la date d'émission de la date d'évaluation.

4.2 Analyse des résultats

Le programme d'évaluation a été entièrement conçu en C++ et a été utilisé sur un pentium 233. Le modèle d'évaluation des obligations convertibles préconisé nous avons recherché comme l'a fait Augros [2], à vérifier la convergence de celui-ci , afin de n'occuper

⁵ Cf l'article de Bolgot et Meyfredi[5].

⁶ Le montant des dividendes ainsi que leur date de paiement proviennent de Bloomberg.

qu'une taille relativement faible en mémoire et limiter le temps de calcul. Les trois graphiques suivants (figures 4, 5 et 6) justifient notre choix de retenir la moyenne des cours obtenus pour 100 et 101 périodes.

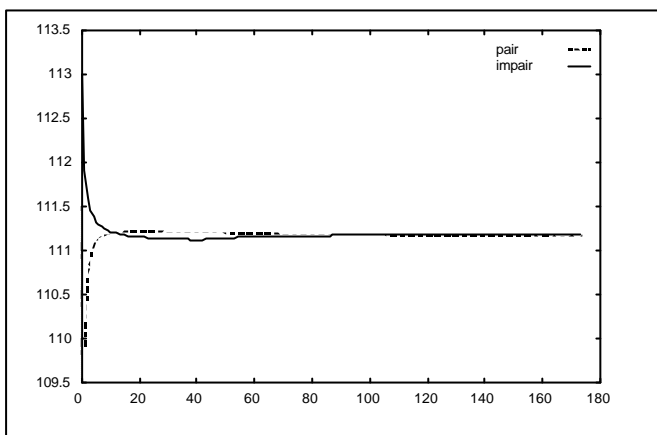


Figure 4 : Convergence du modèle pour une valeur de remboursement inférieure à la valeur du sous-jacent

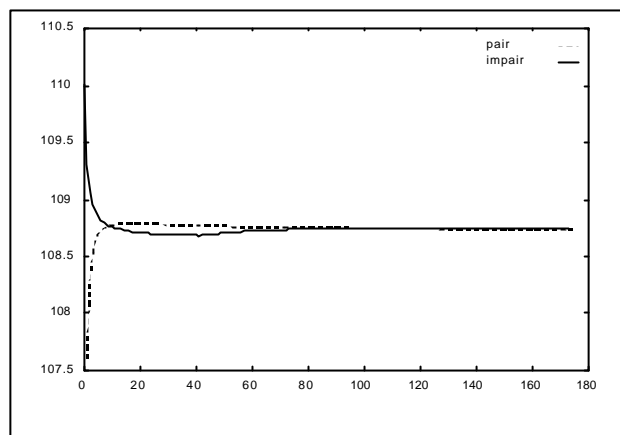


Figure 5 : Convergence du modèle pour un cours de l'action inférieur à la valeur de remboursement

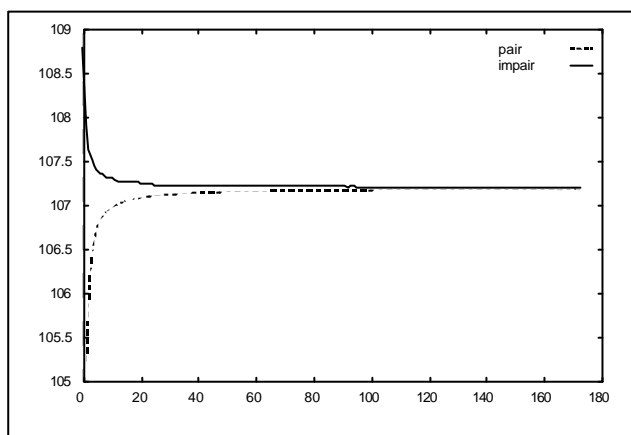


Figure 6 : Convergence du modèle pour une valeur de remboursement égale au cours du sous-jacent

Les tableaux 7 et 8 recensent quant à eux les résultats obtenus sur notre échantillon de validation.

| Convertible | $ \bar{E} $ en % | Min | Max | \bar{E} en % | Min | Max |
|------------------------|------------------|---------|---------|-----------------|----------|---------|
| Société Générale 3.5 % | 1.44831 | 0.00799 | 2.89354 | -1.44696 | -2.89354 | 0.13400 |
| Alcatel 2.5 % | 0.66562 | 0.00062 | 1.81619 | -0.08140 | -1.75290 | 1.81619 |
| Alcatel 6.5 % | 0.74866 | 0.00986 | 2.14216 | 0.58889 | -1.98697 | 2.14216 |

Tableau 7 : Taux sans risque par le modèle de Vasicek

| Convertible | $ \bar{E} $ en % | Min | Max | \bar{E} en % | Min | Max |
|------------------------|------------------|---------|---------|-----------------|----------|---------|
| Société Générale 3.5 % | 1.44691 | 0.00799 | 2.70909 | -1.44555 | -2.70909 | 0.13999 |
| Alcatel 2.5 % | 0.66549 | 0.00053 | 1.90967 | -0.05590 | -1.86476 | 1.90967 |
| Alcatel 6.5 % | 0.74656 | 0.00862 | 2.20439 | 0.59487 | -1.99157 | 2.20439 |

Tableau 8 : Taux sans risque par les réseaux de neurones

Nous pouvons remarquer que sur l'échantillon, l'erreur la plus importante porte sur le titre Alcatel 6.5%. Que le taux d'intérêt sans risque ait été déterminé à partir des réseaux de neurones ou par le modèle de Vasicek, et que quelle que soit l'obligation retenue, nous pouvons relever que l'erreur moyenne la plus élevée s'est établie à 1.4% et est toujours restée inférieure à 3% , ce qui est bien en deçà du seuil de 5% que nous nous étions fixés.

On peut remarquer également que l'estimation du taux sans risque à partir des réseaux de neurones offre, il est vrai, de meilleurs résultats par rapport au modèle de Vasicek. Ceci s'explique par le fait que les réseaux de neurones offrent un meilleur lissage des courbes de structure des taux grâce à un nombre de paramètres beaucoup plus importants. Pourtant l'écart de valorisation obtenu entre ces deux méthodes demeure très faible. En revanche, le temps nécessaire à l'estimation de la courbe de structure par terme des taux d'intérêt sans risque, est bien moins important.

L'évolution des différents cours calculés par rapport à ceux réellement observés ainsi que l'évolution des erreurs sont indiqués sur les graphiques ci-dessous⁷ :

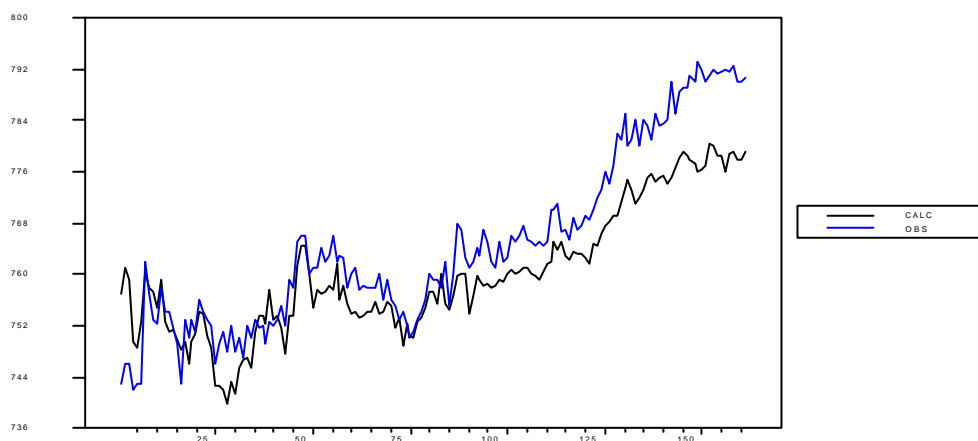


Figure 8 : Ecart cours théorique / cours observé pour le titre Société Générale 3.5%

⁷ Ces graphiques reprennent l'évolution des cours à partir d'un taux sans risque obtenu par la méthode de Vasicek, la différence entre les deux approches n'étant visuellement pas perceptible.

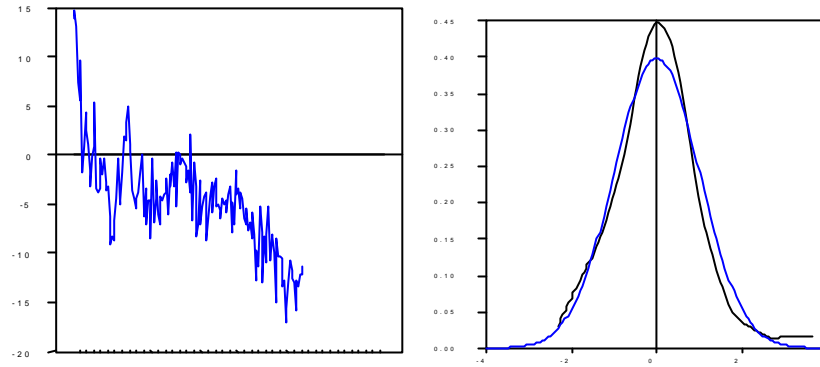


Figure 9 : Analyse des résidus de l'estimation pour le titre Société Générale 3.5 %

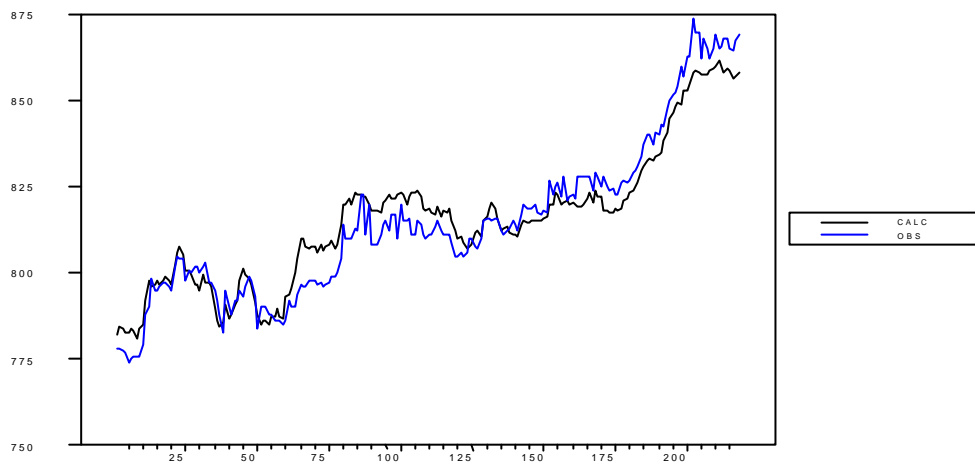


Figure 10 : Ecart cours théorique / cours observé pour le titre Alcatel 2.5 %

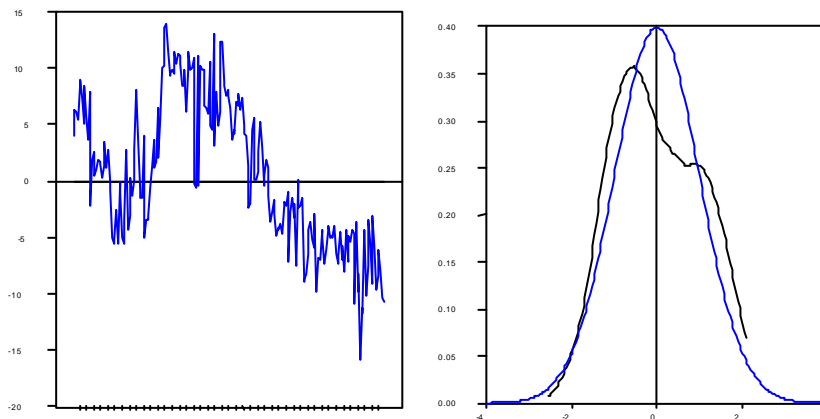


Figure 11 : Analyse des résidus de l'estimation pour le titre Alcatel 2.5 %

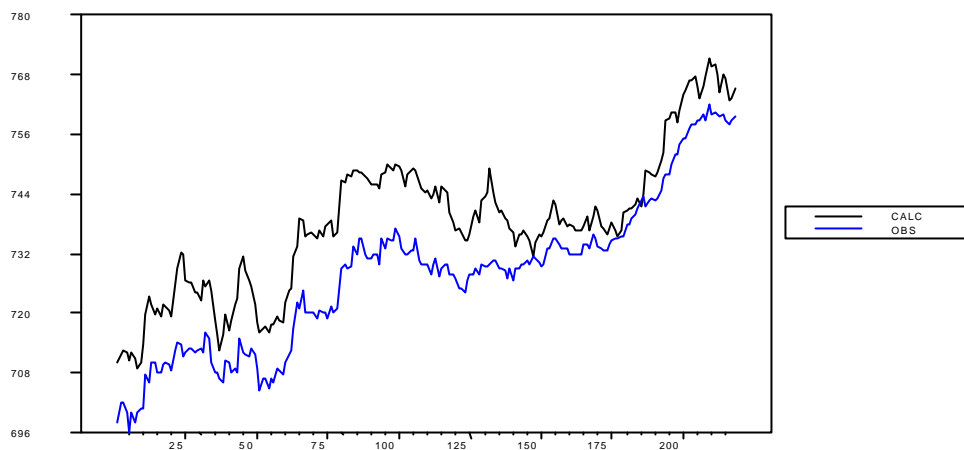


Figure 12 : Ecart cours théorique / cours observé pour le titre Alcatel 6.5%

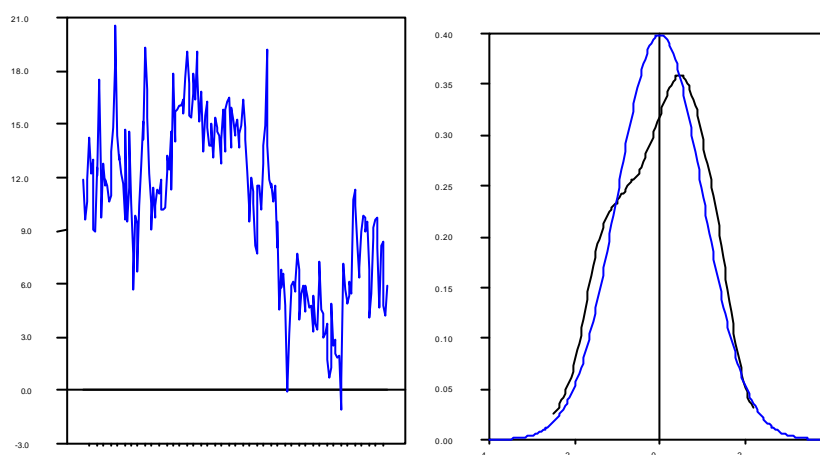


Figure 13 : Analyse des résidus de l'estimation pour le titre Alcatel 6.5 %

L'échantillon peut être dissocié en deux. D'une part, nous pouvons regrouper les titres Alcatel 2.5% et Société Générale 3.5% dont l'évolution révèle, sur la quasi totalité de la période d'étude, une très légère sous-évaluation de la valeur réellement observée. La modélisation du titre Alcatel 6.5%, d'autre part, à été caractérisée par une surévaluation systématique des cours réels.

L'erreur absolue moyenne dégagée sur la valorisation de l'obligation convertible Société Générale 3.5% s'établit à 0.75% , soit une erreur de 4.95F en valeur. La loi de distribution des résidus correspond presque exactement à une loi normale, bien que l'on puisse déceler une distribution légèrement leptokurtique.

De la même manière, nous pouvons calculer l'erreur moyenne en valeur sur la période pour les convertibles émises par la société Alcatel. Ainsi, sur notre période elle correspond à 5.36F pour le titre Alcatel 2.5% et à 9.86F pour le titre Alcatel 6.5%. Les résidus

suivent, cette fois, une distribution légèrement platikurtique. On remarque la même asymétrie que celle qui a été relevée dans [15]. Nous pouvons ainsi confirmer les conclusions qui avaient été dégagées : plus la maturité du titre à valoriser est proche de celle du titre à partir duquel le ratio de défaillance de l'entreprise a été déterminé et plus l'erreur de valorisation est faible.

Le profil des convertibles nous permet d'offrir une conclusion supplémentaire. En effet, la période sur laquelle nous avons réalisé notre étude s'est caractérisée par une stabilité des taux et une hausse du cours des actions de telle sorte que les obligations convertibles de « type taux » ont évolué vers des convertibles de « type mixte » et celles de « type mixtes » vers une configuration de « type action ». Or, au début de l'étude, les obligations se trouvaient toutes dans une configuration de « type taux » pendant laquelle on a assisté à une sur-valorisation des cours observés sur le marché. Les titres Alcatel 2.5% et Société Générale 3.5%, qui sont de type mixte, ont tout deux été caractérisés par une sous-évaluation alors que la convertible Alcatel 6.5% est restée dans une configuration de type taux. Cette observation nous permet de conclure que cette erreur est principalement liée aux taux d'intérêt et non aux paramètres de l'action, et ce même si les modèles de Vasicek ou encore les réseaux de neurones montraient sur les OAT une sur-valorisation qui a été répercutée lors de l'évaluation des convertibles.

Cette configuration de « type mixte » ou de « type taux » minimise donc l'apport des réseaux de neurones puisque c'est le taux d'intérêt risqué évalué par le modèle de Longstaff et Schwartz qui devient prépondérant. Si l'on souhaite améliorer l'évaluation des obligations convertibles il conviendrait alors de s'attacher à améliorer la modélisation du taux d'intérêt risqué.

Quoiqu'il en soit, les courbes représentatives du prix des obligations convertibles sont très proches de celles représentant l'évolution des cours, même pour la convertible Alcatel 6.5%. Il semble raisonnable de pouvoir estimer que la modélisation préconisée offre un niveau de qualité satisfaisant.

5. Conclusion et perspectives

Dans cet article nous avons présenté une méthodologie d'évaluation des obligations convertibles en action qui présente plusieurs intérêts. Le premier de ceux-ci est que le modèle retenu est extrêmement simple à implémenter. En effet, dans l'approche préconisée, la modélisation a été faite directement en temps discret ce qui nous a permis de prendre en considération sans aucune difficulté les différentes contraintes auxquelles les convertibles peuvent être soumises. En retenant, à l'instar d'Augros, une moyenne entre 100 et 101 pas de temps, nous avons pu nous affranchir des problèmes de convergence, permettant ainsi une obtention rapide des prix, ce qui constitue un second avantage indéniable. Enfin le dernier intérêt est constitué par le faible décalage que nous avons pu observer entre les prix du marché et ceux obtenus à l'aide du modèle.

Notre objectif qui était de parvenir à l'obtention d'une méthodologie d'évaluation des obligations convertibles offrant un décalage inférieur à 5% entre les prix observés sur le marché et les prix issus de la modélisation semble avoir été rempli. Nous ne pouvons cependant pas l'affirmer avec certitude compte tenu du nombre de titres ayant pu être utilisés pour la validation empirique.

Notre recherche devra donc faire l'objet de plusieurs compléments couvrant deux principales directions. La première concerne la taille de notre échantillon. Pour se faire, il sera tout d'abord nécessaire d'utiliser soit des fourchettes de brokers que nous n'avons pue obtenir pour le moment, ou bien réaliser ce test sur le marché américain. Une troisième possibilité consisterait à rechercher quel élément constitue la limite à partir de laquelle l'entreprise est en défaillance. Nous pourrions alors nous affranchir de la nécessité que l'entreprise ait émis au moins un emprunt et donc élargir encore le nombre de titres disponibles.

La seconde direction qu'il serait intéressant d'analyser est cette fois liée à la modélisation de la convertible elle-même. Nous avons mentionné la nécessité de parfaire l'estimation du taux d'intérêt risqué à laquelle nous pouvons ajouter l'introduction d'imperfections de marché qui pourra faire l'objet de développements ultérieurs, car elles ont certainement une influence sur l'existence des décalages obtenus.

Bibliographie

[1] Augros J.C., « Evaluation des obligations convertibles en actions assorties ou non de bons de souscription d'actions ordinaires ou remboursables », *Journées internationales de l'AFFI*, Université Catholique de Louvain, Louvain la Neuve, juillet 1991.

[2] Augros J.C., *Finance options et obligations convertibles*, Economica, 2ème Edition, 1992.

[3] Augros J.C. et Leboisne N., « Validation empirique d'un modèle d'évaluation d'obligations convertibles », *Banque & marchés*, n°24, septembre 1996, pp. 18-28.

[4] Barles G., Berestycki H. et Romano M., "Obligations convertibles, une revue des modèles", *Les cahiers de la CAR*, avril 1993.

[5] Bolgot S., Meyfredi, « Réseaux de neurones et lissage de la fonction d'actualisation sur le marché des OAT démembrées », *Banque & Marchés*, 35, juillet-août 1998, pp27-33.

[7] Brennan M.J. et Schwartz E.S., « Convertible Bonds : Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion », *The Journal of Finance*, 32(5), décembre 1977, pp. 1699-1715.

[8] Brennan M.J. et Schwartz E.S., "Analyzing convertible bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 15(4), September 1980, pp. 907-929.

[9] Connolly K.B., *Pricing Convertible Bonds*, John Wiley & Sons, 1998.

[10] Cox J.C., Ross S.A. et Rubinstein M., "Option Pricing a Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, September 1979, pp. 229-263.

[11] Fong H.G. et Vasicek O., " Term Structure Modeling Exponential Splines" , *The Journal of Finance*, 37(2), June 1981.

[12] Hull J.C., *Options, Futures and other Derivatives*, International Edition, 3^{ème} édition, Prentice Hall, 1997.

[13] Ingersoll, J.E. « A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities », *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp. 289-322.

[14] Longstaff F.A. et Schwartz E.S., "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt ", *The Journal of Finance*, 50(3), July 1995, pp. 789-819.

[15] Merton R.C., « On the Pricing of Corporate Debt : the Risk Structure of Interest Rates », *The Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449-470.

[16] Meyfredi J.C., «Evaluation des obligations et prise en compte du risque de défaillance de l'entreprise », *Banque & Marchés*, 43, novembre – décembre 1999, pp. 30-39.

[17] Prunier R., *Guide des obligations convertibles*, ed. SEFI, Collection Finance, juillet 1996.

[18] Vasicek O., « An Equilibrium Characterisation of the term structure », *Journal of Financial Economics*, 5(2), November 1977, pp. 177-188.

Annexes :

Principales statistiques de la validation du modèle d'évaluation des obligations convertibles.

Société Générale

```
*****
* Estimating the Unconditional Distribution of E_LS *
* using the Epanechnikov kernel with window width: 0.3608 *
* gridpoints: 128 *
* Analysis done using 218 observations from 1 to 218 *
*****
```

| Mean | Variance | Skewness | Excess Kurtosis |
|---------|----------|----------|-----------------|
| 0.54978 | 41.15986 | 0.12781 | -0.91143 |

The Jarque-Bera Normality Test, ChiSqr(2), for E_LS
Test Statistic: 8.1391 Significance Level: 0.01708

Statistics on Series E_LS

| | | | |
|----------------|---------------|-----------------------|------------|
| Observations | 218 | | |
| Sample Mean | 0.54978165138 | Variance | 41.159863 |
| Standard Error | 6.41559530768 | SE of Sample Mean | 0.434519 |
| t-Statistic | 1.26527 | Signif Level (Mean=0) | 0.20713325 |
| Skewness | 0.12781 | Signif Level (Sk=0) | 0.44421206 |
| Kurtosis | -0.91143 | Signif Level (Ku=0) | 0.00687192 |

Alcatel 2.5 %

```
*****
* Estimating the Unconditional Distribution of E_LS *
* using the Epanechnikov kernel with window width: 0.3834 *
* gridpoints: 128 *
* Analysis done using 161 observations from 1 to 161 *
*****
```

| Mean | Variance | Skewness | Excess Kurtosis |
|----------|----------|----------|-----------------|
| -4.57765 | 28.27873 | 0.67368 | 1.95881 |

The Jarque-Bera Normality Test, ChiSqr(2), for E_LS
Test Statistic: 37.9175 Significance Level: 0.00000

Statistics on Series E_LS

| | | | |
|----------------|---------------|-----------------------|------------|
| Observations | 161 | Variance | 28.278725 |
| Sample Mean | -4.5776534161 | SE of Sample Mean | 0.419099 |
| Standard Error | 5.3177744481 | Signif Level (Mean=0) | 0.00000000 |
| t-Statistic | -10.92260 | Signif Level (Sk=0) | 0.00054582 |
| Skewness | 0.67368 | Signif Level (Ku=0) | 0.00000069 |
| Kurtosis | 1.95881 | | |

Alcatel 6.5%

```

*****
* Estimating the Unconditional Distribution of E_LS *
* using the Epanechnikov kernel with window width: 0.3608 *
* gridpoints: 128 *
* Analysis done using 218 observations from 1 to 218 *
*****

```

| Mean | Variance | Skewness | Excess Kurtosis |
|----------|----------|----------|-----------------|
| 10.48451 | 21.42248 | -0.22887 | -0.76201 |

The Jarque-Bera Normality Test, ChiSqr(2), for E_LS
 Test Statistic: 7.1775 Significance Level: 0.02763

Statistics on Series E_LS

| | | | |
|----------------|---------------|-----------------------|------------|
| Observations | 218 | Variance | 21.422483 |
| Sample Mean | 10.4845114679 | SE of Sample Mean | 0.313478 |
| Standard Error | 4.6284428728 | Signif Level (Mean=0) | 0.00000000 |
| t-Statistic | 33.44580 | Signif Level (Sk=0) | 0.17067390 |
| Skewness | -0.22887 | Signif Level (Ku=0) | 0.02382983 |
| Kurtosis | -0.76201 | | |