On the convergence of FSG method

SAMI NABI-Universite Paris 1

July 3, 2002

Premia 5

1 Introduction

Au cours des dernières années, les besoins de gestion des risques financiers se sont multipliés et ont suscité le développement de contrats financiers tels que les contrats à terme fermes et les contrats à terme conditionnels appelés options .

La finance de marché s'est alors amorcée pour étudier l'efficience des marchés financiers et réduire les possibilités de spécultations et d'arbitrages générant, dans plusieurs cas, des bulles financières qui ont déstabilisé les systèmes économiques de plusieurs pays.

Dans ce cadre, la valorisation des options représente un axe principal de la recherche en mathématiques financières. Les travaux de F. Black et M. Scholes ont ouvert la porte à la détermination de formules exactes des prix des options. Cependant, pour beaucoups d'entre elles les formules exactes ne sont pas encore déterminées et on a recours de plus en plus aux méthodes numériques. Ces dernières sont multiples et leur efficacité en terme de vitesse convergence et de précision varie en fonction du type de l'option considéré.

Plusieurs algorithmes utilisés pour la valorisation d'options sont issues des méthodes d'arbres qui comptent parmi les les méthodes numériques les plus populaires. Souvent les études de la convergence théorique du prix approché, fourni par l'algorithme, vers le prix exact de l'option manquent et on se contente des études numériques.

C'est dans ce cadre que se situe notre étude. Il s'agit d'étudier la convergence théorique de "l'algorithme de la méthode Forward Shooting Grid

(FSG)" pour les options sur moyenne et les options lookback. Cet algorithme a été présenté par Barraquand et Pudet en 1996 (cf [2]). Mais leur preuve théorique de la convergence du prix approché vers le prix exacte de l'option, lorsque le nombre d'itérations tends vers l'infini, est erronée d'où l'intérêt de notre étude.

Dans la section (2) nous rappelons les différents types d'options, leurs caractéristiques, les hypothèses du modèle Black Scholes et le modèle de Cox-Ross-Rubinstein et nous listons les principales méthodes numériques utilisées pour la valorisation des options. Dans la section (3), nous présentons le principe général de la méthode de la FSG telqu'il a été présenté par Barraquand et Pudet et nous l'illustrons pour quatre types d'options. Nous présentons en particulier notre version de l'algorithme pour les options sur moyenne. La preuve de convergence des prix approchés des options sur moyenne (donnés par la nouvelle version de l'algorithme) sera présentée dans la section (5) après avoir rappelé le théorème de Kushner, dans la section (4).

2 Rappel sur les options

2.1 Généralités

Une option est un contrat à terme conditionnel. Si l'option ne peut être exercée qu'à une date fixée appelée échéance, l'option est dite européenne. Si au contraire, le détenteur de l'option peut l'exercer à n'importe quelle date entre la date d'émission du contrat et l'échéance, l'option est dite américiane. Qu'elle soit européenne ou américaine, on distingue l'option d'achat (call) de l'option de vente (put).

Le call (respectivement put) donne à son acheteur le droit et non l'obligation d'acheter (repectivement vendre) l'actif sous-jacent à un prix d'exercice fixé (ou dont la règle de détermination est fixée) dans le contrat. Quand au vendeur il s'engage à honorer son contrat si l'acheteur exerce son droit.

Si le prix d'exercice est une constante fixée par le contrat, on parle d'options standards. Par contre s'il dépend des évolutions du cours de l'actif sous-jacent, on parle d'options exotiques tels que les options sur trajectoires. Parmi ces dernières on s'interessera particulièrement aux options lookback et aux options sur moyenne.

- Options lookback :

Ce sont des options dont le payoff terminal dépend non seulement du cours de l'actif sous-jacent à l'échéance mais également de ses fluctuations tout au long de la durée de vie de l'option. L'option d'achat standard lookback paie

$$(S_T - m_T)^+ \qquad où \quad m_T = 0 \ \leq \ t \ \leq T \inf S_t$$

.

Alors que l'option de vente standard lookback paie

$$(M_T - S_T)^+ \qquad où \quad M_T = 0 \ \leq \ t \ \leq T \sup S_t.$$

- Options sur moyenne :

Appelées aussi options asiatiques sont les options dont le payoff terminal est basé sur la moyenne des valeurs du cours de l'actif sous-jacent durant une période de la vie de l'option. Si $[T_0, T]$ désigne la période sur laquelle on calcule la moyenne, le payoff terminal est donné par

$$(A_S(T_0, T) - K)^+$$

où

$$A_S(T_0, T) = \frac{1}{T_0 - T} T_0 \int^{T} S_u du$$

et K est le prix d'exercice. Parceque la variable aléatoire $A_S(T_0, T)$ n'a pas une distribution log-normale, il est difficile de trouver une formule explicite du prix d'une option asiatique. La majorité des études des options asiatiques se sont basées sur des approximations de $A_S(T_0, T)$ ou sur l'implémentation directe de la méthode de Monte Carlo. Notons qu'une formule quasi-explicite du prix d'une option asiatique a été développée par Geman et Yor (1992,1993) qui utilisent les processus de Bessel.

- Options sur moyenne capée :

C'est une option qui est différente de l'option sur moyenne dans la mesure où le cours de l'actif est limité vers la baisse par le prix d'exercice K lors du calcul de la moyenne des cours. Pour cette option $A_S(T_0, T)$ est donné par

$$A_S(T_0, T) = \frac{1}{T_0 - T} T_0 \int^{T} \max(S_u, K) du$$

Les formules fermes des prix des options lookback et des options sur moyenne existent dans [8] . Par contre, il n'existe pas de formules fermes pour les options américaines lookback et sur moyenne. On a recours à des approximations numériques.

2.2 Les hypothèses du modèle de Black et Scholes

Nous nous placons dans le cadre du modèle de Black et Scholes qui repose sur deux types d'hypothèses :

- Hypothèses de marché :

- Le marché est parfait : pas de bid-ask sur les cours de l'action, liquidité parfaite, pas de coûts de transactions et les découverts sont autorisés.
- Les actions ne payent pas de dividendes.
- Il existe un actif sans risque.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

- Hypothèses sur la dynamique du sous-jacent :

Le cours du sous-jacent S_t est régi par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \tag{1}$$

2.3 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

La motivation initiale de Cox, Ross et Rubinstein était d'approcher le prix d'une option dans le cadre du modèle de Black et Scholes. La simplicité de la valorisation des options standards par récurrence backward est l'un des éléments qui expliquent la popularité du modèle CRR.

Soit N le nombre d'itérations de l'algorithme : la dynamique de Black-Scholes sous la probabilité risque-neutre est remplaçée par la dynamique du schéma général du CRR

$$\begin{aligned} S^{(n+1)h} &= u\,S^{nh} \quad \textit{avec une probabilité } p \\ & \quad\; dS^{nh} \quad \textit{avec une probabilité } \; 1-p \end{aligned}$$

où $h = \frac{T}{N}$, et T étant la durée de vie de l'option et avec le choix convenable des paramètres :

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

Notons que $p = e^{rh} - du - d$ est la probabilité risque-neutre dans le schéma général du CRR.

2.4 Aperçu sur les méthodes numériques

On peut distinguer trois catégories de méthodes numériques :

- La méthode de Monte Carlo et la méthode de réduction des variances

:

La méthode de Monte Carlo se base sur la simulation forward des variables aléatoires. Selon J.Hull (cf [4]), cette méthode est numériquement plus efficiente que d'autres méthodes lorsque le nombre de variables stochasiques est supérieur à trois. Ceci est dû au fait que le temps de convergence est presque linéaire en fonction du nombre de variables, alors qu'il croit de manière exponentielle pour la plupart des méthodes. La méthode de Monte Carlo a l'avantage de donner l'erreur commise. Elle s'applique aux options sur trajectoires. Cependant, elle ne peut pas s'appliquer aux options américianes car il n'y a pas moyen de savoir s'il est optimal d'exercer l'option à un instant donné.

• Les méthodes de différences finies :

Ces méthodes sont utilisées pour approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) de type parabolique, analogues à celles qui interviennent dans le modèle de Black et Scholes.

Selon Barraquant et Pudet (cf [2]), lorsqu'il s'agit de problèmes de valorisation d'options sur trajectoires on obtient des EDP dégénérées (la matrice instantanée de covariance est singulière) pour lesquels les méthodes de différences finies explicites sont instables. Quand aux méthodes de différences finies implicites, elles sont stables mais ne sont précises que pour une structure particulière de la volatilité.

• La méthode de l'arbre binomial (multinomiale):

Proposée par Cox, Ross et Rubinstein (1979), cette méthode représente l'évolution du cours de l'actif sous-jacent sous la forme d'un arbre binomial. Elle se base sur l'évaluation backward du prix de l'option sur chaqun des noeuds de l'arbre.

Dans la suite nous présentons La méthode de la FSG. Pour le cas des options asiatiques, elle peut être vue comme une extension de la méthode de l'arbre binomial.

3 La méthode Forward Shooting Grid (FSG)

La méthode FSG a été présentée par Barraquand et Latombe en 1993 et reprise par Barraquand et Pudet en 1996 (cf [2]).

Nous présentons le principe général de la methode tel qu'il a été presenté dans l'article de Barraquand et Pudet. Ensuite, nous illustrons la méthode pour les cas des options lookback et nous donnons notre version de l'algorithme pour les options sur moyenne et sur moyenne capée.

3.1 Le principe général

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de cet espace.
Soit $X = (x_1, ..., x_d)^t \in R^d$ un vecteur de variables aléatoires, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt \ + \ \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2}$$

où W_t est un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien p-dimensionnel.
$b : R^+ \times R^d \to R^d$ et $\sigma : R^+ \times R^d \to R^{d\times p}$ sont des fonctions à variables réelles vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} |b(t,X) - b(t,Y)| + |\sigma(t,X) - \sigma(t,Y)| &\leq K\,|X - Y| \\ |b(t,X)| + |\sigma(t,X)| &\leq K\,(1 + |X|) \end{aligned}$$

Soit $r : R^+ \times R^d \to R^+$ une fonction continue bornée modélisant le taux d'intérêt sans risque.
Soit $g : R^d \to R^+$ une fonction $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité risque-neutre P.

On considère les options européenne et américaines suivantes

L'option européenne :

Considéronns l'option européenne d'échéance T, ayant pour vecteur d'état X et de payoff terminal

$$C(T, x_1, ..., x_d) = g(x_1, ..., x_d)$$

En appliquant la formule de Feynman-Kac, le prix de cette option à l'instant t est donné par :

$$C(t, x_1, ..., x_d) = E^P\left(e^{-\int_t^T r(u,X(u))du} g(X(T)) / \mathcal{F}_t\right)$$

L'option américaine :

On suppose de plus que g est à croissance polynômiale.

Soit v une fonction de classe $C^{1,2}\left([0,T]\times R^d\right)$ à dérivée bornée uniformément en temps et solution de

$$\left\{\begin{array}{c} \max\left(\frac{\partial v}{\partial t}+A_t v - rv,\ g-v\right)=0\ sur\ [0,T[\times R^d \\ v(T,x)=g(x)\ pour\ x\in R^d \end{array}\right.$$

avec

$$A_t v(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et

$$a_{ij}(t,x)=\sum_{k=1}^{p}\sigma_{ik}(t,x)\sigma_{kj}(t,x)$$

On note $(X_s^{t,x}, s\geq t)$ la solution de (...) partant de x à l'instant t.

La valeur à l'instant t de l'option américaine ayant pour vecteur d'état X est

$$\begin{aligned} C^a &= \sup_{\tau\in\Upsilon(t,T)} E\left(e^{-\int_t^{\tau} r(u,X(u))du} g(X_\tau^{t,x})/\mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{-\int_t^{\tau_t^*} r(u,X(u))du} g(X_{\tau_t^*}^{t,x})/\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

où $\Upsilon(t,T)$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ et τ_t^* le temps d'arrêt optimal défini par

$$\tau_t^*=\inf\left\{s\geq t,\quad v\left(s,X_s^{t,x}\right)=g\left(X_s^{t,x}\right)\right\}$$

<u>Description de la FSG dans un cadre général</u> :

Soit $(nh)_{n\in N}$ une subdivision de $[0,T]$ où $h=\frac{T}{N}$

La méthode de la FSG se base sur les étapes suivantes :

1- Discrétisation des d variables d'état $x_1,...,x_d$, en faisant un bon choix (dans le sens de la complexité de l'algorithme) des pas de discrétisation dans les directions des variables dépendant de la trajectoire.

2- Construction d'une chaîne de markov $\left(\overline{X}^{nh}\right)_{n\in N}$ approximant le processus continu (X_t) et vérifiant des conditions de consistence locales qui vont être présentées dans (...).

Notons que les étapes (1) et (2) permettent de construire la suite des grilles de l'espace d'état.

3- Approximation de la valeur de l'option par récurrence backward classique du modèle binomial.

Etape 1:

Pour la discrétisation on choisit d fonctions $f_1, ..., f_d$ tel que

$$pour \;\; i = 1, ..., d \qquad x^{nh}_{i,\ j^{nh}_i} = f_i\left(nh,\ j^{nh}_i \rho_i(nh)\right) \tag{3}$$

$\rho_i(nh)$ étant le pas de discrétisation dans la direction de la $i^{\text{ème}}$ variable, à l'instant nh, à choisir de manière à satisfaire les conditions de consistence locale et de guarantir une complexité satisfaisante de l'algorithme.
$j^{nh}_i \in \left\{0, ..., (j^*)^{nh}_i\right\}$ tel que

$$\begin{aligned} x^{nh}_{i,\ 0} &= x^{nh}_{i,\ m} : \textit{la valeur minimale que peut prendre la variable } i \textit{ à l'instant } \; t = nh \\ x^{nh}_{i,\ (j^*)^{nh}_i} &= x^{nh}_{i,\ M} : \textit{la valeur maximale que peut prendre la variable } i \textit{ à l'instant } \; t = nh \end{aligned}$$

On note (X^{nh}) la discrétisation du vecteur X_t à l'instant $t = nh$

Etape 2:

On sait que le mouvement brownien standard est la limite quand $h \to 0$ de la distribution binomiale de pas $\sqrt{h}$. (cf [1]). Soit $\left(\overline{W}^{nh}\right)$ le processus binomial approximant (W_t) et qui est défini par :

$$P\left(\overline{W}^{(n+1)h} = \overline{W}^{nh} + \epsilon\sqrt{h}\right) = \frac{1}{2} \quad pour\ \epsilon = \pm\ 1$$

On peut discrétiser l'équation différentielle stochastique (2) par un schéma d'Euler qui converge en moyenne quadratique vers la solution de l'EDS (...) :

$$\begin{aligned}\overline{X}^{(n+1)h} &= X^{nh} + \ b(nh, X^{nh})h \ + \ \sigma(nh, X^{nh})(\overline{W}^{(n+1)h} - \overline{W}^{nh}) \quad (4)\\ &= X^{nh} + \ b(nh, X^{nh})h \ + \epsilon \ \sigma(nh, X^{nh})\sqrt{h}\end{aligned}$$

avec $\overline{X}^0 = X^0 = X_0$

Dans les exemples que nous traitons nous choisissons d'autres types de chaînes mais qui vérifient les conditions de consistence locale.

D'après (4) on peut, à l'instant $t = nh$, déterminer les valeurs possibles $\overline{x}_i^{(n+1)h}$ de la variable i . Nous pouvons alors déterminer les valeurs possibles de $j_i^{(n+1)h}$ de manière à ce que la valeur donnée par la discrétisation (3) soit la plus proche possible de $\overline{x}_i^{(n+1)h}$:

$$j_i^{(n+1)h}\left(j_i^{nh}, \epsilon\right) = P.Enti\grave{e}re\left(\frac{f_i^{-1}\left((n+1)h, \quad \overline{x}_i^{(n+1)h}\right)}{\rho_i((n+1)h)}\right)$$

On note

$$\begin{aligned}j_i^{(n+1)h}\left(j_i^{nh}, 1\right) &= j_{+-}^i \ , \quad J_{+-} = (j_{+-}^1, ..., j_{+-}^d)^t\\ j_i^{(n+1)h}\left(j_i^{nh}, -1\right) &= j_{--}^i \ , \ J_{--} = (j_{--}^1, ..., j_{--}^d)^t\end{aligned}$$

Etape 3:

Une approximation de la valeur de l'option européenne peut être obtenu par récurrence backward en utilisant :

$$\begin{aligned}C^{nh} &= e^{-r\left(nh, X^{nh}\right)}\left(\frac{1}{2}C_{J_{+-}}^{(n+1)h} + \frac{1}{2}(1-p)C_{J_{--}}^{(n+1)h}\right) \ pour \ n = 0, ..., N-1\\ C^{Nh} &= g(T, X^{Nh})\end{aligned}$$

Remarque : La FSG pour la valorisation des options américaines

A chaque instant $t = nh$, on calcule pour tous les noeuds de la grille de l'espace d'état la valeur de l'option européenne. On calcule aussi la valeur du payoff en supposant que la date d'exercie est $t = nh$. Sur chaque noeud de la grille, la valeur de l'option américaine est alors le maximum entre les deux valeurs ainsi calculées. En raisonnant par récurrence backward on détermine la valeur à $t = 0$ de l'option.

Dans nos applications, l'espace d'état est de dimension 2. On se placera dans le cadre du modèle CRR. Dans ce cas, par rapport à la méthode d'arbre binomial, la FSG ajoute un second vecteur d'état qui tient compte de la trajectoire du cours de l'actif risqué.

3.2 Applications

Pour illustrer la méthode nous considérons une option européenne sur trajectoire dont l'actif contingent est de prix (S_t) ne versant pas de dividendes et évoluant selon le modèle de Black Scholes. L'échéance de l'option est T et le payoff terminal est $C_T = g(S_T, \varphi_T)$ où φ_T est la variable qui dépend de la trajectoire. Nous considérons les exemples suivants :

3.2.1 Cas de l'option d'achat lookback

$$\varphi_t = m_t = 0 \leq u \leq t \min S_u$$

L'intervalle [0, T] est divisé en N subdivisions de pas $h = \Delta t = \frac{T}{N}$
Nous discrétisons les valeurs de (S_t) et (m_t) de la manière sivante :

$$\begin{aligned} S_j^{nh} &= S_0 e^{j\sigma\sqrt{h}} \\ m_k^{nh} &= S_0 e^{k\sigma\sqrt{h}} \qquad\qquad j,\ k = -n, ..., n \end{aligned} \tag{5}$$

La relation entre l'évolution de m et celle de S est donnée par :

$$m^{(n+1)h} = \min(m^{nh}, S^{(n+1)h})$$

En passant de l'instant $t = nh$ à l'instant $t = (n+1)h$ et sous l'approximation par l'arbre binomial, on associe les transitions :

(I)

up	$(m_k^{nh}\ , S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(m_k^{nh}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	p
down	$(m_k^{nh}\ , S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(\min(S_{j-1}^{(n+1)h}, m_k^{nh}), S_{j-1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$(1-p)$

Or, d'après la discrétisation de m donnée par (5) on a :

$$m_k^{(n+1)h} = S_0 e^{k^{(n+1)h}\sigma\sqrt{h}}$$

Ainsi, $k^{(n+1)h} = k^+ = k$ si la transition est up
et $k^{(n+1)h} = k^- = \min(k, j-1)$ si la transition est down.

Soit $C_{j,k}^{nh} = C(S_j^{nh}, m_k^{nh}, nh)$ la valeur de l'option à l'instant $t = nh$ où $m = m_k^{nh}$ et $S = S_j^{nh}$. La valeur de l'option étant donnée la condition du payoff terminal est obtenue par la récurrence backward :

$$C_{j,k}^{nh} = e^{-rh}\left[pC_{j+1,k}^{(n+1)h} + (1-p)C_{j,k^-}^{(n+1)h}\right]$$

où r est le taux d'intérêt sans risque et p est le paramètre de la probabilité risque neutre ayant pour expression :

$$p = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \tag{6}$$

<u>Remarques :</u>

1) La valeur minimale du cours sur l'ensemble $\{\ t = 0, ..., t = nh\}$ appartient nécessairement à l'arbre du cours (S). Ainsi, la grille, de l'espace d'état augmenté, à l'instant $t = nh$ est $(Y = S^0 e^{j\sigma\sqrt{h}}, Z = S^0 e^{k\sigma\sqrt{h}})_{\ j\in\{-n,...,n\},k\in\{-n,...,0\}}$.

2) A l'instant $t = nh$, on peut modéliser le cours (S) par $S_j^{nh} = S_0 u^j d^{n-j}$ où $j = 0, ..., n$. Pour atteindre ce cours, il y a C_n^j trajectoires possibles. Le nombre total de trajectoires à $t = nh$ est donc égal à 2^n. Cependant, le nombre maximal de valeurs possibles de m^{nh} est $(n+1)(\frac{n}{2}+1) \ll 2^n$.

3.2.2 Cas de l'option sur moyenne

$\varphi_t = A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u du$

L'intervale [0, T] est divisé en N subdivisions de pas $h = \Delta t = \frac{T}{N}$ et on considère la même discrétisation du cours (S_t) que précédemment.

Contrairement au cas du minimum, il y a autant de valeurs possibles de (A) à l'instant $t = nh$ que de trajectoires : (2^n). Ce nombre croit de manière exponentielle avec le nombre de pas de temps. Il est impensable de considérer un vecteur A^{nh} ayant pour composantes toutes les valeurs possibles de la moyenne.

La discrétisation proposée par Barraquand et Pudet est la suivante :

$$A_k^{nh} = S_0 e^{k\Delta Y} \qquad k \ = -\frac{n}{\mu}, ..., \frac{n}{\mu} \tag{7}$$

où $\Delta Y = \mu\sigma\sqrt{h}$

μ est un paramètre fixé telque $\frac{1}{\mu}$ soit entier.

Nous proposons de construire $A^{nh} = (A_0^{nh}, ..., A_{k^*(n,h)}^{nh})^t$ telque $A_0^{nh} = A_m^{nh}$ (respectivement $A_{k^*(n,h)}^{nh} = A_M^{nh}$) est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur que peut prendre la moyenne à un instant $t = nh$ et pour $k = 0, ..., k^*(n,h)$

$$A_k^{nh} = A_m^{nh} e^{k\rho(nh)} \tag{8}$$

$\rho(nh)$ est un pas de discrétisation à choisir convenablement. Nous revenons sur ce choix dans la section 5.1.

Nous allons voir par la suite qu'une interpolation entre les composantes du vecteur A^{nh} est nécessaire pour déterminer par récurrence backward la valeur initiale de l'option.

En posant

$$\overline{A}^{nh} = \frac{1}{n+1}\ i = 0\sum^{n} S^{ih}$$

S^{ih} vue comme la valeur du cours à $t = ih$ et nom comme vecteur.

La nouvelle valeur $\overline{A}^{(n+1)h}$ s'exprime en fonction de $\overline{A}^{nh}$et $S^{(n+1)h}$ comme suit :

$$\overline{A}^{(n+1)h} = \overline{A}^{nh} + \frac{S^{(n+1)h} - \overline{A}^{nh}}{n+2}$$

En passant de l'instant $t = nh$ à l'instant $t = (n+1)h$ et sous l'approximation par l'arbre binomial, on associe les transitions :

up	$(A_k^{nh}\ , S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_+^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	p
down	$(A_k^{nh}\ , S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_-^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$(1-p)$

avec

$$\begin{aligned} A_+^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} - A_k^{nh} n + 2 \\ A_-^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} - A_k^{nh} n + 2 \end{aligned} \tag{9}$$

D'après la discrétisation de (A) donnée par (5) on a $A_k^{(n+1)h} = A_m^{(n+1)h} e^{k^{(n+1)h}\rho((n+1)h)}$. Ainsi, il n'est pas nécessaire que $A_+^{(n+1)h}$et $A_-^{(n+1)h}$ coïncident avec des composantes du vecteur $A^{(n+1)h}$. On utilise l'interpolation décrite dans (3.1). On définit :

$$k^{+-} = P.Enti\grave{e}re \left(\frac{\ln(A_+^{(n+1)h} A_m^{(n+1)h}}{\rho((n+1)h)} \right)$$

de même on définit k^{--} en remplaçant $A_+^{(n+1)h}$par $A_-^{(n+1)h}$.
On définit aussi $k^{++} = k^{+-} + 1$ et $k^{-+} = k^{--} + 1$

On pose

$$\varepsilon_+^{(n+1)h} = A_+^{(n+1)h} - A_{k^{+-}}^{(n+1)h} A_{k^{++}}^{(n+1)h} - A_{k^{+-}}^{(n+1)h}$$

et de même

$$\varepsilon_-^{(n+1)h} = A_-^{(n+1)h} - A_{k^{--}}^{(n+1)h} A_{k^{-+}}^{(n+1)h} - A_{k^{-}}^{(n+1)h}$$

Le shéma markovien qu'on considère maintenant est le suivant :

(A_k^{nh}, S_j^{nh})	$\rightarrow$	$(A_{k++}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$p\varepsilon_+^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(A_{k+-}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$		$p(1-\varepsilon_+^{(n+1)h})$
(A_k^{nh}, S_j^{nh})	$\rightarrow$	$(A_{k-+}^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1-p)\varepsilon_-^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(A_{k--}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$		$(1-p)(1-\varepsilon_-^{(n+1)h})$

Soit $C_{j,k}^{nh} = C(S_j^{nh}, A_k^{nh}, nh)$ la valeur de l'option à l'instant $t = nh$ où $A = A_k^{nh}$ et $S = S_j^{nh}$. La valeur de l'option étant donnée la condition du payoff terminal est obtenue par la récurrence backward :

$$\begin{aligned} C_{j,k}^{nh} &= e^{-rh}\Big[p\left(\varepsilon_+^{(n+1)h}C_{j+1,k++}^{(n+1)h} + (1-\varepsilon_+^{(n+1)h})C_{j,k+-}^{(n+1)h}\right) \\ &\quad + (1-p)\left(\varepsilon_-^{(n+1)h}C_{j,k-+}^{(n+1)h} + (1-\varepsilon_-^{(n+1)h})C_{j,k--}^{(n+1)h}\right)\Big] \end{aligned} \tag{10}$$

3.2.3 Cas de l'option sur moyenne capée

$\varphi_t = B_t = \frac{1}{t}0\int^{t} \max(S_u, K)du$

$B_{t+h} = B_t + t\int^{t+h} \max(S_u, K) - B_u u du$

Comme pour le cas de l'option sur moyenne nous choisissons la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} B_k^{nh} &= B_m^{nh}e^{k\lambda(nh)} \qquad \textit{pour } k = 0, ..., k^*(n) \\ \textit{avec}\ \ B_{k^*(n)}^{nh} &= B_M^{nh} \end{aligned} \tag{11}$$

où $\lambda(nh)$ est un pas de discrétisation à choisir convenablement. Nous revenons sur ce choix dans la section 5.2.

On définit $B_+^{(n+1)h}$ et $B_-^{(n+1)h}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_+^{(n+1)h} &= B_k^{nh} + \max(e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) - B_k^{nh}n + 2 \\ B_-^{(n+1)h} &= B_k^{nh} + \max(e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) - B_k^{nh}n + 2 \end{aligned} \tag{12}$$

$B^{(n+1)h}_{k++}$, $B^{(n+1)h}_{k+-}$, $B^{(n+1)h}_{k-+}$et $B^{(n+1)h}_{k--}$ sont définis comme $A^{(n+1)h}_{k++}$, $A^{(n+1)h}_{k+-}$, $A^{(n+1)h}_{k-+}$et $A^{(n+1)h}_{k--}$ pour le cas de la moyenne.

Le shéma markovien approximant le processus continu est le suivant :

(B^{nh}_k, S^{nh}_j)	$\rightarrow$	$(B^{(n+1)h}_{k++}, S^{(n+1)h}_{j+1})$	avec une probabilité	$p\alpha^{(n+1)h}_+$
	$\rightarrow$	$(B^{(n+1)h}_{k+-}, S^{(n+1)h}_{j+1})$		$p(1-\alpha^{(n+1)h}_+)$
(B^{nh}_k, S^{nh}_j)	$\rightarrow$	$(B^{(n+1)h}_{k-+}, S^{(n+1)h}_{j-1})$		$(1-p)\alpha^{(n+1)h}_-$
	$\rightarrow$	$(B^{(n+1)h}_{k--}, S^{(n+1)h}_{j+1})$		$(1-p)(1-\alpha^{(n+1)h}_-)$

où $\alpha +$
$-^{(n+1)h}$ sont définis comme $\varepsilon +$
$-^{(n+1)h}$ en remplaçant (A) par (B).

L'expression de la valeur de l'option à l'instant $t = nh$ où $B = B^{nh}_k$ et $S = S^{nh}_j$est analogue à celle de l'option sur moyenne.

4 Les conditions de consistance locale et le théorème de Kushner

Dans la section (3.2) on a proposé des prix approchés des options lookback et sur moyenne. Ce qui est plus intéressant est d'être en mesure d'annoncer que ce prix tend vers le prix exacte de l'option lorsque le pas de temps h tend vers 0. On a vu que l'algorithme de la FSG s'articule sur l'approximation du processus continu par une chaî̂ne de Markov que l'on obtient une fois les étapes (1) et (2) sont accomplies. La méthode d'approximation par une chaî̂ne de Markov est générale et est utilisée pour approcher l'espérence de fonctions de processus stochastiques contrôlés. Harold Kushner s'est intéressée à cette méthode et a développé dans [5] et [6] des éléments théoriques concernant la convergence de la valeur d'une fonction approchée vers la valeur de la fonction exacte qui lui correspond.

Une propriété clée qui doit être satisfaite par la chaî̂ne de Markov approximant le processus initial est la <u>Consistance</u> <u>locale</u> : la variation de la chaî̂ne en passant de l'instant $t = nh$ à l'instant $t = (n + 1)h$ doit vérifier que l'espérence et la covarience conditionnelles de sa moyenne sont égales à celles de la variation du processus continu entre ces deux instant à un $o(h)$ près .

Le théorème de Kushner énonce que les conditions de consistance locale garantissent la convergence des espérences des fonctions usuelles. Nous présentons le théorème dans le cas de processus non contrôlés.

4.1 Le problème en temps continu

Considérons l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$X_{t+s} = x + \int_t^{t+s} b\left(u, X_u\right) du + \int_t^{t+s} \sigma\left(u, X_u\right) .dW_u \tag{13}$$

où W est un mouvement brownien $k-$dimensionnel . Le problème est d'approximer la quantité

$$V\left(t, x\right) = E_{t,x}\left[g\left(X_\tau\right)\right]$$

où τ est le premier temps de sortie de X_s d'un ensemble ouvert G de $\mathbb{R}^{1+d}$ qui vérifie $(H3)$

$$\tau = \inf\left\{u > t,\, \left(u, X_u\right) \notin G\right\} \wedge T$$

Hypothèses :

$(H1)$ b et σ sont continues et bornées.
$(H2)$ g est continue et bornée.
$(H3)$
(a) $G = \mathbb{R}^{1+d}$ ou :
(b) pour un certain indice i

$$G = \left\{\, t < u < T,\, L_i\left(u\right) < x_i < U_i\left(u\right)\right\}$$

où L_i, U_i sont des fonctions continues sur $[t, T]$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Pour ce même indice i, $\sum_{j=1}^k \sigma_{i,j}^2\left(u, X_u\right) > \alpha$ pour $\alpha > 0$, uniformément en u.

<u>Remarque</u> :

Dans le cadre de la valorisation des options $G=\mathbb{R}^{1+d}$ et dans notre cas $d=2$.

4.2 Les conditions de consistance locale

Soit N un entier strictement positif, $h=\frac{T}{N}$ et $\left(\xi^{nh}\right)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov discrète.

Notons $\Delta\xi^{nh}=\xi^{(n+1)h}-\xi^{nh}$

La chaîne $\left(\xi^{nh}\right)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions de consistance locale données par

$$\begin{aligned} E_{x,n}^{h}\left[\Delta\xi^{nh}\right] &= b\left(nh,x\right)h+o\left(h\right)\\ E_{x,n}^{h}\left[\left(\Delta\xi^{nh}-E_{x,n}^{h}\left[\Delta\xi^{nh}\right]\right).\left(\Delta\xi^{nh}-E_{x,n}^{h}\left[\Delta\xi^{nh}\right]\right)'\right] &= a\left(nh,x\right)h+o\left(h\right)\end{aligned}$$

où $E_{x,n}^{h}$ est l'espérence conditionnelle à l'instant nh connaissant $\xi^{nh}=x$, et $a\left(s,x\right)=\sigma\left(s,x\right)\sigma\left(s,x\right)'$. Notons que ces conditions signifient que, localement, la chaîne a les mêmes moyenne et variance conditionnelles que celles du processus continu car

$$\begin{aligned} E_{x,s}\left[X_{s+h}\right] &= x+b\left(s,x\right)h+o\left(h\right)\\ E_{x,s}\left[\left(X_{s+h}-x\right).\left(X_{s+h}-x\right)'\right] &= a\left(s,x\right)h+o\left(h\right)\end{aligned}$$

Nous supposons aussi que

$$\sup_{n,\omega}\left|\Delta\xi^{nh}\right|h \quad\rightarrow\quad 0\rightarrow 0$$

Soit $\widehat{\xi}^{h}\left(t\right)$ le processus continu défini par

$$\widehat{\xi}^{h}\left(t\right)=\xi_{n_t h}^{h}$$

où n_t est l'entier telque $n_t h\leq t<n_t h+h$.

Soit $\widehat{\tau}_h$ le premier temps de sortie du processus $\left(t,\widehat{\xi}^{h}\left(t\right)\right)$ de l'ensemble G.

4.3 Le théorème de Kushner

Pour prouver la convergence du prix approché d'une option européenne asiatique, donné par l'algorithme de la FSG, on utilise le théorème suivant :

<u>*Théorème*</u> : (cf [5], théorème 5.1)

Sous les hypothèses H1, H2 et H3 ona

$$V(t,x) = E\left[g(\tau, X_\tau)\right] = \lim_{h\to 0} V_h(t,x)$$

où

$$V_h(t,x) = E\left[g\left(\widehat{\tau}_h, \widehat{\xi}^h(\widehat{\tau}_h)\right)\right]$$

Pour la preuve de la convergence du prix approché d'une option américaine asiatique, donné par l'algorithme de la FSG, on utilise un théorème analogue au précédent. (cf [6] théorème 6.2.).

5 Consistance locale pour la FSG: cas des options sur moyenne et des options lookback

5.1 A propos de la preuve de Barraquand et Pudet

Dans l'article [2] Barraquant et Pudet montrent qu'à l'instant $N\Delta t$ l'écart entre le prix approché et le prix exact tend vers 0 lorsque Δt et ΔY (le pas de discrétisation de la moyenne dans le cas de l'option sur moyenne) tendent vers 0 sans aucune relation entre les deux paramètres. Ensuite, ils généralisent l'expression et énoncent que la même conclusion pourrait être obtenu, par simple récurrence backward, pour l'écart entre les prix approché et exact à l'instant initial. Ce passage est erroné. Notre conclusion est confirmée par une étude réalisée par P.A. Forsyth, K.R. Vetzal et R. Zvan (cf[3]).

Nous avons vu, dans le cas de l'option sur moyenne, qu'une interpolation est faite à chaque étape pour déterminer le prix approché sur chaqun des noeuds de la grille de l'espace d'état. Or, cette interpolation induit une erreur. Lorsque le pas h tend vers zéro, le nombre d'étapes tend vers l'infini. Ainsi, la somme infinie de l'erreur finie doit être manipulée convenablement. Selon Forsyth, Vetzal et Zvan, Barraquand et Pudet ne tiennent en compte dans leur démonstration que de l'erreur à l'instant $N\Delta t$. D'autre part, ils montrent que pour le choix de discrétisation de Barraquand et Pudet l'erreur ne tends pas nécessairement vers zéro et que ca serait le cas, si on choisit convenablement le pas ΔY. Nous parlons de ce choix dans la section (5.1) et nous aboutissons, en utilisant une preuve différente, à la même conclusion que celle de Forsyth, Vetzal et Zvan.

L'algorithme de la FSG pour les options sur moyenne telque l'on présente dans cette étude, diffère de celui proposé par Barraquand et Pudet au niveau du choix du pas de la discrétisation. Comme on l'a déja dit, ce dernier étant un paramètre fondamental jouant un double rôle. Le premier au niveau de la convergence théorique de l'algorithme et le second au niveau de la vitesse de cette convergence.

Pour l'option d'achat lookback et l'option de vente lookback les processus continus (S,m) et (S,M) ne sont pas des diffusions stochastiques puisqu'ils ne vérifient pas l'équation (14). Ainsi, nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Kushner. Cependant, il nous a paru naturel de vérifier que les conditions de consistance locale sont vérifiées.

Dans cette section nous prouvons la convergence, pour les options européenne et américaine sur moyenne et sur moyenne capée , de l'algorithme de la FSG. Pour cela nous vérifions les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et les conditions de consistence locale.

Dans le cadre du modèle de Black et Scholes (H1) est vérifiée.Concernant (H2) : g est le payoff actualisé de l'option. g est continue mais pourrait être non borné (cas des options d'achat (calls)). Pour contourner ce problème on peut utiliser la parité Call-Put. Enfin, (H3) est vérifiée car $G = \mathbb{R}^2$

Dans la suite on vérifiera les conditions de consistance locale.

5.2 Consistance locale : cas de l'option sur moyenne

Le processus continu (S,A) est bien une diffusion stochastique puisque

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \\ dA_t = S_t - A_t t dt \end{cases}$$

(S,A) étant approché par la chaîne de Markov (S_j^n, A_k^n). Pour prouver que le prix approché de cette option converge vers le prix exact, il ne nous reste que la vérification des conditions de consistence locale.

5.2.1 Calculs

<u>Calcul des premiers et seconds moments</u>
<u>et du moment croisé du processus continu</u>

On a

$$\boxed{E_t(S_{t+h}) = E(S_{t+h}/S_t) = S_t + rS_t h + o(h)}$$

$$E_t\left((S_{t+h} - S_t)^2\right) = E((S_{t+h} - S_t)^2/S_t) = (\sigma S_t)^2 h + o(h)$$

on obtient

$$\boxed{E_t\left((S_{t+h})^2\right) = (S_t)^2 + 2\,(S_t)^2\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) h + o(h)}$$

On a $\quad A_{t+h} = A_t + t \int^{t+h} S_u - A_u u du$

$$\boxed{E_t(A_{t+h}) = E(A_{t+h}/A_t) = A_t + S_t - A_t t h + o(h)}$$

En appliquant l'espérance conditionnelle dans la première ligne et en identifiant les deux expressions de $E_t(A_{t+h})$

on a :

$$E_t\left(t \int^{t+h} S_u - A_u u du\right) = S_t - A_t t h + o(h)$$

$$
\begin{aligned}
(A_{t+h})^2 &= (A_t)^2 + 2A_t t\int^{t+h} S_u - A_u u du + \left(t\int^{t+h} S_u - A_u u du \right)^2 \\
E\left((A_{t+h})^2 / A_t\right) &= (A_t)^2 + 2A_t E_t\left(t\int^{t+h} S_u - A_u u du \right) + o(h)
\end{aligned}
$$

soit

$$
\boxed{E\left((A_{t+h})^2 / A_t\right) = (A_t)^2 + 2A_t S_t - A_t t h + o(h)}
$$

$$
\begin{aligned}
& E_t\left(A_{t+h} S_{t+h}\right) \\
= \ & E_t\left(S_{t+h} A_t + S_{t+h} t \int^{t+h} S_u - A_u u du \right) \qquad or,\ E_t(S_{t+h}) = e^{rh} S_t \\
= \ & e^{rh} A_t S_t + E_t\left(t\int^{t+h} \left(S_{t+h} - S_u e^{(t+h-u)r} + S_u e^{(t+h-u)r}\right) S_u - A_u u du \right) \\
= \ & e^{rh} A_t S_t + t\int^{t+h} \left\{ E_t\left[E_u\left(S_{t+h} - S_u e^{(t+h-u)r}\right) S_u - A_u u\right] + e^{(t+h-u)r} E_t\left[S_u S_u - A_u u\right] \right\} du \\
= \ & e^{rh} A_t S_t + t\int^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t\left[S_u S_u - A_u u\right] du
\end{aligned}
$$

En appelant $f_t(s) = E_t\left(A_s S_s\right)$ on a :

$f_t(t+h) = e^{rh} A_t S_t + t\int^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t\left[S_u^2 u\right] du - t\int^{t+h} e^{(t+h-u)r} f_t(u) u du$

Ainsi, la fonction $t \to f_t$ est dérivable et on a :

$f_t{}'(t+h) = r e^{rh} A_t S_t + E_t\left[S_{t+h}^2 t + h\right] - f_t(t+h) t + h$

En appliquant la formule de Taylor au premier ordre on obtient :

$f_t(t+h) = f_t(t) + h f_t{}'(t) + o(h)$

Soit

$$\boxed{E_t\left(A_{t+h}S_{t+h}\right) = E(A_{t+h}S_{t+h}/A_t, S_t) = A_tS_t + S_t\left(rA_t + S_t - A_tt\right)h + o(h)}$$

<u>Calcul des premiers et seconds moments</u>
<u>et du moment croisé du processus disret</u>

Notons $A^{(n+1)h}$ la deuxièmme composante de notre chaîne de Markov à l'instant $t = (n+1)h$.

$A^{(n+1)h}$ prend ses valeurs dans $\left\{A_{k++}^{(n+1)h}, A_{k+-}^{(n+1)h}, A_{k-+}^{(n+1)h}, A_{k--}^{(n+1)h}\right\}$

<u>*Calcul de* $E_n\left(S^{(n+1)h}\right)$:</u>

$$\begin{aligned} E_n\left(S^{(n+1)h}\right) &= E\left(S^{(n+1)h}/S^{nh}\right) = pe^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh} \\ &= S^{nh}\left(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}\right) \end{aligned}$$

En faisant un d.l. à l'ordre 2 en $\sqrt{h}$, on obtient

$$\boxed{E_n\left(S^{(n+1)h}\right) = S^{nh} + \left(rS^{nh}\right)h + o(h)}$$

<u>*Calcul de* $E_n\left(\left(S^{(n+1)h}\right)^2\right)$:</u>

$$\begin{aligned} E_n\left(\left(S^{(n+1)h}\right)^2\right) &= E\left(\left(S^{(n+1)h}\right)^2/S^{nh}\right) = pe^{\sigma\sqrt{h}}\left(S^{nh}\right)^2 + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}\left(S^{nh}\right)^2 \\ &= \left(S^{nh}\right)^2\left(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}\right) \end{aligned}$$

En faisant un d.l. à l'ordre 2 en $\sqrt{h}$, on obtient

$$\boxed{E_n\left(\left(S^{(n+1)h}\right)^2\right) = \left(S^{nh}\right)^2 + 2\left[\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(S^{nh}\right)^2\right]h + o(h)}$$

<u>*Calcul de* $E_n\left(A^{(n+1)h}\right)$:</u>

$$\begin{aligned} & E_n\left(A^{(n+1)h}\right) \\ = \ & E_n\left(E\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right)I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right. \\ & \left.+ E\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right)I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= pE\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
&\quad +(1-p)E\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
&= p\left(\varepsilon_+^{(n+1)h}A_{,k++}^{(n+1)h} + (1-\varepsilon_+^{(n+1)h})A_{k+-}^{(n+1)h}\right) \\
&\quad +(1-p)\left(\varepsilon_-^{(n+1)h}A_{k-+}^{(n+1)h} + (1-\varepsilon_-^{(n+1)h})A_{k--}^{(n+1)h}\right) \\
&= pA_+^{(n+1)h} + (1-p)A_-^{(n+1)h}
\end{aligned}
$$

■ Calcul intermédiaire :

D'après l'équation (9) on a :

$$
\begin{aligned}
A_+^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh} - A_k^{nh}n + 2 \\
&= A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + \left(e^{\sigma\sqrt{h}} - 1\right)hS^{nh} - A_k^{nh}(nh+2h) - 2h^2(S^{nh} - A_k^{nh})nh(nh+
\end{aligned}
$$

soit

$$A_+^{(n+1)h} = A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o_+(h)$$

de même, on montre que :

$$A_-^{(n+1)h} = A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o_-(h)$$

■

Ainsi,

$$\boxed{E_n\left(A^{(n+1)h}\right) = A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o(h)}$$

Calcul de $E_n\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2\right)$:

On a :

$$A_{k++}^{(n+1)h} = A_+^{(n+1)h} + \left(1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}\right)\Delta^+ A$$

$$A_{k+-}^{(n+1)h} = A_{+}^{(n+1)h} - \varepsilon_{+}^{(n+1)h}\Delta^{+}A \qquad \text{où } \Delta^{+}A = \left(A_{k++}^{(n+1)h} - A_{k+-}^{(n+1)h}\right)$$
$$A_{k-+}^{(n+1)h} = A_{-}^{(n+1)h} + \left(1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)\Delta^{+}A$$
$$A_{k--}^{(n+1)h} = A_{-}^{(n+1)h} - \varepsilon_{-}^{(n+1)h}\Delta^{-}A \qquad \text{où } \Delta^{-}A = \left(A_{k-+}^{(n+1)h} - A_{k--}^{(n+1)h}\right)$$

$$\begin{aligned}
& E_n\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2\right) \\
= \; & E_n\left(E\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right. \\
& \left. + E\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right) \\
= \; & pE\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
& +(1-p)E\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
= \; & p\left(\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\left(A_{k++}^{(n+1)h}\right)^2 + (1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h})\left(A_{k+-}^{(n+1)h}\right)^2\right) \\
& +(1-p)\left(\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\left(A_{k-+}^{(n+1)h}\right)^2 + (1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h})\left(A_{k--}^{(n+1)h}\right)^2\right) \\
= \; & p\left\{\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\left[\left(A_{+}^{(n+1)h}\right)^2 + 2\left(1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\right)A_{+}^{(n+1)h}\Delta^{+}A + \left(1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\right)^2\left(\Delta^{+}A\right)^2\right]\right. \\
& \left. + \left(1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\right)\left[\left(A_{+}^{(n+1)h}\right)^2 - 2\varepsilon_{+}^{(n+1)h}A_{+}^{(n+1)h}\Delta^{+}A + \left(\varepsilon_{+}^{(n+1)h}\right)^2\left(\Delta^{+}A\right)^2\right]\right\} \\
& +(1-p)\left\{\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\left[\left(A_{-}^{(n+1)h}\right)^2 + 2\left(1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)A_{-}^{(n+1)h}\Delta^{-}A + (1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h})^2\left(\Delta^{-}A\right)^2\right]\right. \\
& \left. + \left(1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)\left[\left(A_{-}^{(n+1)h}\right)^2 - 2\varepsilon_{-}^{(n+1)h}A_{-}^{(n+1)h}\Delta^{-}A + \left(\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)^2\left(\Delta^{-}A\right)^2\right]\right\} \\
= \; & p\left(A_{+}^{(n+1)h}\right)^2 + (1-p)\left(A_{-}^{(n+1)h}\right)^2 + p\varepsilon_{+}^{(n+1)h}(1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h})\left(\Delta^{+}A\right)^2 \\
& +(1-p)\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\left(1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)\left(\Delta^{-}A\right)^2 \\
= \; & p\left(A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o_{+}(h)\right)^2 + (1-p)\left(A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o_{-}(h)\right)^2 \\
& + \underset{I}{\overset{||}{}} \underbrace{p\varepsilon_{+}^{(n+1)h}(1-\varepsilon_{+}^{(n+1)h})\left(\Delta^{+}A\right)^2 + (1-p)\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\left(1-\varepsilon_{-}^{(n+1)h}\right)\left(\Delta^{-}A\right)^2}
\end{aligned}$$

mais $\varepsilon +$
$-^{(n+1)h}\,(1-\varepsilon +$
$-^{(n+1)h}) \leq 14$

soit $\quad I \ \leq p4\,(\Delta^+ A)^2 + 1 - p4\,(\Delta^- A)^2$

$\Delta^+ A = A^{(n+1)h}_{k++} - A^{(n+1)h}_{k+-}$ et $A^{(n+1)h}_{k+-} \leq A^{(n+1)h}_{+}$ on obtient

$\Delta^+ A \leq A^{(n+1)h}_{+}\left(e^{\rho((n+1)h)} - 1\right) = (nh+h)A^{nh}_k + he^{\sigma\sqrt{h}}S^n_j nh + 2h\left(e^{\rho((n+1)h)} - 1\right)$

Ainsi, il suffit de choisir $\rho(nh)$ telque

$$\boxed{\boxed{\rho(nh) = o(\sqrt{h})}}$$

pour avoir $\Delta^+ A = o(\sqrt{h})$. De même, on montre que $\Delta^- A = o(\sqrt{h})$. Soit finalement

$$\boxed{E_n\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2\right) = \left(A^{nh}_k\right)^2 + 2A^{nh}_k S^{nh} - A^{nh}_k nhh + o(h)}$$

<u>*Calcul de* $E_n\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}\right)$</u> :

$$\begin{aligned}
& E_n\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}\right) \\
= \ & E_n\left(E\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right. \\
& \left. + E\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) I_{\left\{S^{(n+1)h}=e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right\}}\right) \\
= \ & pe^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}E\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
& +(1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}E\left(A^{(n+1)h}/A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\right) \\
= \ & pe^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}A^{(n+1)h}_{+} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}A^{(n+1)h}_{-} \\
= \ & pe^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\left(A^{nh}_k + S^{nh} - A^{nh}_k nhh + o_+(h)\right) + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}\left(A^{nh}_k + S^{nh} - A^{nh}_k nhh + o_-(h)\right. \\
= \ & \left(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}\right)S^{nh}A^{nh}_k + \left(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}\right)S^{nh}S^{nh} - A^{nh}_k nhh + o(h)
\end{aligned}$$

Or, $pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{rh}$
Ainsi,

$$\boxed{E_n\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}\right) = S^{nh}A_k^{nh} + S^{nh}\left(rA_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nh\right)h + o(h)}$$

Choix de $\rho(nh)$ et complexité de l'algorithme de FSG :

Le vecteur A^{nh} est composé de $k^*(n,h)+1$ éléments avec d'après l'équation (7) section 3.2.2

$$A_M^{nh} = A_m^{nh}e^{k^*(n,h)\rho(nh)} \tag{14}$$

Déterminons l'ordre de grandeur de $k^*(n,h)$

Pour $j = -n, ..., n$ le cours $S_j^{nh} = S^0e^{j\sigma\sqrt{h}}$ peut s'écrire sous la forme $S_{j'}^{nh} = S^0e^{j'\sigma\sqrt{h}}e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}$ où

$$j' = 12\left(n + \frac{\ln\left(S^{nh}S^0\right)}{\sigma\sqrt{h}}\right) \tag{15}$$

Les valeurs maximales respectivement minimale de la moyenne correspondant à $S_{j'}^{nh}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
A_M^{nh}(j') &= 1n+1S^0\left(1 + e^{\sigma\sqrt{h}} + ... + e^{j'\sigma\sqrt{h}} + e^{j'\sigma\sqrt{h}}e^{-\sigma\sqrt{h}} + ... + e^{j'\sigma\sqrt{h}}e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}\right)\\
&= 1n+1S^0\left(1 - e^{(j'+1)\sigma\sqrt{h}}1 - e^{\sigma\sqrt{h}} + e^{(j'-1)\sigma\sqrt{h}} - e^{(2j'-n-1)\sigma\sqrt{h}}1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}\right)\\
A_m^{nh}(j') &= 1n+1S^0\left(1 + e^{-\sigma\sqrt{h}} + ... + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}e^{\sigma\sqrt{h}} + ... + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}e^{j'\sigma\sqrt{h}}\right)\\
&= 1n+1S^0\left(1 - e^{-(n+1-j')\sigma\sqrt{h}}1 - e^{-\sigma\sqrt{h}} + e^{-(n-j'-1)\sigma\sqrt{h}} - e^{-(n-2j'-1)\sigma\sqrt{h}}1 - e^{\sigma\sqrt{h}}\right)
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{S^0}A_M^{nh}(j')h &\to 0 \sim 2e^{\frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}}}\sigma\sqrt{h}\\
\frac{n+1}{S^0}A_m^{nh}(j')h &\to 0 \sim 1 + \frac{S^{nh}}{S^0}\sigma\sqrt{h}
\end{aligned}$$

soit

$$A_M^{nh}(j^{'})A_m^{nh}(j^{'})h \ \rightarrow 0{\sim}2e^{\frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}}}1 + \frac{S^{nh}}{S^0}$$

Mais

$$k^*(n,h) = \ln\left(\frac{A_M^{nh}(j^{'})}{A_m^{nh}(j^{'})}\right)\rho(nh)h \ \rightarrow 0{\sim}nh\sigma 2\sqrt{h}\rho(nh)$$

On a fait le choix $\rho(nh) = o(\sqrt{h})$. Choisissons $\rho(nh) = h$
Comme $h = TN$, on a :

$$k^*(n,h)h \ \rightarrow 0{\sim}nh\sigma 2T^{\frac{3}{2}}N^{\frac{3}{2}}.$$

En particulier,

$$k^*(N,h)h \ \rightarrow 0{\sim}\sigma 2\sqrt{T}N^{\frac{3}{2}} \ll 2^N$$

Le nombre total des noeuds de la grille de l'espace d'état augmenté à $t = nh$ est

$$\boxed{(n+1)(k^*(n,h)+1)h \ \rightarrow 0{\sim}\sigma(nh)^2 2T^{\frac{5}{2}}N^{\frac{5}{2}}}$$

Le choix de $\rho(nh) = h$ correspond à une discrétisation dans la direction de la path-dependance plus raffinée que celle proposée par Barraquand et Pudet. En effet, d'après l'équation 8 de la section 3.2.2 on a

$$\ln\frac{A_{k+1}^{nh}}{A_k^{nh}} = \sqrt{h}$$

Alors qu'avec notre choix de discrétisation on a

$$\ln\frac{A_{k+1}^{nh}}{A_k^{nh}} = h = o(\sqrt{h})$$

5.2.2 Récapitulatif des résultats et conclusion

On a obtenu les résultats suivants :

$$E_t(S_{t+h}) = E(S_{t+h}/S_t) = S_t + rS_t h + o(h)$$

$$E_t\left((S_{t+h})^2\right) = (S_t)^2 + 2\,(S_t)^2\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)h + o(h)$$

$$E_t(A_{t+h}) = E(A_{t+h}/A_t) = A_t + S_t - A_t th + o(h)$$
$$E\left((A_{t+h})^2/A_t\right) = (A_t)^2 + 2A_tS_t - A_t th + o(h)$$
$$E_t\left(A_{t+h}S_{t+h}\right) = A_tS_t + S_t\left(rA_t + S_t - A_t t\right)h + o(h)$$
$$E_n\left(S^{(n+1)h}\right) = S^{nh} + \left(rS^{nh}\right)h + o(h)$$
$$E_n\left(\left(S^{(n+1)h}\right)^2\right) = \left(S^{nh}\right)^2 + 2\left[\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(S^{nh}\right)^2\right]h + o(h)$$

$$E_n\left(A^{(n+1)h}\right) = A_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o(h)$$

$$\textit{En choisissant}\ \boxed{\rho(nh) = o(\sqrt{h})}$$
$$E_n\left(\left(A^{(n+1)h}\right)^2\right) = \left(A_k^{nh}\right)^2 + 2A_k^{nh}S^{nh} - A_k^{nh}nhh + o(h)$$

$$E_n\left(A^{(n+1)h}S^{(n+1)h}\right) = S^{nh}A_k^{nh} + S^{nh}\left(rA_k^{nh} + S^{nh} - A_k^{nh}nh\right)h + o(h)$$

$$\boxed{k^*(N,h)h \ \to 0\sim\sigma 2\sqrt{T}N^{\frac{3}{2}} \ll 2^N}$$

On voit bien qu'en choisissant $\rho(nh) = o(\sqrt{h})$, les conditions de consistence locale sont satisfaites. Ce pas est plus raffiné que celui de Barraquand et Pudet.

Le choix particulier de $\rho(Nh) = h$ permet de passer d'une dimension du vecteur A^{Nh} égale à 2^N (si on considére toute les trajectoires possibles du cours de l'actif risqué) à une dimension numériquement satisfaisante qui est de l'ordre de $N\sqrt{N}$.

Etant donnée que les hypothèses du théorème de Kushner et que les conditions de consistence locale sont satisfaites, nous pouvons conclure que le prix approché de l'option sur moyenne donnée par l'algorithme de la FSG converge vers le prix exact de cette option lorsque le pas h tend vers zéro (ou de manière équivalente le nombre d'itération tends vers l'infini).