

# Premia 5



# Rapport de Stage DEA de Probabilités et Finance

Sujet :

## Application du Calcul de Malliavin à la Finance

Présenté par Laurent NGUYEN

devant :

- M.Bernard LAPEYRE
- M. Edmond LEZMI
- Mme Odile HOUNKPATIN

le 29 Septembre 1999

**UNIVERSITE  
DE  
PARIS VI**

**NATEXIS  
BANQUES  
POPULAIRES**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Calcul des Grecques par Monte-Carlo</b>	<b>11</b>
2.1	le Problème des Grecques en Finance . . . . .	11
2.1.1	Options . . . . .	11
2.1.2	Calcul de Prix et Grecques . . . . .	11
2.2	Méthode de Monte-Carlo Classique . . . . .	12
2.3	Méthodes de Quasi-Monte-Carlo . . . . .	14
2.4	Calcul des Dérivées . . . . .	16
2.4.1	Dérivation par Rapport à la Trajectoire . . . . .	16
2.4.2	Méthode du Rapport de Vraisemblance . . . . .	17
2.4.3	Différences Finies . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Calcul de Malliavin</b>	<b>23</b>
3.1	Intégrales de Wiener . . . . .	23
3.2	Dérivée de Malliavin . . . . .	24
3.3	Intégrale de Skohorod . . . . .	26
3.4	Application au Calcul de Grecques . . . . .	28
3.4.1	Résultat Général . . . . .	28
3.4.2	Application en Finance . . . . .	30
3.5	Cas Black-Scholes . . . . .	30
3.5.1	Calcul des Poids Malliavin . . . . .	30
3.5.2	Méthode de Malliavin Localisée . . . . .	31
3.5.3	Etude de la Localisation dans le Cas d'une Digitale . . . . .	32
3.5.4	Etude de la composante régularisée . . . . .	33
3.5.5	Cas d'un Pay-off localisé . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Tests dans le Cas Black-Scholes</b>	<b>35</b>
4.1	Monte-Carlo Classique . . . . .	35
4.1.1	Validation du programme de calcul par Différences Finies . . . . .	35

4.1.2	Comparaison de la Méthode de Malliavin et des Différences Finies	37
4.1.3	Graphiques	38
4.1.4	Choix du Paramètre de Localisation	38
4.2	Quasi-Monte-Carlo	39
4.2.1	Différences Finies	39
4.2.2	Comparaison avec la Méthode de Malliavin	40
4.2.3	Graphiques	40
4.3	Options Path-Dependent	40
<b>5</b>	<b>Modèle de Hull-White</b>	<b>43</b>
5.1	Conditionnement	43
5.2	Calcul des Poids Malliavin	45
5.3	Réduction des Poids	47
5.4	Extension	47
5.5	Corrélation instantannée	50
5.6	Déduction Générale des Poids	52
5.6.1	Poids Malliavin	52
5.6.2	Réduction des Poids	54
<b>6</b>	<b>Tests dans le Cas Hull-White</b>	<b>57</b>
6.1	Expressions des Poids	57
6.2	Localisation	59
6.3	Solutions Approchées	59
6.4	Etude Empirique des Poids	60
6.4.1	Cas d'une Volatilité Faiblement Stochastique	61
6.4.2	Cas d'une Volatilité Fortement Stochastique	62
6.4.3	Conclusion de l'Etude	63
6.5	Tests pour les Grecques	63
6.5.1	Validation dans le Cas d'une Volatilité Faiblement Stochastique	64
6.5.2	Cas intermédiaire	65
6.5.3	Cas d'une Volatilité Fortement Stochastique	67
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>
<b>8</b>	<b>Annexe 1 : Poids dans le Cas Black-Scholes</b>	<b>71</b>
<b>9</b>	<b>Annexe 2 : Simulations (Cas Black-Scholes)</b>	<b>77</b>
<b>10</b>	<b>Annexe 3 : Erreur par Différences Finies</b>	<b>81</b>

?? *pages* 5

**11 Annexe 4 : Etude de la Localisation 85**

**12 Annexe 5 : Poids dans le Cas Hull-White 91**





# Remerciements

Je remercie M. Bernard Lapeyre d'avoir accepté d'être mon encadrant au D.E.A. Probabilités et Finance de l'Université Paris 6.

Je remercie M. Edmond Lezmi de m'avoir accueilli avec chaleur dans son service à la Caisse Centrale des Banques Populaires.

M<sup>me</sup> Odile Hounkpatin et M. Jean-Claude Hontand m'ont encadré durant mon stage.

Je les remercie pour leur gentillesse et leur entière disponibilité.

M. El Mostafa Ezzine a adapté en C un programme écrit en C++ pour les suites de Sobol en dimension 40.

Je le remercie de m'avoir permis de l'utiliser.

Je remercie enfin M. Mourad Berrahoui pour de nombreux échanges intéressants.



# Chapitre 1

## Introduction

L'évaluation du prix des options est un problème majeur en finance. Elle suppose que l'on dispose d'un modèle mathématique qui reflète la dynamique du marché et que l'on saura calibrer. Ce qui entre véritablement en jeu est la possibilité de s'immuniser contre les risques présentés par la variation des différents paramètres du modèle. On est alors conduit à calculer les dérivées du prix par rapport à ces paramètres (calcul des "Grecques"). Leur détermination est en effet cruciale pour se constituer un portefeuille de couverture.

Dans le cadre le plus général, le calcul de prix se fait par les méthodes de Monte-Carlo. Il faut alors disposer de méthodes adaptées au calcul des dérivées, c'est à dire d'estimateurs de variance et de biais faibles. Dans le cas où le "pay-off" de l'option manque de régularité, la méthode des différences finies est parfois impraticable. On peut recourir à une dérivation de la densité de probabilité. Cette méthode suppose cependant la connaissance d'une telle densité. Dans le cas où ce n'est pas non plus envisageable, on peut faire appel au calcul de Malliavin.

Le calcul de Malliavin autorise la dérivation de variables aléatoires (dérivée de Malliavin). Il permet, grâce à une formule de dualité de passer du problème de dérivation du pay-off sous l'espérance à un problème d'intégration sous l'espérance (intégrale de Skohorod) : l'intégrale de Skohorod à déterminer joue devant le pay-off le rôle d'un poids multiplicatif. L'avantage que l'on en retire est de s'affranchir entièrement des problèmes de régularité du pay-off sans avoir à calculer une densité de probabilité.

Les estimateurs théoriques produits par les techniques de Malliavin sont non biaisés. Ils ne pourront naturellement être applicables au calcul de Monte-Carlo que si leur variance est réduite.

Dans un premier temps, on validera l'étude dans le cadre Black-Scholes standard . L'estimateur optimal peut se voir comme un compromis entre la

méthode du poids de Malliavin et celle de la dérivation du pay-off : c'est l'étude de la localisation.

Dans un deuxième temps, on passera à l'étude d'un modèle à volatilité stochastique. En plus de la localisation, se pose alors le problème de la réduction des poids Malliavin.

# Chapitre 2

## Calcul des Grecques par Monte-Carlo

### 2.1 le Problème des Grecques en Finance

#### 2.1.1 Options

On considère un processus vectoriel de sous-jacents  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$  et une option payant le flux terminal :

$$\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T.$$

Le cas le plus simple est celui où l'option ne dépend que de l'instant terminal ( $n = 1$ ) et le vecteur est monodimensionnel (un seul sous-jacent).

On s'intéressera en particulier au cas d'un **Call** de strike  $K$  dont le pay-off est donné par :

$$\Phi(X_T) = \max(X_T - K, 0)$$

Une option **Digitale** avec une barrière  $H$  a le pay-off suivant

$$\Phi(X_T) = 1_{\{X_T \geq H\}}$$

#### 2.1.2 Calcul de Prix et Grecques

On se place dans le cas où le taux d'actualisation est constant, égal à  $r$ .

On suppose aussi que l'on sait modéliser la dynamique du sous-jacent par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = rdt + \sigma(X_t) dW_t$$

$$X_0 = x$$

sous la probabilité risque-neutre.

Le prix de cette option, à une date  $t < T_1$ , est égal à :

$$u(x, t) = e^{-r(T-t)} E(\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n}) | X_t = x)$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité risque-neutre.

On peut se limiter à évaluer le prix à la date 0, et l'on posera :

$$u(x) = e^{-rT} E(\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n}) | X_0 = x)$$

Il est nécessaire de couvrir les risques qu'impliquent le flux terminal aléatoire. On doit alors calculer la sensibilité du prix  $u(x)$  par rapport aux différents paramètres : c'est le calcul des Grecques.

On se limitera ici au calcul des dérivées premières et secondes par rapport à la condition initiale  $x$  (calculs respectifs du **delta** et du **gamma**) ainsi qu'aux dérivées premières par rapport au coefficient de la diffusion  $\sigma$  (calcul du **vega**).

Il s'agit de trouver une méthode de calcul de dérivées adaptée à des pay-off manquant de régularité, comme le cas extrême de la digitale.

Les techniques de base sont celles du calcul des espérances par la méthode de Monte-Carlo ou de quasi-Monte-Carlo. Commençons donc par une présentation de ces méthodes.

## 2.2 Méthode de Monte-Carlo Classique

On rappelle brièvement le principe de calcul d'espérance suivant la méthode de Monte-Carlo.

Soit donc à calculer l'espérance

$$E(X)$$

où  $X$  est une variable aléatoire intégrable. (Avec ce qui précède, on peut prendre :  $X = \Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n})$ ).

Considérons alors une suite  $(X_i, i \in \mathbb{N}^*)$  de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de  $X$  et définies sur le même espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, Q)$ .

Définissons l'estimateur de  $E(X)$  par la méthode de Monte-Carlo comme

$$\text{la moyenne empirique : } \bar{X}_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

D'une part, il est immédiat de constater que  $\left(\bar{X}_N, N \in \mathbb{N}^*\right)$  est une suite d'estimateurs sans biais de  $E(X)$  :

$$E\left(\bar{X}_N\right) = E(X)$$

D'autre part, la loi des grands nombres permet d'énoncer :

$$\bar{X}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{ps} E(X)$$

$\left(\bar{X}_N, N \in \mathbb{N}^*\right)$  est donc une suite fortement convergente d'estimateurs de  $E(X)$ .

Dans le cas où  $X$  est de carré intégrable, l'estimation de l'erreur associée à cette suite d'estimateurs repose sur le théorème central limite

$$\frac{\sqrt{N}\left(\bar{X}_N - E(X)\right)}{\sqrt{\text{var}(X)}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} G$$

où  $G$  est une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite, notée  $N(0, 1)$  (il s'agit d'une convergence en loi).

On en déduit, par application de la convergence en loi, la loi normale ne chargeant pas la frontière d'un intervalle :

$$P\left(\left|\bar{X}_N - E(X)\right| > \varepsilon \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{\sqrt{N}}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} N(0, 1)(]-\varepsilon, \varepsilon[)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ .

En particulier :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_N - E(X)\right| > 1.96 \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{\sqrt{N}}\right) \simeq 0.95$$

On retient que l'erreur de la méthode de Monte-Carlo est majorée par

$$1,96 \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{\sqrt{N}}$$

avec asymptotiquement la probabilité de 0.95.

Cette erreur n'est pas immédiatement accessible car  $\text{var}(X)$  est à priori inconnu.

On a recours alors à l'estimateur empirique non biaisé

$$\bar{V}_N = \frac{\sum_{i=1}^N \left( X_i - \bar{X}_N \right)^2}{N-1}$$

qui fournit un estimateur de la borne asymptotique de l'erreur :

$$e_N = 1,96 \frac{\sqrt{\bar{V}_N}}{\sqrt{N}}$$

Cette erreur en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  peut ne pas se réaliser (asymptotiquement) en dehors de l'ensemble à 95%. On a au pire une borne en  $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln \ln(N)}{N}}\right)$  fournie par la loi du logarithme itéré :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{N}{2 \ln \ln(N)}} \left| \bar{X}_N - E(X) \right| = \sqrt{\text{var}(X)} \quad \text{P-ps}$$

L'existence de l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et de la suite  $(X_i, i \in \mathbb{N}^*)$  se justifie du théorème de Kolmogorov.

La simulation de variables aléatoires réelles indépendantes est un problème d'une autre nature car elle repose sur des algorithmes déterministes et ne peut donc être qu'imparfaitement réalisée. Les suites produites par de tels algorithmes sont dites pseudo-aléatoires : l'erreur calculée précédemment est valable.

L'idée générale est de simuler d'abord des variables indépendantes  $U_i$  de loi uniforme, puis de récupérer les variables  $X_i$  en inversant la fonction de répartition de  $X$  :

$$X_i = G_X(U_i)$$

avec

$$G_X(u) = \inf \{x, F_X(x) \geq u\}$$

## 2.3 Méthodes de Quasi-Monte-Carlo

Pour accélérer la convergence de la suite d'estimateurs empiriques, il est possible d'utiliser des techniques de réduction de variance que l'on ne détaille pas (variables de contrôle, variables antithétiques, stratification).



Une autre possibilité est de renoncer au caractère pseudo-aléatoire des suites utilisées.

On remarque que l'on peut écrire :

$$X = \varphi(U)$$

où  $U$  est uniforme sur le pavé  $[0, 1]^s$ ,  $s$  étant un entier. (avec  $\varphi = G_X$ ).

On a donc :

$$E(X) = \int_{[0,1]^s} \varphi(x) dx$$

Il s'agit alors d'approcher l'intégrale du membre de droite.

On considère donc une suite déterministe  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N}^*)$  à valeurs dans le pavé  $[0, 1]^s$ .

On définit d'abord l'équirépartition de cette suite :

**Definition 1**  $\xi$  est dite équirépartie si

$$\forall x \in [0, 1]^s \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{[0,1]^s}(\xi_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^s x^i$$

On mesure l'équirépartition de cette suite en introduisant sa discrédance à l'origine :

**Definition 2** Pour tout Borélien  $\mathcal{D}$ , on pose

$$\mathcal{E}(N, \mathcal{D}, \xi) = \text{card}(1 \leq i \leq N, \xi_i \in \mathcal{D}) - N * \text{volume}(\mathcal{D})$$

La **discrédance à l'origine** de la suite  $\xi$  est alors donnée par :

$$D_N^*(\xi) = \sup_{x \in [0,1]^s} \frac{1}{N} |\mathcal{E}(N, [0, x], \xi)|$$

L'intérêt de cette définition tient dans l'énoncé de la formule de Koksma-Hlawka :

**Proposition 1** Si  $\varphi$  est à variation finie au sens de Hardy et Krause, on a :

$$\forall N \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\xi_i) - \int_{[0,1]^s} \varphi(x) dx \right| \leq V(\varphi) D_N^*(\xi)$$

où  $V(\varphi)$  est la variation de  $\varphi$ .

On utilisera donc des suites à discrédance faible. On peut citer les suites de sobol qui sont les plus performantes.

## 2.4 Calcul des Dérivées

Ces rappels étant faits, on revient au problème d'estimation des Grecques. On se donne le cadre mathématique suivant.

Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $(X_\theta, \theta \in \Theta)$  une famille de variables aléatoires à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pour simplifier la présentation, on suppose que  $p = 1$ .

On considère

$$u_\theta = E(\Phi(X_\theta))$$

où  $\Phi$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , mesurable, positive ou bornée.

Pour évaluer cette espérance par la méthode de Monte-Carlo, on se donne pour chaque  $\theta$ , une suite

$$(X_{i,\theta}, i \in \mathbb{N}^*)$$

de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de  $X_\theta$  et définies sur le même espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, Q)$ .

Selon le principe rappelé plus haut, on en déduit la famille d'estimateurs empiriques :

$$\hat{u}_{N,\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N \Phi(X_{i,\theta})}{N}$$

Posons-nous maintenant le problème d'estimer la dérivée  $\frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta}$ .

### 2.4.1 Dérivation par Rapport à la Trajectoire

On se place dans le cas où la loi de  $X_\theta$  est dominée par une même mesure  $\mu$  positive et  $\sigma$ -finie.

On suppose de plus que :

1.  $X_\theta$  est dérivable par rapport à  $\theta$  P-presque-sûrement sur  $\Theta$ .
2.  $\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta}$  est uniformément bornée sur  $\Theta$  par une fonction intégrable P-presque-sûrement.
3.  $\Phi$  est différentiable  $\mu$ -presque partout.
4.  $\Phi$  est Lipschitzienne.

Alors, on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'espérance pour conclure que  $u_\theta$  est dérivable sur  $\Theta$  avec :

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = E\left(\frac{\partial \Phi(X_\theta)}{\partial \theta}\right)$$

On en déduit l'estimateur empirique de la dérivée  $\hat{u}'_{N,\theta}$  comme étant la dérivée de l'estimateur empirique  $\hat{u}_{N,\theta}$  :

$$\hat{u}'_{N,\theta} = \frac{d \hat{u}_{N,\theta}}{d\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi(X_{i,\theta})}{\partial \theta}$$

## 2.4.2 Méthode du Rapport de Vraisemblance

Cette méthode est valable si on relâche les hypothèses de régularité du pay-off.

On introduit la densité de Radon-Nikodym

$$f_\theta = \frac{dP_{X_\theta}}{d\mu}$$

On a donc

$$E(X_\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) f_\theta(x) d\mu(x)$$

On suppose que :

1.  $f_\theta$  est dérivable par rapport à  $\theta$   $\mu$ -presque-sûrement sur  $\Theta$
2.  $\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}$  est uniformément bornée sur  $\Theta$ ,  $\mu$ -presque-sûrement, par une fonction  $\Psi$  telle que  $\Phi\Psi$  est une fonction intégrable.

Alors, on peut encore appliquer le théorème de dérivation sous l'espérance pour conclure que  $u_\theta$  est dérivable sur  $\Theta$  avec :

$$\begin{aligned} \frac{du_\theta}{d\theta} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(x) d\mu(x) \\ &= E\left(\Phi(X_\theta) \frac{\partial \ln(f_\theta)}{\partial \theta}(X_\theta)\right) \end{aligned}$$

On en déduit l'estimateur empirique

$$\hat{u}'_{N,\theta}^{RV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(X_{i,\theta}) \frac{\partial \ln(f_\theta)}{\partial \theta}(X_{i,\theta})$$

Cette méthode a l'avantage d'être indépendante du pay-off (tant que la condition 2. est remplie).

Cette universalité s'obtient cependant en général au prix d'une augmentation de la variance de l'estimateur dès que le pay-off est suffisamment régulier.

### 2.4.3 Différences Finies

Dans le cas d'un manque de régularité du pay-off, on est obligé de déterminer la densité de  $X_\theta$  si l'on désire appliquer la méthode exacte précédente.

Il est souvent plus simple de se contenter de l'approximation qu'offre la méthode des différences finies.

Sous l'hypothèse que  $u_\theta$  est une fonction dérivable on veut calculer

$$\frac{u_{\theta+h} - u_{\theta-h}}{2h}$$

comme approximation satisfaisante  $\frac{du_\theta}{d\theta}$  de pour  $h$  assez petit.

On en déduit la suite d'estimateurs :

$$\hat{u}'_{h,N,\theta}^{DF} = \frac{\hat{u}_{N,\theta+h} - \hat{u}_{N,\theta-h}}{2h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h})}{2h}$$

Il s'agit donc d'un estimateur obtenu comme une moyenne empirique mais présentant un biais.

### Réduction de Variance pour la Méthode des Différences Finies

On impose en supplément l'indépendance des couples  $(X_{i,\theta+h}, X_{i,\theta-h})$  dans leur ensemble.

Les lois marginales sont imposées également et l'on doit se donner la loi du couple permettant de diminuer la variance de l'estimateur.

On peut d'abord énoncer sous la condition suivante :

**Hypothèses :** on suppose que l'on peut appliquer les passages à la limite suivants :

1.  $\lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(X_{\theta+h})) = E(\Phi(X_\theta))$
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(X_{i,\theta+h}) \Phi(X_{i,\theta-h})) = E(\Phi^2(X_\theta))$

Ces hypothèses sont vérifiées si, pour tout  $i$ , la famille  $(X_{i,\theta+h}, X_{i,\theta-h})_{h \geq 0}$  est continue en  $h$  presque sûrement et si  $\Phi$  est bornée.

**Proposition 2** 1. On minimise la variance de l'estimateur  $\hat{u}'_{h,N,\theta}^{DF}$  en maximisant la corrélation  $E(\Phi(X_{i,\theta+h}) \Phi(X_{i,\theta-h}))$

2. En particulier, l'indépendance des variables  $X_{i,\theta+h}$  et  $X_{i,\theta-h}$  pour tout  $i$  conduit à maximiser la variance de l'estimateur  $\hat{u}'_{h,N,\theta}^{DF}$  dès que  $h$  est assez petit.

**Proof.**

1. On a

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \hat{C}_{h,N,\theta}^{DF} \right) &= \frac{1}{4N^2h^2} \sum_{i=1}^N \text{var} (\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h})) \\ &= \frac{1}{4N^2h^2} \sum_{i=1}^N (E(\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h}))^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{var} (\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h})) &= E \{ (\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h}))^2 \} \\ &\quad - E^2 (\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h})) \\ &= E(\Phi^2(X_{\theta+h})) + E(\Phi^2(X_{\theta-h})) \\ &\quad - 2E(\Phi(X_{i,\theta+h})\Phi(X_{i,\theta-h})) \\ &\quad - E^2(\Phi(X_{i,\theta+h}) - \Phi(X_{i,\theta-h})) \end{aligned}$$

2. Posons

$$V_{\theta,h} = E(\Phi(X_{i,\theta+h})\Phi(X_{i,\theta-h})) - E(\Phi(X_{i,\theta+h}))E(\Phi(X_{i,\theta-h}))$$

Alors

$$V_{\theta,0} = \text{var}(\Phi(X_\theta)) > 0$$

dés que  $\Phi(X_\theta)$  n'est pas dégénérée.

On en déduit par continuité, que pour  $h$  assez petit :

$$E(\Phi(X_{i,\theta+h})\Phi(X_{i,\theta-h})) > E(\Phi(X_{i,\theta+h}))E(\Phi(X_{i,\theta-h}))$$

ce qui permet d'en déduire le résultat. ■

La façon la plus simple de réduire la variance est de partir de l'égalité

$$\frac{u_{\theta+h} - u_{\theta-h}}{2h} = E \left( \frac{\Phi(X_{\theta+h}) - \Phi(X_{\theta-h})}{2h} \right)$$

et d'adopter  $\hat{u}_{h,N,\theta}^{DF}$  comme estimateur Monte-Carlo du second membre : cela revient à réaliser les couples de variables  $(X_{i,\theta+h}, X_{i,\theta-h})$  de manière indépendante et identiquement distribuée suivant la loi du couple  $(X_{\theta+h}, X_{\theta-h})$ .

Justifions que cet estimateur est optimal dans un certain sens :

Sous les hypothèses précédentes, en notant que le 2. devient :

$$2'. \lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(X_{\theta+h})\Phi(X_{\theta-h})) = E(\Phi^2(X_\theta))$$

on complète la proposition précédente par :

**Proposition 3** Pour  $h$  petit, la variance de l'estimateur Monte-carlo  $\hat{u}_{h,N,\theta}^{DF}$  est "proche" de l'optimum (parmi la classe d'estimateurs définie plus haut).

**Proof.** On considère le couple  $(X_{i,\theta+h}, X_{i,\theta-h})$  de loi celle du couple  $(X_{\theta+h}, X_{\theta-h})$  et un autre couple  $(Y_{i,\theta+h}, Y_{i,\theta-h})$  dont les lois marginales sont celles de  $(X_{\theta+h}, X_{\theta-h})$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} E(\Phi(Y_{i,\theta+h}) \Phi(Y_{i,\theta-h})) &\leq \sqrt{E(\Phi^2(Y_{i,\theta+h})) E(\Phi^2(Y_{i,\theta-h}))} \\ &\leq \sqrt{E(\Phi^2(X_{i,\theta+h})) E(\Phi^2(X_{i,\theta-h}))} \end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{E(\Phi^2(X_{i,\theta+h})) E(\Phi^2(X_{i,\theta-h}))} &= E(\Phi^2(X_{i,\theta})) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(X_{i,\theta+h}) \Phi(X_{i,\theta-h})) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(Y_{i,\theta+h}) \Phi(Y_{i,\theta-h})) \leq \lim_{h \rightarrow 0} E(\Phi(X_{i,\theta+h}) \Phi(X_{i,\theta-h}))$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat 1/ pour conclure. ■

## Différences Finies Secondes

On approche la dérivée seconde  $u''_{\theta}$  par la différence finie :

$$\frac{u_{\theta+h} - 2u_{\theta} + u_{\theta-h}}{h^2} = E\left(\frac{\Phi(X_{\theta+h}) - 2\Phi(X_{\theta}) + \Phi(X_{\theta-h}))}{h^2}\right)$$

ce qui fournit l'estimateur empirique :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{h,N,\theta}^{DF} &= \frac{\hat{u}_{N,\theta+h} - 2\hat{u}_{N,\theta} + \hat{u}_{N,\theta-h}}{h^2} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Phi(X_{i,\theta+h}) - 2\Phi(X_{i,\theta}) + \Phi(X_{i,\theta-h}))}{h^2} \end{aligned}$$

où les triplets  $(X_{i,\theta+h}, X_{i,\theta}, X_{i,\theta-h})$  sont indépendants et identiquement distribués suivant la loi du triplet  $(X_{\theta+h}, X_{\theta}, X_{\theta-h})$ .

### Pay-off non Réguliers et Problèmes de Variance

Si le pay-off n'est pas dérivable presque sûrement ou s'il l'est mais que la dérivée n'est pas bornée par une fonction intégrable, les conditions du théorème de la convergence dominée ne sont pas satisfaites. Pour les différences finies, ce manque de régularité se traduit par une augmentation importante de la variance.

A titre d'exemple, on se place dans le cadre de Black-Scholes en prenant :

$$X_x = xe^{\sigma\sqrt{T}G + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}T\right)}$$

où  $G$  est une variable normale centrée réduite.

Un calcul mené en annexe montre que pour une digitale, on a :

$$\text{var} \left( \overset{\wedge}{u'}_{h,N,\theta}^{DF} \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2e^{-2rT}}{x\sigma\sqrt{T}Nh}$$

et

$$\text{var} \left( \overset{\wedge}{u''}_{h,N,\theta}^{DF} \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{-2rT}}{2x\sigma\sqrt{T}Nh^3}$$





# Chapitre 3

## Calcul de Malliavin

Le calcul de Malliavin désigne le calcul variationnel sur les espaces de Wiener. Les outils de base sont la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod.

### 3.1 Intégrales de Wiener

On se donne un espace de Hilbert  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  et un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Une isométrie

$$W : H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$$

telle que  $W(h)$  est une variable aléatoire normale et centrée définit le **processus Gaussien**

$$(W(h), h \in H)$$

L'existence d'une telle isométrie relève du théorème de Kolmogorov.

Ce processus engendre un sous-espace dont l'adhérence dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$  est appelé espace Gaussien.

On se place désormais dans le cas où

$$H = L^2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), dt; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$$

On définit alors le processus

$$W_t = W(1_{[0,t]}) \quad P - ps$$

En choisissant une version continue de ce processus (comme représentant de classe), on définit ainsi "le" mouvement Brownien d-dimensionnel.

L'existence d'une telle version est une conséquence du théorème de Kolmogorov-  
Centsov.

On note

$$\mathcal{B} = \sigma(W_t, 0 \leq t \leq T)$$

la tribu engendrée par  $(W_t, 0 \leq t \leq T)$ .

Le cadre de l'étude est

$$L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$$

dont les variables de base sont les intégrales de Wiener

$$W(h) = \sum_{i=1}^d W^i(h_i) = \sum_{i=1}^d \int_0^T h_i(t) dW_t^i$$

Il s'agit alors d'examiner des fonctionnelles de telles variables.

## 3.2 Dérivée de Malliavin

**Definition 3** On appelle polynôme de Wiener une variable aléatoire du type  
 $f(W(h^1), \dots, W(h^n))$

où

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction polynômiale, et avec

$$h^j \in L^2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), dt; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d), \quad 1 \leq j \leq n$$

On note  $\mathbb{P}$  l'ensemble des polynômes de Wiener

On peut alors prouver :

**Proposition 4**  $\mathbb{P}$  est dense dans  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ .

**Definition 4** Si  $f(W(h^1), \dots, W(h^n))$  est un polynôme de Wiener, on définit sa **dérivée de Malliavin** comme le processus stochastique  $d$ -dimensionnel

$$Df(W(h^1), \dots, W(h^n)) = (D_t f(W(h^1), \dots, W(h^n)), t \in [0, T])$$

en posant :

$$D_t f(W(h^1), \dots, W(h^n)) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(W(h^1), \dots, W(h^n)) h_i^j(t) \right)_{1 \leq i \leq d}$$

Alors

$$Df(W(h^1), \dots, W(h^n)) \in L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}, dt \otimes P; \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

L'opérateur  $D$  s'appelle également opérateur **gradient**.

La définition de  $Df(W(h^1), \dots, W(h^n))$  a bien un sens de la proposition suivante :

**Proposition 5** *Soit*

$$F = f(W(h^1), \dots, W(h^n))$$

un polynôme de Wiener.

Soit  $\gamma$  définie sur  $[0, T]$  par :

$$\gamma(t) = \int_0^t g(s) ds$$

avec  $g$  dans  $L^2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), dt; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$ .

Posons pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  :

$$F_{\varepsilon\gamma} = f(W(h^1) + \varepsilon \langle g|h^1 \rangle_H, \dots, W(h^n) + \varepsilon \langle g|h^n \rangle_H)$$

Alors :

1.  $F_{\varepsilon\gamma}$  ne dépend pas du choix de  $f$  (pour  $F$  fixé).
2. On a :

$$\frac{F_{\varepsilon\gamma} - F}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2(\Omega)} \int_0^T \langle D_t F | g(t) \rangle_{\mathbb{R}^d} dt$$

en notant  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$  le produit scalaire habituel de  $\mathbb{R}^d$ .

**Proof.** (de 1.) C'est une conséquence du théorème de Girsanov : il existe une probabilité  $Q$  sur  $\Omega$ , équivalente à  $P$  telle que  $(W_t + \varepsilon\gamma(t), t \in [0, T])$  est un mouvement Brownien (la condition de Novikov est vérifiée automatiquement car  $\gamma$  est déterministe).

Si l'on considère une seconde écriture de  $F$

$$F = f'(W(h'^1), \dots, W(h'^p))$$

et si l'on pose :

$$F'_{\varepsilon\gamma} = f'(W(h'^1) + \varepsilon \langle g|h'^1 \rangle_H, \dots, W(h'^p) + \varepsilon \langle g|h'^p \rangle_H)$$

alors la loi de  $F'_{\varepsilon\gamma} - F_{\varepsilon\gamma}$  sous  $Q$  est celle de  $F' - F = 0$  sous  $P$ , d'où

$$F'_{\varepsilon\gamma} = F_{\varepsilon\gamma} \quad Q - ps \text{ donc } P - ps$$

■

**Proposition 6** *L'opérateur non borné  $D$  de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$  dans*

*$L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}, dt \otimes P; \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  est un opérateur fermé.  
On peut alors le prolonger, ce qui donne la définition suivante :*

**Definition 5** *On note  $\mathbb{D}^{1,2}$  le domaine de l'opérateur  $D$ .  
On munit  $\mathbb{D}^{1,2}$  de la norme*

$$\|F\|_{1,2} = \left[ E(|F|^2) + \int_0^T E(\|D_t F\|_{\mathbb{R}^d}^2) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

On a de manière immédiate :

**Proposition 7** 1.  $\mathbb{D}^{1,2}$  est un sous-espace dense de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$  (car  $\mathbb{P}$  l'est)..  
2.  $\mathbb{D}^{1,2}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,2}$  est un espace de Hilbert.

On cite la "chain rule", utile pour les calculs :

**Proposition 8** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable à dérivées bornées. Soit  $(F^1, \dots, F^m)$  un vecteur aléatoire tel que

$$\forall i \quad F^i \in \mathbb{D}^{1,2}$$

Alors

$$\varphi(F^1, \dots, F^m) \in \mathbb{D}^{1,2}$$

et

$$D\varphi(F^1, \dots, F^m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(F^1, \dots, F^m) DF^i$$

### 3.3 Intégrale de Skohorod

L'opérateur non borné  $D$  étant à domaine dense, il admet un adjoint suivant la définition :

**Definition 6** On appelle *intégrale de Skohorod*, notée  $\delta$ , l'opérateur adjoint de  $D$ .  $\delta$  est un opérateur non borné de  $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}, dt \otimes P; \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  vers  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , de domaine noté  $\text{Dom}(\delta)$  tel que pour tout processus  $u$  de  $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}, dt \otimes P; \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  on ait :

1.  $u$  appartient à  $\text{Dom}(\delta)$  si et seulement si il existe une constante  $c$  telle que

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \quad \left| E \left( \int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \right) \right| \leq c E(F^2)^{\frac{1}{2}}$$

2.  $\delta(u)$  est définie par la relation de dualité :

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \quad E(F \delta(u)) = E \left( \int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \right)$$

A cause de cette relation de dualité,  $\delta$  est également appelé opérateur divergence.

L'intégrale de Skohorod est une généralisation de l'intégrale d'Itô.

On définit en effet la filtration

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$$

où

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$$

est la tribu engendrée par les variables  $W_s, 0 \leq s \leq t$ .

On a alors la proposition :

**Proposition 9** Soit  $u$  un processus  $\mathcal{F}$ -adapté de

$$L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}, dt \otimes P; \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

Alors  $u$  appartient à  $\text{Dom}(\delta)$  et l'intégrale de Skohorod de  $u$  coïncide avec son intégrale d'Itô dans le sens :

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \int_0^T u_t^i dW_t^i$$

Pour le calcul, la proposition suivante est utile :

**Proposition 10** Soit  $u$  dans  $\text{Dom}(\delta)$ , et  $F$  dans  $\mathbb{D}^{1,2}$  tels que

$$E \left( F^2 \int_0^T \|u_t\|_{\mathbb{R}^d}^2 dt \right) < \infty$$

Alors

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T \langle D_t F | u \rangle_{\mathbb{R}^d} dt$$

au sens où  $Fu$  appartient à  $\text{Dom}(\delta)$  si et seulement si le second membre de l'égalité précédente appartient à  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ .

Pour un exposé plus complet du calcul de Malliavin dans le cas brownien et au delà, il serait nécessaire d'introduire les développements en chaos.

## 3.4 Application au Calcul de Grecques

### 3.4.1 Résultat Général

On considère un processus  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$  obéissant à la dynamique

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$$

$$X_0 = x$$

avec

$$b : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\sigma : \mathbb{R}^p \rightarrow \text{Mat}(p, d; \mathbb{R})$$

$$x \in \mathbb{R}^p$$

On suppose de plus qu'il n'y a pas d'information redondante dans le sens où :

$$p = d$$

et

$$\sigma : \mathbb{R}^p \rightarrow \text{Gl}(p; \mathbb{R})$$

En considérant une fonctionnelle du type :

$$\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

on pose :

$$v(x) = E(\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n}) | X_0 = x)$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité risque-neutre.

Il s'agit de calculer les dérivées de  $v$  par rapport aux conditions initiales et par rapport aux paramètres de diffusion : on se restreint ici aux dérivées premières (gradient) et secondes (hessien) de  $v$  par rapport à la valeur initiale  $x$  du sous-jacent ainsi que les dérivées par rapport aux coefficients de la volatilité.

On ne va énoncer ici que le résultat général concernant le gradient.

Ce résultat s'obtient par le calcul de Malliavin grâce à la proposition fondamentale suivante :

**Proposition 11** *Supposons que  $b$  et  $\sigma$  sont continûment différentiables à dérivées bornées.*

On considère le processus de variation première  $(Y_t, 0 \leq t \leq T)$  défini par l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = b'(X_t) Y_t dt + \sum_{i=1}^p \sigma'_i(X_t) Y_t dW_t^i$$

$$Y_0 = I_p$$

où  $I_d$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^p$  et  $\sigma_i$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $\sigma$ .

Alors

$$\forall t \in [0, T] \quad X_t \in \mathbb{D}^{1,2}$$

et

$$\forall s, t \in [0, T] \quad D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s) 1_{\{s \leq t\}}$$

On peut alors en déduire le résultat général :

**Proposition 12**  $(\nabla v)^T = E \left[ \Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_p}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^T dW_t \right]$   
avec

$$a \in L^2([0, T])$$

et

$$\forall i \quad \int_0^{T_i} a(t) dt = 1$$

### 3.4.2 Application en Finance

Sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent suit la dynamique précédente avec

$$b \equiv r$$

où  $r$  est le taux d'actualisation supposé constant.

On peut remarquer que les hypothèses

$$p = d$$

et

$$\sigma : \mathbb{R}^p \rightarrow Gl(p; \mathbb{R})$$

sont nécessaires pour appliquer le théorème de Girsanov à la probabilité historique et définir ainsi la probabilité risque-neutre.

**Proposition 13** *Le prix de l'option à la date 0 s'écrit*

$$u(x) = e^{-rT} v(x)$$

On peut alors appliquer le résultat précédent sous l'hypothèse que  $\sigma$  est continûment différentiable à dérivées bornées.

## 3.5 Cas Black-Scholes

### 3.5.1 Calcul des Poids Malliavin

On suppose que, sous la probabilité ajustée au risque, le sous-jacent  $S_t$  suit la dynamique suivante :

$$dS_t = rdt + \sigma dW_t$$

$$S_0 = x$$

avec

$$\sigma \in Gl(p; \mathbb{R})$$

$$x \in \mathbb{R}^p$$

Prenons pour simplifier

$$d = 1$$

Dans ce cadre, on définit

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x}$$



$$\gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

On peut alors appliquer les résultats précédents et définir des poids  $\pi(\delta)$ ,  $\pi(\gamma)$ ,  $\pi(\vartheta)$  tels que :

$$\delta = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\delta))$$

$$\gamma = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\gamma))$$

$$\vartheta = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\vartheta))$$

On a en effet le résultat suivant (les grandes lignes de la démonstration se trouvent en annexe) :

**Proposition 14** 1. Les poids Malliavin peuvent être définis par :

$$\pi(\delta) = \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \frac{1}{x^2 \sigma^2 T_1}$$

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{i=1}^p \frac{(W_{T_i} - W_{T_{i-1}})^2}{T_i - T_{i-1}} - \sigma W_{T_n} - n \right]$$

2. Les expressions précédentes sont celles des poids minimaux pour la classe de Pay-off considérée.

### 3.5.2 Méthode de Malliavin Localisée

Le résultat précédent a permis de définir les poids présentant la variance minimale pour la classe de Pay-off considérée.

On améliore encore la méthode de base (Malliavin global) par la technique de localisation.

Il s'agit de décomposer le pay-off

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) = \Phi_{loc}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) + \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

Si la composante  $\Phi_{reg}$  est assez régulière, on peut effectuer la dérivation sous l'espérance.

La composante  $\Phi_{loc}$  contient donc toute l'irrégularité de  $\Phi$  : on lui applique la méthode de Malliavin.

Si les points de singularité de  $\Phi$  sont localisés, on peut choisir  $\Phi_{loc}$  à support compact, ce qui annule l'effet des poids en dehors de ce compact : on obtient une réduction de variance.

Le calcul des Grecques suivant les expressions suivantes :

$$\delta = \frac{e^{-rT}}{x} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} \right) + e^{-rT} E(\Phi_{loc}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\delta))$$

$$\gamma = \frac{e^{-rT}}{x^2} E \left( \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} S_{T_j} \right) + e^{-rT} E(\Phi_{loc}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\gamma))$$

$$\vartheta = e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} (W_{T_i} - \sigma T_i) \right) + e^{-rT} E(\Phi_{loc}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\vartheta))$$

### 3.5.3 Etude de la Localisation dans le Cas d'une Digitale

Dans ce cas, le pay-off est :

$$\Phi(s) = 1_{\{s \geq H\}}$$

On pose

$$D_\varepsilon(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 1_{]-\varepsilon, 0]}(s) + \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{\varepsilon}\right)^2\right) 1_{]0, \varepsilon[}(s) + 1_{[\varepsilon, +\infty[}$$

et

$$G_\varepsilon(s) = D_\varepsilon(s - H)$$

On définit enfin

$$F_\varepsilon = \Phi - G_\varepsilon$$

On a :

$F_\varepsilon$  et  $G_\varepsilon$  sont donc les composantes localisée et régularisée pour un paramètre de localisation  $\varepsilon$ .

En effet on peut appliquer la dérivation sous l'espérance à  $G_\varepsilon(S_T)$  ainsi qu'à  $G'_\varepsilon(S_T) Y_T$  car  $D_\varepsilon(s)$  et

$$D'_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) 1_{]-\varepsilon, 0]}(s) + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{s}{\varepsilon}\right) 1_{]0, \varepsilon[}(s)$$

sont bornées et Lipschitziennes.

On veut étudier le gain obtenu par localisation sur la méthode de Malliavin global. On se restreint à l'étude du delta.

On rappelle que l'estimateur du delta par la méthode de Malliavin global est donné par :

$$\delta_{maglob} = e^{-rT} \Phi(S_T) \frac{W_T}{x\sigma T}$$

tandis que l'estimateur par la méthode de Malliavin localisé s'écrit :

$$\delta_{maloc} = e^{-rT} F_\varepsilon(S_T) \frac{W_T}{x\sigma T} + e^{-rT} G'_\varepsilon(S_T) \frac{S_T}{x}$$

L'étude de la variance de ces estimateurs est faite en annexe.

L'implémentation informatique des formules analytique a été faite. On donne ci dessous la courbe représentative de l'écart-type relatif  $100 \frac{\sqrt{\text{var}(\delta_{maloc})}}{\delta_{exact}}$  en fonction du paramètre de localisation  $\varepsilon$ .

Les paramètres sont :  $x = 100$ ;  $r = 0,1$ ;  $\text{vol} = 0,2$ ;  $T = 1$

Cette courbe se situe en dessous de l'écart-type relatif  $100 \frac{\sqrt{\text{var}(\delta_{maglob})}}{\delta_{exact}}$  sauf pour les petites valeurs de  $\varepsilon$ . L'optimum, proche de 80, permet de diviser par 4 la variance (et donc par 16 le nombre de trajectoires). Cependant, même pour des valeurs très éloignées de l'optimum, on peut diminuer de façon importante la variance de l'estimateur.

### 3.5.4 Etude de la composante régularisée

Il est à noter qu'une trop forte localisation a un effet catastrophique sur la variance de l'estimateur de Malliavin localisé.

D'une part, pour  $\varepsilon$  très faible, le Pay-off localisé  $F_\varepsilon(S_T)$  tend vers 0 presque sûrement (car il en est de même de  $F_\varepsilon$  et que  $S_T$  est à densité) et est borné (par  $\frac{1}{2}$ ). Le poids étant intégrable, le théorème de la convergence dominée s'applique pour conclure que la composante localisée du Delta tend vers 0.

Le terme dominant est donc la contribution régulière.

$$\delta_{maloc-reg} = e^{-rT} G'_\varepsilon(S_T) \frac{S_T}{x}$$

Le calcul de la variance de  $\delta_{maloc-reg}$  est fait en annexe.

On fait apparaître sur le graphique ci dessous l'écart-type relatif  $100 \frac{\sqrt{\text{var}(\delta_{maloc-reg})}}{\delta_{exact}}$  de la composante régulière de l'estimateur Malliavin localisé tracé en fonction de  $\varepsilon$  ainsi que le biais relatif  $100 \frac{|E(\delta_{maloc-reg}) - \delta_{exact}|}{\delta_{exact}}$ .

Pour les très faibles valeurs de  $\varepsilon$ , le biais est négligeable comme prévu, tandis que la variance de l'estimateur régularisé augmente vers l'infini.

Ce phénomène s'explique clairement : pour un paramètre de localisation très faible, la composante régulière du Delta est très "proche" de la valeur exacte ; cette dernière s'obtient idéalement par différences finies sur le prix actualisé global pour un pas tendant vers 0 (c'est une dérivée "exacte") ; dans ce cas la variance est infinie d'après l'étude de l'estimateur par différences finies du Delta d'une Digitale.

Pour conclure provisoirement, l'optimum s'obtient comme un compromis entre l'estimateur régularisé et l'estimateur localisé : on essaye ainsi de profiter à la fois de l'efficacité de la méthode de la dérivation trajectorielle adaptée aux pay-off réguliers et de la méthode des poids adaptée aux pay-off localisés.

A ce titre, que gagne-t-on à "localiser" lorsque le Pay-off l'est déjà ?

### 3.5.5 Cas d'un Pay-off localisé

On considère le cas d'une digitale avec une double limite dont le Pay-off s'écrit :

$$\Phi(S_T) = 1_{\{H_2 > S_T \geq H_1\}}$$

De façon semblable à ce qui précède, on peut écrire la décomposition :

$$\Phi(S_T) = F_\varepsilon(S_T) + G_\varepsilon(S_T)$$

en définissant la composante régularisée

$$G_\varepsilon(S_T) = D_\varepsilon(S_T - H_1) - D_\varepsilon(S_T - H_2)$$

$$D_\varepsilon(s) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 1_{\{0 \geq s > -\varepsilon\}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 1_{\{\varepsilon > s > 0\}} + 1_{\{s \geq \varepsilon\}}$$

et la composante localisée

$$F_\varepsilon(S_T) = \Phi(S_T) - G_\varepsilon(S_T)$$

Le Delta s'écrit alors comme la somme de deux termes localisés autour de  $H_1$  et  $H_2$  respectivement.

Pour une localisation "pure", on impose

$$0 < \varepsilon \leq \frac{H_2 - H_1}{2}$$

et les deux termes sont alors non corrélés.

On trace alors la courbe représentant  $100 \frac{\sqrt{\text{var}(\delta_{maloc})}}{\delta_{exact}}$  en fonction du paramètre de localisation  $\varepsilon$ . et l'on fait également apparaître l'écart-type relatif  $100 \frac{\sqrt{\text{var}(\delta_{maglob})}}{\delta_{exact}}$ . (L'axe des abscisses est gradué en centièmes).

Ce graphe met en évidence l'effet négatif d'une localisation pure.

# Chapitre 4

## Tests dans le Cas Black-Scholes

On se propose de valider la méthode de Malliavin dans le contexte de Black-Scholes.

$$dS_t = rdt + \sigma dW_t$$

$$S_0 = x$$

On considère des options de pay-off

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

Dans tous les tests, on fixe :

$$x = 100 ; r = 0,1 ; \sigma = 0,2 ; T_i = \frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n.$$

Pour les calculs des différences finies, on fixe les pas suivants en prix initial et en volatilité :

$$dx = 0,001 ; d\sigma = 0,001.$$

### 4.1 Monte-Carlo Classique

#### 4.1.1 Validation du programme de calcul par Différences Finies

Le calcul par différences finies est la méthode de référence qu'il faut valider.

### Cas du Call

Le flux terminal est :

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

On fixe :

$$K = 100.$$

Le résultat des simulations est présenté dans le tableau suivant.

	Exactes	DF - N=5.10 <sup>5</sup>	DF - N=10 <sup>7</sup>
Prix	13,269 664	13,299 359	13,275 449
Delta	0,725 747	0,726 224	0,726 001
Gamma	0,016 661	0,007642	0,015 589
Vega	33,322 460	33,477 945	33,343 453
err Prix %		0,223 782	0,043 596
err Delta %		0,065 805	0,034 985
err Gamma %		54,133 100	6,438 126
err Vega %		0,466 607	0,063 000
err estimée Prix %		0,343 908	0,076 803
err estimée Delta %		0,211 233	0,047 215
err estimée Gamma %		32,314 187	11,539 843
err estimée Vega %		0,670 555	0,149 716

DF = différence finie et N = nombre de trajectoires

$$\text{err \%} = 100 * \left| \frac{\text{val MC} - \text{val exacte}}{\text{val exacte}} \right|$$

$$\text{err estimée \%} = 100 * \left| \frac{2 * \text{écart-type empirique de l'estimateur MC}}{\text{val exacte}} \right|$$

Dans le calcul de l'écart-type, on tient compte du fait que la moyenne de l'estimateur est connue.

**Commentaire :** L'objectif est de valider le programme de calcul des Grecques par les différences finies qui constitue la méthode de référence. Dans le cas du Call, il n'est pas difficile d'atteindre une erreur relative inférieure à 1% pour le Delta et le Vega. En revanche, il faudrait pousser le nombre de trajectoires à 10<sup>9</sup> pour obtenir une estimation acceptable de Gamma (dans le cas d'un Monte-Carlo naïf).

Le calcul d'erreur est donnée par l'erreur estimée" (amplitude moitié de l'intervalle de confiance). A titre indicatif, on donne aussi les erreurs empiriques. Asymptotiquement, l'erreur empirique se trouve dans l'intervalle de confiance (avec une probabilité de 95%). Ceci n'est pas vérifié pour  $N = 5.10^5$  car le calcul de l'intervalle de confiance n'est pas fiable (c'est à dire que la variance empirique n'est pas encore stable).

## Cas de la Digitale

Le flux terminal est le suivant

$$\Phi(S_T) = 1_{\{S_T \geq H\}}$$

On fixe :

$$H = 100.$$

Les simulations donnent le tableau suivant :

	Exactes	DF - N=5.10 <sup>5</sup>	DF - N=10 <sup>7</sup>
Prix	0,593 050	0,593 532	0,592 666
Delta	0,016 661	0,023 526	0,016 287
Gamma	-0,000 500	3,619 350	-0,542 902
Vega	-0,999 674	-1,027 895	-0,998 669
err Prix %		0,081 191	0,064 746
err Delta %		41,200 696	2,245 672
err Gamma %		724 206,131 583	108 515,919 772
err Vega %		2,823 071	0,100 508
err estimée Prix %		0,205 007	0,045 871
err estimée Delta %		55,382 085	10,304 026
err estimée Gamma %		3 692 234,418 977	686 947,423 992
err estimée Vega %		6,094 498	1,343 300

**Commentaire :** De façon prévisible, la convergence du Delta et du Vega est plus lente que dans le cas du Call.

Avec les paramètres choisis ( $x = K = H$ ) , le Gamma du Call et le Delta de la Digitale sont confondus (ils sont proportionnels dans le cas général : voir Annexe). Ainsi, bien que l'erreur empirique soit ici meilleure pour la Digitale que pour le Call, les intervalles de confiance sont sensiblement les mêmes.

Les calculs de variance des estimateurs Monte-Carlo permettent de justifier l'ordre des erreurs du Gamma (voir l'étude faite sur les différences finies).

### 4.1.2 Comparaison de la Méthode de Malliavin et des Différences Finies

Le tableau suivant permet de montrer l'apport du calcul de Malliavin dans le cas de la Digitale précédente.

N=50 000 (temps de calcul : 0, 70 seconde)

	Exactes	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
Prix	$5,931 \cdot 10^{-1}$	$5,923 \cdot 10^{-1}$		
Delta	$1,666 \cdot 10^{-2}$	$9,048 \cdot 10^{-3}$	$1,671 \cdot 10^{-2}$	$1,665 \cdot 10^{-2}$
Gamma	$-5 \cdot 10^{-4}$	$1,810 \cdot 10^1$	$-4,96 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$
Vega	$-9,997 \cdot 10^{-1}$	$-9,229 \cdot 10^{-1}$	$-9,930 \cdot 10^{-1}$	-1, 000 091
err Prix %		$1,284 \cdot 10^{-1}$		
err Delta %		$4,569 \cdot 10^1$	$2,734 \cdot 10^{-1}$	$7,948 \cdot 10^{-2}$
err Gamma %		$3,621 \cdot 10^6$	$6,695 \cdot 10^{-1}$	$2,584 \cdot 10^{-2}$
err Vega %		7, 676	$6,695 \cdot 10^{-1}$	$4,173 \cdot 10^{-2}$
err estimée Prix %		0,6489		
err estimée Delta %		108, 6	1, 483	$3,825 \cdot 10^{-1}$
err estimée Gamma %		$7,241 \cdot 10^6$	3, 913	1,154
err estimée Vega %		18, 26	3, 913	1,105

La méthode de Malliavin permet d'obtenir une bonne précision sur le calcul des Grecques, pour un nombre réduit de trajectoires, y compris pour le Gamma qui est problématique dans le cas des différences finies. Grâce à la localisation, l'objectif de 1% d'erreur est pratiquement atteint pour 50 000 trajectoires (il s'agit d'un Monte-Carlo naïf) . Le paramètre de localisation doit cependant être ajusté (voir section 4).

On remarque que l'emploi de Malliavin introduit des erreurs relatives (empiriques et estimées) identiques pour le Gamma et le Vega de la digitale. En effet, les "poids Mallavin" intervenant dans le calcul du Vega et du Gamma sont proportionnels : les estimateurs empiriques sont donc également proportionnels. Il en est de même du Vega et du Gamma eux mêmes (ce que l'on peut vérifier directement). Ces deux faits valident la remarque.

### 4.1.3 Graphiques

Les courbes présentées correspondent à  $N=100\,000$  trajectoires . (Une trajectoire sur 100 est sauvegardée). Les trois premiers graphiques visualisent les estimateurs déduits par la méthode de Malliavin localisée et par les différences finies.

Pour les mêmes trajectoires, les trois autres graphiques suivants illustrent de façon plus fine la convergence des estimateurs déduits de la méthode de Malliavin localisée. Les bornes des intervalles de confiance standard sont également représentées.

### 4.1.4 Choix du Paramètre de Localisation

$N=50000$



	$\varepsilon = 10$	$\varepsilon = 50$	$\varepsilon = 55$	$\varepsilon = 100$
err Delta %	0, 347	0, 312	0, 195	0, 158
err Gamma %	5, 406	0, 368	0, 176	0, 773
err Vega %	0, 659	0, 630	0, 702	1, 176
err estimée Delta %	1, 476	0, 406	0, 383	0, 387
err estimée Gamma %	10, 076	1, 239	1, 157	1, 236
err estimée Vega %	1, 534	1, 056	1, 103	1, 494

L'ajustement du paramètre résulte d'un compromis : en réduisant trop le paramètre de localisation, on augmente vers l'infini la variance de la partie régulière. Le choix de ce paramètre n'est cependant pas critique : sur une large plage, il permet de diminuer sensiblement la variance des estimateurs.

## 4.2 Quasi-Monte-Carlo

On utilise les suites de Sobol à la place du générateur pseudo-aléatoire classique.

La démarche est la même que précédemment, l'étude portant uniquement sur la Digitale.

### 4.2.1 Différences Finies

Pour un nombre élevé de trajectoires, la précision pour le calcul du Gamma n'est pas encore satisfaisante.

	$N = 10^5$	$N = 10^6$
err Prix %	$2,83 \cdot 10^{-4}$	$1,31 \cdot 10^{-4}$
err Delta %	$1,854 \cdot 10^1$	2, 246
err Gamma %	$1,810 \cdot 10^6$	100
err Vega %	$4,354 \cdot 10^{-1}$	$2,810 \cdot 10^{-2}$

### 4.2.2 Comparaison avec la Méthode de Malliavin

La méthode de Malliavin permet d'obtenir une précision de 1% en quelques milliers de trajectoires.

En localisant, on réduit ce nombre à moins de 250.

N=10000 (temps de calcul : 0, 110 seconde)

	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
err Prix %	$1,192 \cdot 10^{-2}$		
err Delta %	100	$1,353 \cdot 10^{-1}$	$2,818 \cdot 10^{-3}$
err Gamma %	100	$7,964 \cdot 10^{-1}$	$4,898 \cdot 10^{-2}$
err Vega %	$4,354 \cdot 10^{-1}$	$7,964 \cdot 10^{-1}$	$5,175 \cdot 10^{-2}$

N=250 (temps de calcul : 0, 000 seconde)

	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
err Prix %	$5,221 \cdot 10^{-1}$		
err Delta %	100	3,158	$6,513 \cdot 10^{-1}$
err Gamma %	100	$1,518 \cdot 10^{-1}$	$1,630 \cdot 10^{-1}$
err Vega %	$8,103 \cdot 10^1$	$1,518 \cdot 10^{-1}$	$2,696 \cdot 10^{-1}$

### 4.2.3 Graphiques

Les trois premiers graphiques comparent les méthodes de Malliavin et des différences finies.

Les trois suivants illustrent plus finement la convergence des estimateurs déduits de la méthode de Malliavin localisée (une trajectoire sur 100 a été sauvegardée pour la lisibilité).

## 4.3 Options Path-Dependent

On s'intéresse au cas d'une option corridor sur un titre dans le cas du modèle de Black-Scholes.

Le pay-off est :

$$\Phi((S_{T_i})_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n 1_{\{H_1 \leq S_{T_i} \leq H_2\}}$$

avec

$$0 < T_1 \leq \dots \leq T_n$$

et on évalue les Grecques en  $T_0 = 0$ .

La méthode la plus efficace dans ce cas particulier est de considérer le Corridor comme une somme de Digitales dont on calcule les Grecques suivant la méthode précédente : on élimine ainsi le caractère "path-dependent" de l'option.

On fixe :

$$H_1 = 100; H_2 = 110; n = 360; T_i = \frac{i}{360}, 1 \leq i \leq 360.$$

On donne les résultats pour N=1000 trajectoires (temps de calcul : 3, 47 s).

	erreur Sobol			erreur classique		
	Delta	Gamma	Vega	Delta	Gamma	Vega
Mal "loc" ( $\varepsilon=40$ )	$3,68 \cdot 10^{-2}$	$8,88 \cdot 10^{-2}$	$6,85 \cdot 10^{-3}$	3,645	21,07	6, 40
Malliavin	$9,87 \cdot 10^{-2}$	1,19	$7,03 \cdot 10^{-2}$	8,18	27,27	9, 46
D F	95,89	$6,105 \cdot 10^6$	$9,87 \cdot 10^{-1}$	134,8	$1,601 \cdot 10^6$	12, 94

Ce point de vue n'est pas très instructif par rapport au cas d'une seule digitale. On remarque toutefois que la localisation est intéressante (surtout pour l'erreur classique relative au Delta ) alors qu'elle ne s'imposait pas a priori, le pay-off étant déjà localisé. Ce phénomène s'explique par une covariance négative entre le terme régularisé et le terme localisé, ce qui permet de diminuer la variance.

Remarquons enfin que l'on peut voir que l'objectif de 1% relatif à l'erreur classique de l'estimateur du Gamma est atteint pour 400 000 trajectoires en utilisant Malliavin localisé. Les différences finies sont tout à fait impraticables.

On donne ci dessous les courbes des erreurs obtenues par quasi Monte-Carlo.

Il est également intéressant de regarder l'efficacité de la méthode de Malliavin en envisageant l'option corridor comme une véritable fonctionnelle de la trajectoire Brownienne.

Les résultats pour N=100 000 trajectoires figurent dans le tableau suivant (temps de calcul 272, 54 s).

	erreur empirique			erreur estimée		
	Delta	Gamma	Vega	Delta	Gamma	Vega
Mal loc ( $\varepsilon=2$ )	1, 086	0, 804	0, 308	1, 860	4, 817	0, 715
Malliavin	3, 371	2, 287	0, 381	15, 681	124, 8	25, 28
Différences Finies	0, 936	$9,391 \cdot 10^4$	0, 027	13, 829	$1,626 \cdot 10^5$	0, 856

La méthode implémentée est une génération récursive du mouvement Brownien. On utilise des suites de Sobol aux points  $\frac{512}{360}T, \frac{256}{360}T, \frac{128}{360}T, \frac{384}{360}T$  (on génère davantage de composantes que nécessaires du fait que 360 n'est pas une puissance de 2).

Le comportement des estimateurs par Malliavin localisé et par différences finies est tracé ci dessous (erreurs empiriques) :

Il faut noter que du point de vue d'un Monte-Carlo classique, il faudrait pousser le nombre de trajectoires à 1,5 millions pour obtenir une erreur satisfaisante portant sur le Gamma.

D'autre part, il faut constater le paramètre de localisation (voisin de l'optimum) est de valeur faible.

Le tableau suivant permet de préciser la variation du paramètre de localisation optimal en fonction du nombre d'échéances du corridor.

n (nombre d'échéances)	5	10	100	200	300
$\varepsilon$ Delta	30	12	5	3	4
$\varepsilon$ Gamma	30	12	5	3	3
$\varepsilon$ Vega	10	4	1	1	1

On remarque que plus le nombre d'échéances est élevé, plus le paramètre de localisation doit être faible. Ce n'est que dans ce dernier cas que le terme de localisation est approprié. C'est également dans ce cas que la localisation est cruciale.

# Chapitre 5

## Modèle de Hull-White

Il est intéressant de pouvoir étendre le calcul de Grecques suivant la méthode de Malliavin à un modèle à volatilité stochastique.

Une situation où l'on peut facilement réaliser cette extension est une version du modèle de Hull et White :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2)$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dt + \beta dW_t^2$$

$$S_0 = x$$

$$\sigma_0 = v$$

où  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont des Browniens indépendants et  $\theta_t$  est une fonction déterministe.

La méthode générale peut s'appliquer pour en déduire les poids Malliavin. On préfère cependant commencer par exposer une méthode permettant de se ramener au cas Black-Scholes à volatilité déterministe. On commence également par supposer que la corrélation entre la volatilité et le sous-jacent est nulle :  $\theta_t = 0$ .

### 5.1 Conditionnement

Le modèle est le suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t^1$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dt + \beta dW_t^2$$

$$S_0 = x$$

$$\sigma_0 = v$$

où  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont des Browniens indépendants.

Les conditions assurant la validité des techniques décrites dans Fournier et al ne sont pas vérifiées, la volatilité n'étant pas une simple fonction du sous-jacent. On peut cependant se ramener à un cadre où ces techniques sont applicables.

On déroule en effet les calculs en conditionnant d'abord par rapport à la tribu  $\sigma(W_t^2, 0 \leq t \leq T)$  ce qui permet d'effectuer la suite des opérations (calcul de Malliavin) relativement à l'espace de Wiener engendré par  $W^1$ .

De façon plus précise, on considère l'espérance conditionnelle :

$$P(\omega^2) = E(e^{-rT} \Phi(S) | \sigma(\omega^2))$$

en notant

$$\omega^2 = (W_t^2, 0 \leq t \leq T)$$

et

$$S = (S_t, 0 \leq t \leq T)$$

$\Phi(S)$  est le pay-off de l'option considérée dont le prix est donc :

$$C = E(P(\omega^2))$$

On remarque que l'on peut écrire l'espérance conditionnelle comme une espérance ordinaire :

$$P(\omega^2) = E(e^{-rT} \Phi(S^{\omega^2}))$$

où

$$S^{\omega^2} = (S_t^{\omega^2}, 0 \leq t \leq T)$$

vérifie

$$\frac{dS_t^{\omega^2}}{S_t^{\omega^2}} = rdt + \sigma_t^{\omega^2} dW_t^1$$

où l'on définit la fonction de volatilité

$$\sigma_t^{\omega^2} = \sigma_0 e^{\alpha t + W_t^2}$$

Cette fonction est déterministe, la trajectoire  $\omega^2$  étant fixée.

Il s'agit d'un modèle où les techniques de Malliavin s'appliquent pour le calcul des Grecques de manière identique au modèle de Black et Scholes, ainsi qu'on le détaille plus bas.

On rappelle que ces techniques reposent sur l'identification du processus tangent.

$$Y_t^{\omega^2} = \frac{dS_t^{\omega^2}}{dx}$$

On a l'équation :

$$\begin{aligned} dY_t^{\omega^2} &= Y_t^{\omega^2} r dt + Y_t^{\omega^2} \sigma_t^{\omega^2} dW_t^1 \\ Y_0^{\omega^2} &= 1 \end{aligned}$$

d'où

$$Y_t^{\omega^2} = \frac{S_t^{\omega^2}}{x}$$

D'autre part, la solution a une expression explicite :

$$S_t^{\omega^2} = x e^{\int_0^t \sigma_s^{\omega^2} dW_s^1 + \int_0^t \left( r - \frac{1}{2} (\sigma_s^{\omega^2})^2 \right) ds}$$

ce qui permet d'appliquer la "chain rule" :

$$D_s S_t^{\omega^2} = \sigma_s^{\omega^2} S_t^{\omega^2} 1_{\{s \leq t\}}$$

et l'on écrit la relation fondamentale :

$$D_s S_t^{\omega^2} = x \sigma_s^{\omega^2} Y_t^{\omega^2} 1_{\{s \leq t\}}$$

## 5.2 Calcul des Poids Malliavin

Le calcul des Grecques relativement au modèle de Hull et White est immédiat.

Montrons le pour le Delta : le calcul de Malliavin permet de déterminer une fonction de poids  $\pi$  tel que l'on ait :

$$\frac{dP(\omega^2)}{dx} = E \left( e^{-rT} \Phi \left( S^{\omega^2} \right) \pi \right)$$

En supposant que  $\Phi$  est dérivable, de dérivée bornée, la dérivation sous l'espérance et sous l'espérance conditionnelle est valide, ce qui s'applique au Delta :

$$\delta = E \left( e^{-rT} \frac{d\Phi(S)}{dx} \right) = E \left( E \left( e^{-rT} \frac{d\Phi(S)}{dx} \middle| \sigma(\omega^2) \right) \right) = E \left( \frac{dP(\omega^2)}{dx} \right)$$

On déduit de ces deux relations :

$$\begin{aligned}\delta &= E \left( E \left( e^{-rT} \Phi \left( S^{\omega^2} \right) \pi \right) \right) \\ &= E \left( e^{-rT} \Phi(S) \pi \right)\end{aligned}$$

Un raisonnement par densité et convergence dominée permet alors de relâcher la condition de régularité du Pay-off et d'identifier  $\pi$  comme un poids admissible pour le Delta.

Le raisonnement est identique pour les autres Grecques. Les techniques de Malliavin conduisent alors à la détermination des poids selon la proposition suivante dont la preuve est donnée en annexe :

**Proposition 15** *Le pay-off envisagé est du type*

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

Les poids Malliavin ont alors pour expressions admissibles :

$$\pi(\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \sigma_t)^2}$$

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} - n \right\}$$

en introduisant la notion de Vega

$$\vartheta = \frac{dE(e^{-rT} \Phi)}{d\sigma_0}$$



### 5.3 Réduction des Poids

Les poids déterminés précédemment ne sont pas minimaux (pour la classe de Pay-off envisagée) car ils ne s'expriment pas en fonction des seules observations. On peut tenter de trouver les poids minimaux en conditionnant par rapport à ces dernières. En général, on n'aboutit cependant pas à des formules explicites (voir plus loin).

En revanche, le calcul est praticable si l'on cherche à calculer les poids en fonction également du Brownien  $W^2$ . Cela revient à déterminer les poids minimaux dans le cas où la volatilité est déterministe.

**Proposition 16** *On améliore les poids Malliavin en adoptant les expressions :*

$$\begin{aligned}\pi_a(\delta) &= \int_0^{T_1} \sigma_t dW_t^1 \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \\ \pi_a(\gamma) &= \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \left( x^2 \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \\ \pi_a(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} - n \right\}\end{aligned}$$

La preuve est donnée en annexe.

### 5.4 Extension

On peut établir une expression théorique des poids minimaux.

On pose

$$\begin{aligned}X_i &= \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt = \ln \frac{S_{T_i}}{S_{T_{i-1}}} - r(T_i - T_{i-1}) \\ V_i &= \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt\end{aligned}$$

On établit la nouvelle écriture des poids améliorés :

$$\begin{aligned}
\pi_a(\delta) &= \frac{1}{x} \left( \frac{X_1}{V_1} + \frac{1}{2} \right) \\
\pi_a(\gamma) &= \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \frac{1}{x^2 V_1} \\
\pi_a(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i}{V_i} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{X_i}{V_i} + \frac{1}{2} \right) V_i - n \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( X_i^2 - \frac{1}{4} V_i^2 \right) \frac{1}{V_i} - n \right\}
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\begin{aligned}
\pi_a(\delta) &= E(\pi(\delta) | \sigma(X_1, V_1)) \\
\pi_a(\gamma) &= E(\pi(\gamma) | \sigma(X_1, V_1)) \\
\pi_a(\vartheta) &= E(\pi(\vartheta) | \sigma(X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n))
\end{aligned}$$

D'autre part, les poids minimaux sont définis par

$$\begin{aligned}
\pi_m(\delta) &= E(\pi_a(\delta) | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E(\pi_a(\delta) | \sigma(X_1, \dots, X_n)) \\
\pi_m(\gamma) &= E(\pi_a(\gamma) | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E(\pi_a(\gamma) | \sigma(X_1, \dots, X_n)) \\
\pi_m(\vartheta) &= E(\pi_a(\vartheta) | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E(\pi_a(\vartheta) | \sigma(X_1, \dots, X_n))
\end{aligned}$$

Il suffit alors de les calculer avec les conditionnements suivants :

$$\begin{aligned}
\pi_m(\delta) &= E(\pi_a(\delta) | \sigma(X_1)) \\
\pi_m(\gamma) &= E(\pi_a(\gamma) | \sigma(X_1)) \\
\pi_m(\vartheta) &= E(\pi_a(\vartheta) | \sigma(X_1, \dots, X_n))
\end{aligned}$$

Les relations concernant le Delta et le Gamma s'obtiennent en considérant que  $(X_1, V_1)$  est indépendant de  $(X_2, \dots, X_n)$ .

Les relations précédentes s'écrivent, en faisant intervenir des noyaux de conditionnements :

$$\begin{aligned}
\pi_m(\delta) &= \int \pi_a(\delta)(X_1, v_1) P^{V_1|X_1}(X_1, dv_1) \\
\pi_m(\gamma) &= \int \pi_a(\gamma)(X_1, v_1) P^{V_1|X_1}(X_1, dv_1) \\
\pi_m(\vartheta) &= \int \pi_a(\vartheta)(X_1, \dots, X_n, v_1, \dots, v_n) P^{V_1|X_1}(X_1, dv_1) \dots P^{V_n|X_n}(X_n, dv_n)
\end{aligned}$$

La décomposition en produit du dernier noyau provient du fait que la famille de couples  $(X_i, V_i)$   $1 \leq i \leq n$  est stochastiquement libre.

Il s'agit de déterminer la famille des noyaux  $P^{V_i|X_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Conditionnellement à la trajectoire Brownienne de  $W^2$ ,  $X_i$  suit une loi normale de moyenne  $-\frac{V_i}{2}$  et de variance  $V_i$  :

$$P^{X_i}_{\omega^2} = N\left(-\frac{V_i}{2}, V_i\right)$$

On en déduit qu'il s'agit de la loi de  $X_i$  conditionnellement à  $V_i$  :

$$P^{X_i|V_i} = N\left(-\frac{V_i}{2}, V_i\right)$$

On définit ensuite la densité  $f_i$  de la loi de  $V_i$  :

$$P^{V_i}(dv_i) = f_i(v_i) dv_i$$

La formule de Bayes permet alors d'obtenir le noyau de conditionnement de  $V_i$  par rapport à  $X_i$  :

$$P^{V_i|X_i}(x_i, dv_i) = \frac{n\left(-\frac{v_i}{2}, v_i\right)(x_i) f_i(v_i)}{\int n\left(-\frac{v}{2}, v\right)(x_i) f_i(v) dv} dv_i$$

où  $n(m, v)$  est la densité de la loi  $N(m, v)$ .

Il reste à déterminer la densité  $f_i$ , c'est-à-dire la loi de  $V_i$ .

On rappelle que

$$V_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt$$

avec

$$\sigma_t = \sigma_0 \exp\left(aW_t^2 + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)t\right)$$

On constate que  $V_i$  est une moyenne de variables log-normales. La loi de ce type de variables conduit à des approximations.

La détermination de cette loi reviendrait en fait à celle de la loi de la trajectoire  $(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$ . On perdrait dans ce cas l'intérêt du calcul de Malliavin.

## 5.5 Corrélation instantannée

On peut étendre le modèle au cas d'une corrélation instantannée entre l'actif et la volatilité.

On reprend le modèle général :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t(\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2)$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dt + \beta dW_t^2$$

$$S_0 = x$$

$$\sigma_0 = v$$

où  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont des Browniens indépendants.

A priori,  $\theta_t$  est un processus aléatoire adapté. On fait ici l'hypothèse qu'il est déterministe (ou de façon plus générale qu'il ne dépend que du brownien  $W^2$ ).

Les techniques précédentes s'appliquent alors sans problème.

On a la solution

$$S_t = x e^{\int_0^t \sigma_s(\cos(\theta_s) dW_s^1 + \sin(\theta_s) dW_s^2) + \int_0^t (r - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2) ds}$$

et le processus tangent s'écrit

$$Y_t = \frac{S_t}{x}$$

On fixe alors la trajectoire  $\omega^2$  pour effectuer le calcul de Malliavin relativement à l'espace de Wiener engendré par  $W^1$ .

L'application de la "chain rule" donne :

$$D_s S_t^{\omega^2} = \cos(\theta_s) \sigma_s^{\omega^2} S_t^{\omega^2} 1_{\{s \leq t\}}$$

et l'on écrit la relation fondamentale :

$$D_s S_t^{\omega^2} = x \cos(\theta_s) \sigma_s^{\omega^2} Y_t^{\omega^2} 1_{\{s \leq t\}}$$

On considère de nouveau un pay-off du type

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

Dans un premier temps, on obtient :

**Proposition 17** *Les poids Malliavin ont pour expressions :*

$$\begin{aligned}\pi(\delta) &= \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \cos(\theta_t) \sigma_t} \\ \pi(\gamma) &= \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \cos(\theta_t) \sigma_t)^2} \\ \pi(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(T_i - T_{i-1})} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \\ &\quad \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\cos(\theta_t) \sigma_t} \\ &\quad - \frac{n}{\sigma_0}\end{aligned}$$

La preuve est donnée en annexe est similaire au cas sans corrélation. La réduction des poids donne de la même manière le résultat suivant.

**Proposition 18** *On améliore les poids Malliavin en adoptant les expressions :*

$$\begin{aligned}\pi_a(\delta) &= \int_0^{T_1} \cos(\theta_t) \sigma_t dW_t^1 \left( x \int_0^{T_1} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \\ \pi_a(\gamma) &= \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \left( x^2 \int_0^{T_1} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \\ \pi_a(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \\ &\quad \int_{T_{i-1}}^{T_i} \cos(\theta_t) \sigma_t dW_t^1 \\ &\quad - \frac{n}{\sigma_0}\end{aligned}$$

## 5.6 Dédution Générale des Poids

### 5.6.1 Poids Malliavin

On en vient à présent à l'application générale des techniques de Malliavin.

Pour appliquer la formulation générale, on suppose que la corrélation est une constante :

$$\forall t \quad \theta_t = \theta$$

Alors le vecteur  $X_t = (S_t, \sigma_t)^T$  suit la diffusion Markovienne :

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma(X_t) dW_t$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x \\ \nu \end{pmatrix}$$

en notant

$$dW_t = \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(X_t, t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sigma_t S_t & \sin(\theta) \sigma_t S_t \\ 0 & \beta \sigma_t \end{pmatrix}$$

Le processus tangent est défini par :

$$Y_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_t}{\partial x} & \frac{\partial S_t}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_t}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_t}{x} & M_t S_t \\ 0 & \frac{\sigma_t}{\nu} \end{pmatrix}$$

avec

$$M_t = \frac{1}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s (\cos(\theta) dW_s^1 + \sin(\theta) dW_s^2) - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)$$

On a la relation fondamentale

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \Sigma(X_s, s) 1_{\{s \leq t\}}$$

où l'on a, avec un abus de notation :

$$D_s X_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_t}{\partial dW_s^1} & \frac{\partial S_t}{\partial dW_s^2} \\ \frac{\partial \sigma_t}{\partial dW_s^1} & \frac{\partial \sigma_t}{\partial dW_s^2} \end{pmatrix}$$

On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$Y_t 1_{\{s \leq t\}} = D_s X_t \Sigma(X_s, s)^{-1} Y_s$$

On considère alors un pay-off du type  $\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n})$  et le prix associé :

$$u(x, \nu) = e^{-rT} E(\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n}) | X_0 = x, \sigma_0 = \nu)$$

Le résultat général permet d'écrire :

$$(gradu)^T = e^{-rT} \left[ E\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n}) \int_0^T \left[ \Sigma(X_s, s)^{-1} Y_s \frac{1_{[0, T_1]}(s)}{T_1} \right]^T dW_s \right]$$

On note

$$B_s = \Sigma(X_s, s)^{-1} Y_s \frac{1_{[0, T_1]}(s)}{T_1}$$

On en déduit les poids :

$$\pi'(\delta) = \int B_{11} dW^1 + \int B_{21} dW^2$$

$$\pi'(\vartheta) = \int B_{12} dW^1 + \int B_{22} dW^2$$

Le calcul donne :

$$B_t = \begin{pmatrix} (x \cos(\theta) \sigma_t)^{-1} & M_t (\cos(\theta) \sigma_t)^{-1} - \tan(\theta) (\beta \sigma_0)^{-1} \\ 0 & (\beta \sigma_0 \cos(\theta))^{-1} \end{pmatrix} \frac{1_{[0, T_1]}(t)}{T_1}$$

On en déduit le résultat :

**Proposition 19** *On considère la classe de Pay-off  $\Phi(X_{T_1}, \dots, X_{T_n})$ ,  $0 < T_1 < \dots < T_n$ . Les poids ont les expressions :*

$$\pi'(\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \cos(\theta) \sigma_t}$$

$$\begin{aligned} \pi'(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s (\cos(\theta) dW_s^1 + \sin(\theta) dW_s^2) - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) (\cos(\theta) \sigma_t)^{-1} dW_t^1 \\ &\quad - \frac{1}{\beta \sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \tan(\theta) dW_t^1 + \frac{1}{\beta \sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \cos(\theta)^{-1} dW_t^2 \end{aligned}$$

**Commentaire :**

On retrouve une expression antérieure du poids du Delta : on en déduit donc le même poids pour le Gamma. On est également conduit à adopter les mêmes poids réduits.

Il n'en est pas de même du Vega.

Pour ce cas, on constate que le poids antérieur  $\pi(\vartheta)$  (non amélioré) est valable pour une classe de pay-off plus large que celle considérée dans cette section (la volatilité étant une fonction déterministe du deuxième Brownien). Cependant,  $\pi'(\vartheta)$  ne peut se déduire comme espérance conditionnelle de  $\pi(\vartheta)$  car on n'a pas la mesurabilité souhaitée : il n'y a donc pas de raison que la variance de  $\pi'(\vartheta)$  soit plus faible que celle de  $\pi(\vartheta)$ .

Il est en fait possible de diminuer la variance de  $\pi'(\vartheta)$  en restreignant la classe de Pay-off.

**5.6.2 Réduction des Poids**

**Proposition 20** *On considère la classe de Pay-off  $\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$ ,  $0 < T_1 < \dots < T_n$*

On améliore alors le poids du Vega en adoptant l'expression :

$$\begin{aligned} \pi'_a(\vartheta) = & \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s \cos(\theta) dW_s^1 \right) (\cos(\theta) \sigma_t)^{-1} dW_t^1 \\ & + \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s \sin(\theta) dW_s^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) dt \left( \int_0^{T_1} (\cos(\theta) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \\ & \int_0^{T_1} \cos(\theta) \sigma_t dW_t^1 \\ & - \frac{1}{\beta \sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \sin(\theta) \sigma_t dt \left( \int_0^{T_1} (\cos(\theta) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \int_0^{T_1} \cos(\theta) \sigma_t dW_t^1 \\ & + \frac{W_{T_1}^2}{\beta \sigma_0 T_1 \cos(\theta)} \end{aligned}$$

**Proof.** Il s'agit de montrer :

$$E(\pi'_a(\vartheta)^2) \leq E(\pi'(\vartheta)^2)$$



et il suffit de montrer :

$$E_{\omega^2} (\pi'_a (\vartheta)^2) \leq E_{\omega^2} (\pi' (\vartheta)^2)$$

en conditionnant par rapport à  $\sigma(W^2)$ .

On écrit :

$$\pi' (\vartheta) = I + J$$

en posant :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s \cos(\theta) dW_s^1 \right) (\cos(\theta) \sigma_t)^{-1} dW_t^1 \\ J &= \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s \sin(\theta) dW_s^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) (\cos(\theta) \sigma_t)^{-1} dW_t^1 \\ &\quad - \frac{1}{\beta \sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \tan(\theta) dW_t^1 + \frac{1}{\beta \sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \cos(\theta)^{-1} dW_t^2 \end{aligned}$$

Conditionnellement à  $\sigma(W^2)$ , I et J sont non corrélés et de plus I est centré.

On a donc :

$$E_{\omega^2} (\pi' (\vartheta)^2) = E_{\omega^2} (I^2) + E_{\omega^2} (J^2)$$

On utilise ensuite :

$$E_{\omega^2} [J^2 | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})] \geq E_{\omega^2}^2 [J | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})]$$

et l'on calcule la dernière espérance suivant la même technique que celle utilisée dans la section précédente pour l'amélioration des poids. ■



# Chapitre 6

## Tests dans le Cas Hull-White

On valide l'étude théorique en considérant que le sous-jacent et la volatilité sont instantanément non corrélés. On dispose dans ce cas d'approximations simples et satisfaisantes.

Le modèle est donc le suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t^1$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dt + \beta dW_t^2$$

$$S_0 = x$$

$$\sigma_0 = v$$

### 6.1 Expressions des Poids

Dans le cas de non corrélation ( $\theta_t = 0$ ), on donne l'expression des poids Malliavin pour un pay-off du type

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

**Proposition 21** *Les poids Malliavin ont pour expressions :*

$$\pi(\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t}$$

$$\begin{aligned}
\pi(\gamma) &= \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(xT_1\sigma_t)^2} \\
\pi(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(T_i - T_{i-1})} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} \\
&\quad - \frac{n}{\sigma_0} \\
\pi'(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s dW_s^1 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \sigma_t^{-1} dW_t^1 \\
&\quad + \frac{W_{T_1}^2}{\sigma_0 T_1 \beta}
\end{aligned}$$

**Proposition 22** *On améliore les poids Malliavin en adoptant les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}
\pi_a(\delta) &= \int_0^{T_1} \sigma_t dW_t^1 \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \\
\pi_a(\gamma) &= \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \left( x^2 \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \\
\pi_a(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 \\
&\quad - \frac{n}{\sigma_0} \\
\pi'_a(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right) \sigma_t^{-1} dW_t^1 \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_0 T_1} \int_0^{T_1} \left( \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) dt \left( \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \int_0^{T_1} \sigma_t dW_t^1 \\
&\quad + \frac{W_{T_1}^2}{\beta \sigma_0 T_1}
\end{aligned}$$

## 6.2 Localisation

D'après l'étude menée dans le cadre de Black-Scholes, la méthode de Malliavin n'est utilisable que pour un pay-off localisé.

La localisation s'effectue exactement selon le principe exposé dans cette étude. Les poids Malliavin étant déterminés pour la composante localisée, seule la composante régulière doit faire l'objet d'une étude particulière.

Le calcul de Grecques pour la composante régulière donne :

### Proposition 23

$$\begin{aligned}\delta_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \right) \\ \gamma_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i,j=1}^n \partial_{i,j}^2 \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} Y_{T_j} \right) \\ \vartheta_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg}(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Z_{T_i} \right)\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}Y_t &= \frac{dS_t}{dx} = \frac{S_t}{x} \\ Z_t &= \frac{dS_t}{d\sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s dW_s^1 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) S_t\end{aligned}$$

Les calculs de réduction de poids ne tiennent pas compte de la localisation du pay-off. Il faudrait théoriquement faire une réduction de variance des poids pour chaque localisation particulière.

## 6.3 Solutions Approchées

On dispose d'approximations du prix d'une option dans le modèle de Hull et White (voir [5]).

Si l'on se limite au cas où le sous-jacent et la volatilité sont instantanément décorrélés, on peut alors écrire le prix sous la forme :

$$u_{HW}(x, \sigma_0, T) \simeq u_{BS}(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{BS}}{\partial (\sigma^2)^2} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} var(V) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{BS}}{\partial (\sigma^2)^3} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} skew(V)$$

avec

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

$$\bar{V} = E(V)$$

$$skew(V) = E\left((V - \bar{V})^3\right)$$

$u_{BS}(\sigma^2)$  désigne le prix Black-Scholes de l'option pour une volatilité  $\sigma$  (le prix initial  $x$  et la maturité  $T$  étant fixés).

En dérivant le prix approché, on obtient alors également une approximation des Grecques.

L'expression de la solution approchée du prix est donnée en annexe dans le cas d'un Call et d'une Digitale.

Dans ces deux cas, il est aisé de calculer les dérivées premières de cette solution par rapport au prix initial  $x$ . On dispose donc d'une approximation du Delta et du Gamma en prenant les dérivées exactes de la solution en série.

La dérivée par rapport à la volatilité initiale  $\sigma_0$  étant un peu plus lourde à effectuer, on se contente d'une différence finie pour approcher le Vega.

On obtient donc les formules d'approximation suivantes :

$$\delta_{HW}(x, \sigma_0, T) \simeq u_{BS}(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_{BS}}{\partial (\sigma^2)^2} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} var(V) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \delta_{BS}}{\partial (\sigma^2)^3} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} skew(V)$$

$$\gamma_{HW}(x, \sigma_0, T) \simeq u_{BS}(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{BS}}{\partial (\sigma^2)^2} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} var(V) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \gamma_{BS}}{\partial (\sigma^2)^3} \Big|_{\sigma^2=\bar{V}} skew(V)$$

$$\vartheta_{HW}(x, \sigma_0, T) \simeq \frac{u_{HW}(x, \sigma_0 + \delta\sigma_0, T) - u_{HW}(x, \sigma_0 - \delta\sigma_0, T)}{2\delta\sigma_0}$$

## 6.4 Etude Empirique des Poids

L'objectif de cette première série de simulations relative au modèle de Hull-White est de comparer les poids réduits avec les poids naïfs.

L'EDS est résolue suivant le schéma d'Euler. Le nombre de pas est fixé à 1024.

Le Brownien bidimensionnel est généré par pont Brownien avec seize points de Sobol pour chaque composante Brownienne.

Le nombre de trajectoires est fixé à  $N = 10000$ .

On se donne les paramètres suivants :

$r = 0.1$  ;  $x = 100$  ;  $\sigma_0 = 0, 2$  ;  $\alpha = 0, 1$  ;  $T_i = \frac{i}{n}$  ,  $1 \leq i \leq n$  ;

et l'on fait varier  $\beta$  ainsi que le nombre  $n$  de constatations.

### 6.4.1 Cas d'une Volatilité Faiblement Stochastique

$$n = 1; \beta = 0, 1$$

	variance	moyenne		variance	moyenne
$\pi(\delta)$	$2,296 \cdot 10^{-3}$	$4,14 \cdot 10^{-4}$	$\pi_a(\delta)$	$2,272 \cdot 10^{-3}$	$-3,77 \cdot 10^{-4}$
$\pi(\gamma)$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$-7 \cdot 10^{-6}$	$\pi_a(\gamma)$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-6}$
$\pi(\vartheta)$	$5,062 \cdot 10^1$	$-2,104 \cdot 10^{-2}$	$\pi_a(\vartheta)$	$5,051 \cdot 10^1$	$-3,198 \cdot 10^{-3}$
$\pi'(\vartheta)$	$2,507 \cdot 10^3$	$-2,609 \cdot 10^{-2}$	$\pi'_a(\vartheta)$	$2,507 \cdot 10^3$	$-2,201 \cdot 10^{-2}$

$$n = 20; \beta = 0.1$$

	variance	moyenne		variance	moyenne
$\pi(\delta)$	$4,937 \cdot 10^{-2}$	$-1,671 \cdot 10^{-3}$	$\pi_a(\delta)$	$4,866 \cdot 10^{-2}$	$-1,258 \cdot 10^{-3}$
$\pi(\gamma)$	$4,906 \cdot 10^{-3}$	$-1,97 \cdot 10^{-4}$	$\pi_a(\gamma)$	$4,814 \cdot 10^{-3}$	$-1,288 \cdot 10^{-3}$
$\pi(\vartheta)$	$9,592 \cdot 10^2$	$-2,149 \cdot 10^{-1}$	$\pi_a(\vartheta)$	$9,666 \cdot 10^2$	$1,735 \cdot 10^{-1}$
$\pi'(\vartheta)$	$1,358 \cdot 10^2$	$7,147 \cdot 10^{-2}$	$\pi'_a(\vartheta)$	$1,358 \cdot 10^2$	$7,078 \cdot 10^{-2}$

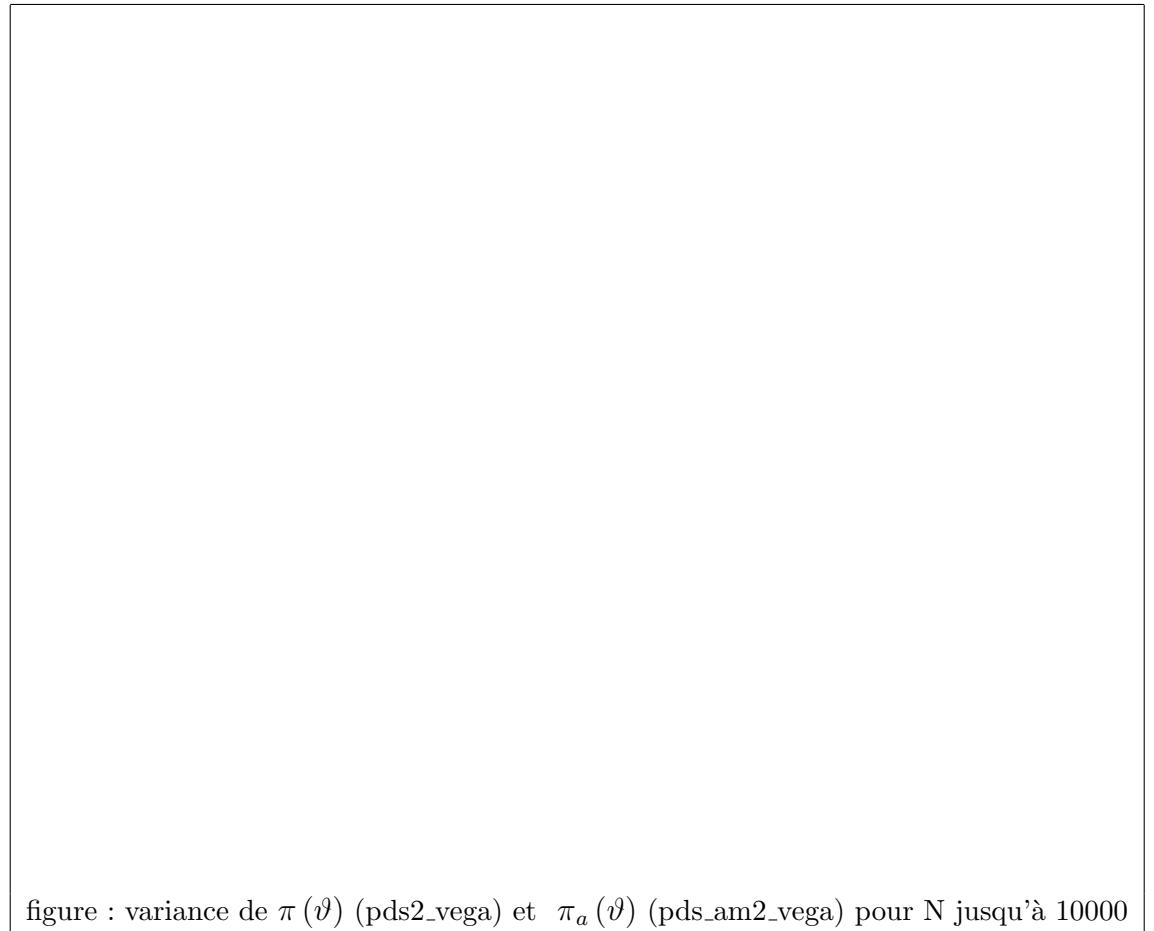
#### Commentaires :

Pour  $\beta = 0, 1$ , les poids améliorés n'apportent pas une réduction de variance importante.

$\pi'_a(\vartheta)$  a une variance plus faible que  $\pi_a(\vartheta)$  pour  $p = 20$ .

La volatilité étant faiblement stochastique, les poids non primés (réduits ou non) sont alors proches des poids Black-Scholes.

On note que la variance estimée de  $\pi_a(\vartheta)$  est supérieure à celle de  $\pi(\vartheta)$  dans le cas  $p = 20$ . Ceci est cependant dû à l'instabilité du résultat des tirages ainsi que le montre la figure suivante :



On peut cependant se contenter des valeurs approximatives des variances.

### 6.4.2 Cas d'une Volatilité Fortement Stochastique

$$n = 1; \beta = 2$$

	variance	moyenne		variance	moyenne
$\pi(\delta)$	$1.136 \cdot 10^1$	$1.507 \cdot 10^{-2}$	$\pi_a(\delta)$	$1.151 \cdot 10^{-2}$	$-2.109 \cdot 10^{-2}$
$\pi(\gamma)$	$3.751 \cdot 10^5$	-6.483	$\pi_a(\gamma)$	$6.94 \cdot 10^{-4}$	$8.91 \cdot 10^{-4}$
$\pi(\vartheta)$	$1.940 \cdot 10^4$	$-4.347 \cdot 10^{-1}$	$\pi_a(\vartheta)$	$6.074 \cdot 10^1$	$2.296 \cdot 10^{-1}$
$\pi'(\vartheta)$	$1.767 \cdot 10^4$	1.874	$\pi'_a(\vartheta)$	$1.685 \cdot 10^4$	$7.911 \cdot 10^{-1}$

$$n = 20; \beta = 2$$



	variance	moyenne		variance	moyenne
$\pi(\delta)$	$6.724 \cdot 10^{-2}$	$-4.598 \cdot 10^{-3}$	$\pi_a(\delta)$	$5.638 \cdot 10^{-2}$	$-3.733 \cdot 10^{-3}$
$\pi(\gamma)$	$1.317 \cdot 10^{-2}$	$-1.59 \cdot 10^{-4}$	$\pi_a(\gamma)$	$7.924 \cdot 10^{-3}$	$-1.601 \cdot 10^{-3}$
$\pi(\vartheta)$	$1.068 \cdot 10^3$	$-6.604 \cdot 10^{-1}$	$\pi_a(\vartheta)$	$9.996 \cdot 10^2$	$-2.434 \cdot 10^{-1}$
$\pi'(\vartheta)$	$1.404 \cdot 10^2$	$-8.921 \cdot 10^{-2}$	$\pi'_a(\vartheta)$	$1.404 \cdot 10^2$	$-9.05 \cdot 10^{-2}$

### Commentaires :

Le cas des poids non primés peut être examiné en premier.

Dans le cas d'une seule constatation, une volatilité fortement stochastique a pour effet d'augmenter considérablement la variance des poids non réduits. Les poids améliorés non primés sont en revanche nettement moins sensibles au comportement de la volatilité.

Pour un nombre suffisant de constatations, il y a baisse de la variance des poids non réduits alors que celle des poids réduits augmente.

En ce qui concerne  $\pi'(\vartheta)$  et  $\pi'_a(\vartheta)$ , d'une part leurs variances sont très proches : la réduction a ainsi peu d'intérêt dans ce cas comme dans celui d'une volatilité faiblement stochastique.

D'autre part, avec un nombre suffisant de constatations,  $\pi'_a(\vartheta)$  (ou  $\pi'(\vartheta)$ ) est plus avantageux que  $\pi_a(\vartheta)$ .

## 6.4.3 Conclusion de l'Etude

les résultats précédents permettent d'affirmer que :

1/ $\pi_a(\delta)$  et  $\pi_a(\gamma)$  ont un bon comportement.

2/Le cas du Vega est problématique. On choisit  $\pi_a(\vartheta)$  pour un nombre très réduit de constatations : sinon on choisit  $\pi'_a(\vartheta)$ .

## 6.5 Tests pour les Grecques

On valide le calcul de Malliavin dans le cadre de Hull et White.

Les paramètres fixes sont les suivants :

–  $r = 0,1$  ;  $\sigma_0 = 0,2$  ;

–  $x = 100$  ;

–  $T_i = \frac{i}{n}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Pour le calcul des Grecques par différences finies sur le prix Monte-Carlo, on utilise les pas  $dx = 0,01$  ;  $d\sigma_0 = 0,001$ .

Pour le calcul du Vega par différence finie sur le prix approché par la solution en série, on utilise le pas  $\delta\sigma_0 = 0,00001$ .

La résolution de l'EDS et la simulation du Brownien se font suivant ce qui a été dit lors de l'étude empirique des poids.

On a augmenté le pas en  $x$  servant au calcul Monte-Carlo par différences finies. On diminue ainsi la variance des estimateurs. pour rendre plus intéressante la comparaison avec la méthode de Malliavin.

Les options testées sont les mêmes que dans le cas Black-Scholes.

### 6.5.1 Validation dans le Cas d'une Volatilité Faiblement Stochastique

Le modèle est proche du modèle de Black-Scholes standard avec le choix :  $\alpha = 0.01$  ;  $\beta = 0.01$  ;

Le nombre de trajectoires est  $N = 10000$ .

#### Call

$K = 100$ .

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
Prix	13,303	-	13,282	-
Delta	$7,251 \cdot 10^{-1}$	$7,242 \cdot 10^{-1}$	$7,217 \cdot 10^{-1}$	$7,247 \cdot 10^{-1}$
Gamma	$1,660 \cdot 10^{-2}$	$2,225 \cdot 10^{-1}$	$1,621 \cdot 10^{-1}$	$1,660 \cdot 10^{-1}$
Vega	$3,353 \cdot 10^1$	$3,344 \cdot 10^{-1}$	$3,270 \cdot 10^1$	$3,339 \cdot 10^{-1}$
Vega'	-	-	$2,382 \cdot 10^1$	$3,537 \cdot 10^{-1}$

#### Digitale

$H = 100$ .

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
Prix	$5,921 \cdot 10^{-1}$	-	$5,915 \cdot 10^{-1}$	-
Delta	$1,660 \cdot 10^{-2}$	$1,810 \cdot 10^{-2}$	$1,656 \cdot 10^{-2}$	$1,661 \cdot 10^{-2}$
Gamma	$-4,939 \cdot 10^{-4}$	1,810	$-4,973 \cdot 10^{-4}$	$-4,930 \cdot 10^{-4}$
Vega	$-9,975 \cdot 10^{-1}$	$-9,953 \cdot 10^{-1}$	-1,005	$-9,965 \cdot 10^{-1}$
Vega'	-	-	$-8,435 \cdot 10^{-1}$	$-9.997 \cdot 10^{-1}$

Dans les deux cas, la méthode de Malliavin localisée donne des résultats très voisins des valeurs approchées du Delta et du Gamma.

Pour le Vega, cette méthode n'améliore pas les résultats obtenus par différences finies.

On note, ainsi qu'on peut facilement le prévoir) que l'utilisation du poids vega' Malliavin (méthode générale) dégrade la qualité de l'estimation (ce qui se voit dans la méthode de Malliavin globale).

Les autres poids sont satisfaisants car ils sont proches des poids Black-Scholes optimaux (dans le cadre Black-Scholes standard).

### Corridor

$$H_1 = 100; H_2 = 110; n = 20.$$

On fait les tests en considérant qu'il s'agit d'une option path-dependent (et non une somme de digitales).

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 10$ )
Prix	5,191	-	5,200	-
Delta	$1,512 \cdot 10^{-1}$	$2,534 \cdot 10^{-1}$	$1,484 \cdot 10^{-1}$	$1,534 \cdot 10^{-1}$
Gamma	$-3,856 \cdot 10^{-2}$	-9,048	$-3,876 \cdot 10^{-2}$	$-3,834 \cdot 10^{-2}$
Vega	$-2,175 \cdot 10^1$	$-2,298 \cdot 10^1$	$-2,095 \cdot 10^1$	$-2,130 \cdot 10^1$
Vega'	-	-	$1,194 \cdot 10^1$	$-2,298 \cdot 10^1$

L'augmentation du nombre d'observations n'améliore pas l'estimateur du vega par la méthode de Malliavin générale (Vega').

### 6.5.2 Cas intermédiaire

On accentue le caractère aléatoire de la volatilité en restant dans les limites de validité des formules approchées.

$$\alpha = 0,01; \beta = 0.25;$$

### Digitale

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
Prix	$5,930 \cdot 10^{-1}$	$5,861 \cdot 10^{-1}$		
Delta	$1,665 \cdot 10^{-2}$	$9,048 \cdot 10^{-3}$	$1,656 \cdot 10^{-2}$	$1,680 \cdot 10^{-2}$
Gamma	$-5,124 \cdot 10^{-4}$	0,000	$-5,524 \cdot 10^{-4}$	$-5,262 \cdot 10^{-4}$
Vega	-1,001	$-9,953 \cdot 10^{-1}$	-1,041	-1,020
Vega'			$-1,203 \cdot 10^1$	-7,211

(temps de calcul : 40,6 s)

La méthode de malliavin donne encore des résultats en concordance avec les formules approchées.

### Corridor

Nombre de constatations  $n = 20$

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 10$ )
Prix	5,217	5,238		
Delta	$1,540 \cdot 10^{-1}$	$2,081 \cdot 10^{-1}$	$1,538 \cdot 10^{-1}$	$1,650 \cdot 10^{-1}$
Gamma	$-3,952 \cdot 10^{-2}$	1,810	$-4,524 \cdot 10^{-2}$	$-3,983 \cdot 10^{-2}$
Vega	$-2,179 \cdot 10^1$	$-2,176 \cdot 10^1$	$-2,149 \cdot 10^1$	$-2,220 \cdot 10^1$
Vega'			$1,125 \cdot 10^1$	$-1,479 \cdot 10^1$

(temps de calcul : 39,99 s)

L'apport de la méthode de Malliavin localisée pour le Delta et le Gamma peut se voir sur les courbes suivantes.

On constate l'apport de la méthode de Malliavin pour la détermination du Delta et du Gamma. Pour le vega, cet apport est également notable dans le cas d'une seule digitale. Pour un corridor, il faudrait diminuer le paramètre de localisation pour améliorer l'estimateur.

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 2$ )
Vega	-2,179 $10^1$	-2,366 $10^1$	-2,228 $10^1$	-2,165 $10^1$
Vega'			-1,193 $10^1$	-2,088 $10^1$
Vega reg				-2,166 $10^1$
Vega loc				1,029 $10^{-2}$
Vega' loc				7,718 $10^{-1}$

Les trois dernières lignes font apparaître la composante régulière et localisée pour la méthode de Malliavin localisée avec les deux types de poids.

On remarque que la composante régulière représente la quasi-totalité de l'estimation par Malliavin localisé.

### 6.5.3 Cas d'une Volatilité Fortement Stochastique

$$\alpha = 0,01; \beta = 1;$$

#### Digitale

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 55$ )
Prix	-8,102 $10^1$	5,913 $10^{-1}$		
Delta	-5,037	4,524 $10^{-3}$	1,304 $10^{-2}$	1,742 $10^{-2}$
Gamma	7,655 $10^{-1}$	9,048 $10^{-1}$	-1,250 $10^{-3}$	-1,122 $10^{-3}$
Vega	2,107 $10^2$	-1,176	-1,154	-1,130
Vega'			-4,415 $10^1$	-2,514 $10^1$

On se trouve hors du domaine de validité des formules approchées.

Les estimateurs Malliavin montrent que la valeur du Gamma est très éloignée du cas Black-Scholes standard.

**Corridor**

Le nombre de constatations est  $n = 20$ .

	Approchée	DF	Mal	Mal loc ( $\varepsilon = 10$ )
Prix	$-1,904 \cdot 10^3$	5,558		
Delta	$-1,471 \cdot 10^2$	$3,212 \cdot 10^{-1}$	$1,349 \cdot 10^{-1}$	$2,019 \cdot 10^{-1}$
Gamma	$4,481 \cdot 10^1$	$9,048 \cdot 10^{-1}$	$-5,305 \cdot 10^{-2}$	$-5,004 \cdot 10^{-2}$
Vega	$4,618 \cdot 10^3$	$-2,393 \cdot 10^1$	$-2,359 \cdot 10^1$	$-2,309 \cdot 10^1$
Vega'			$-7,912 \cdot 10^1$	$-2,595 \cdot 10^1$

# Chapitre 7

## Conclusion

Cette étude avait pour objet d'appliquer les techniques de Malliavin au calcul des Grecques par la méthode de Monte-Carlo.

Ceci a été fait dans le cadre du modèle de Black-Scholes et dans celui d'un modèle à volatilité stochastique.

L'apport des techniques se dégage dans le cas d'options dont le pay-off manque de régularité. En effet, dans ce cas, la méthode des différences finies n'est pas toujours adaptée au calcul de Monte-Carlo alors que la méthode des poids permet de s'affranchir de ce problème de régularité.

Pour que les techniques de Malliavin soient réellement efficaces, il faut cependant les compléter par une réduction de variance.

Si l'on isole les irrégularités du pay-off en une composante localisée, on peut n'appliquer la méthode des poids qu'à cette composante. Pour la composante régulière, la dérivation sous l'espérance est alors licite. D'une part les poids localisés ont une variance plus faible, d'autre part la méthode de dérivation de la trajectoire permet également une variance réduite si le pay-off est assez régulier.

Cette technique de localisation a fait l'objet d'une étude détaillée dans le cas Black-Scholes.

En dehors du modèle de Black-Scholes, une réduction supplémentaire des poids est cependant possible car les poids Malliavin ne sont pas optimaux.

Dans le cas du modèle à volatilité stochastique, on améliore ainsi les poids de façon notable grâce à des techniques simples de projection.

Les poids optimaux ne sont pas obtenus mais la réduction de poids se révèle efficace en complément de la localisation. Elle devient nécessaire si la volatilité est fortement stochastique.

Les tests ont ainsi validé les techniques de Malliavin complétées par la localisation et la réduction de poids dans un cas de volatilité stochastique.

L'étude a été cependant facilitée en supposant que le rendement était

déterministe (et même constant). Un objectif prochain est donc d'envisager un modèle à taux stochastique.



# Chapitre 8

## Annexe 1 : Poids dans le Cas Black-Scholes

On applique les techniques décrites dans Fournier et al au cas d'une option de pay-off

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

Le sous-jacent  $S_t$  est donné par :

$$S_t = x e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

où  $(W_t, 0 \leq t \leq T)$  est un mouvement Brownien unidimensionnel.

On calcule alors immédiatement le processus tangent :

$$Y_t = \frac{dS_t}{dx} = \frac{S_t}{x}$$

D'autre part, la dérivée de Malliavin s'obtient par la "chain rule" :

$$D_s S_t = \sigma S_t 1_{\{s \leq t\}}$$

On retrouve alors la relation fondamentale :

$$D_s S_t = x \sigma Y_t 1_{\{s \leq t\}}$$

On va prouver :

1. Les poids Malliavin peuvent être définis par :

$$\pi(\delta) = \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x}\pi(\delta) - \frac{1}{x^2\sigma^2 T_1}$$

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(W_{T_i} - W_{T_{i-1}})^2}{T_i - T_{i-1}} - \sigma W_{T_n} - n \right]$$

1. Les expressions précédentes sont celles des poids minimaux pour la classe de Pay-off considérée.

**Proof.** On suit la méthode exposée dans l'article de Fournier et all, ou le calcul explicite est effectué pour  $n=1$ .

1. **preuve de 2.** : Si  $\pi$  est un poids admissible, le poids minimal s'obtient par

$$\pi_0 = E(\pi | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}))$$

On obtient en effet, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\pi_0^2 \leq E(\pi^2 | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}))$$

d'où :

$$E(\pi_0^2) \leq E(\pi^2)$$

Pour conclure, on remarque que les poids trouvés sont  $\sigma(W_{T_1}, \dots, W_{T_n})$ -mesurables et que :

$$\sigma(W_{T_1}, \dots, W_{T_n}) = \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

**preuve de 1.** :

**a/cas du Delta**

On suppose que  $\Phi$  est suffisamment régulière (dérivable, à dérivée bornée) ce qui autorise la dérivation sous l'espérance :

$$\delta = e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \right)$$

D'autre part, la relation fondamentale permet d'écrire :

$$Y_{T_i} = \int_0^{T_1} \frac{D_s S_{T_i}}{x\sigma T_1} ds = \int_0^T \frac{D_s S_{T_i}}{x\sigma T_1} 1_{\{s \leq T_1\}} ds$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\delta &= e^{-rT} E \left( \int_0^T D_s \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{1}{x\sigma T_1} 1_{\{s \leq T_1\}} ds \right) \\ &= e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \delta \left( \frac{1_{[0, T_1]}}{x\sigma T_1} \right) \right) \\ &= e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right)\end{aligned}$$

On en déduit l'expression du poids dans le cas d'un Pay-off régulier. Le cas général s'obtient par un raisonnement utilisant la densité et la convergence dominée.

#### b/cas du Gamma

On part de l'expression du Delta :

$$\delta = e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right)$$

En supposant que  $\Phi$  est suffisamment régulière pour la dérivation sous l'espérance, on écrit :

$$\begin{aligned}\gamma &= -e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{W_{T_1}}{x^2\sigma T_1} \right) \\ &\quad + e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right)\end{aligned}$$

En reprenant le raisonnement fait pour le Delta, on obtient pour le deuxième terme du second membre :

$$\begin{aligned}E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right) &= E \left( \int_0^T D_s \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{1_{\{s \leq T_1\}}}{x\sigma T_1} \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} ds \right) \\ &= E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \delta \left( \frac{1_{\{s \leq T_1\}}}{x\sigma T_1} \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right) \right)\end{aligned}$$

On doit calculer l'intégrale de Skohorod :

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{1_{\{s \leq T_1\}}}{x\sigma T_1} \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right) &= \delta \left( \frac{1_{\{s \leq T_1\}}}{x\sigma T_1} \right) \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} - \int_0^T \frac{1_{\{s \leq T_1\}}}{x\sigma T_1} D_s \left( \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right) ds \\ &= \left( \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1} \right)^2 - \frac{1}{x^2\sigma^2 T_1}\end{aligned}$$

Par regroupement des termes et par généralisation, on en déduit le poids du Gamma.

### c/cas du Vega

On considère le processus dérivé

$$Z_t = \frac{dS_t}{d\sigma}$$

et l'on établit :

$$Z_t = \sigma S_t = x (W_t - \sigma t) Y_t$$

On en déduit pour le processus  $\beta_t$  défini par :

$$\beta_t = Z_t Y_t^{-1}$$

$$\beta_t = x (W_t - \sigma t)$$

On introduit le processus

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_t &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} (\beta_{T_i} - \beta_{T_{i-1}}) 1_{]T_{i-1}, T_i]} \\ &= x \sum_{i=1}^n \left( \frac{W_{T_i} - W_{T_{i-1}}}{T_i - T_{i-1}} - \sigma \right) 1_{]T_{i-1}, T_i]} \end{aligned}$$

qui permet d'écrire, grâce à la relation fondamentale :

$$\begin{aligned} Z_{T_i} &= \beta_{T_i} Y_{T_i} \\ &= \left( \int_0^T \tilde{\beta}_s 1_{\{s \leq T_i\}} ds \right) Y_{T_i} \\ &= \frac{1}{x\sigma} \left( \int_0^T \tilde{\beta}_s D_s S_{T_i} ds \right) \end{aligned}$$

On en déduit alors, de la même façon que pour le Delta, avec un Pay-off régulier :

$$\begin{aligned} \gamma &= e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Z_{T_i} \right) \\ &= e^{-rT} E \left( \int_0^T D_s \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{\tilde{\beta}_s}{x\sigma} ds \right) \\ &= e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \delta \left( \frac{\tilde{\beta}}{x\sigma} \right) \right) \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
 \delta \left( \frac{\tilde{\beta}}{x\sigma} \right) &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \delta \left( \left( \frac{W_{T_i} - W_{T_{i-1}}}{T_i - T_{i-1}} - \sigma \right) 1_{]T_{i-1}, T_i]} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{W_{T_i} - W_{T_{i-1}}}{T_i - T_{i-1}} - \sigma \right) \delta (1_{]T_{i-1}, T_i]}) - \int_0^T D_s \left( \frac{W_{T_i} - W_{T_{i-1}}}{T_i - T_{i-1}} - \sigma \right) 1_{]T_{i-1}, T_i]}(s) ds \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{W_{T_i} - W_{T_{i-1}}}{T_i - T_{i-1}} - \sigma \right) (W_{T_i} - W_{T_{i-1}}) - 1 \right]
 \end{aligned}$$

En simplifiant et en relachant la condition de régularité, on en déduit l'expression du poids. ■



# Chapitre 9

## Annexe 2 : Simulations (Cas Black-Scholes)

On implémente Monte-Carlo pour le calcul d'un pay-off ne dépendant que d'un nombre fini d'observations.

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

### Simulation de la Trajectoire

On simule d'abord la valeur du Brownien aux instants considérés :

$$W_{T_i}, 1 \leq i \leq n$$

On peut adapter la méthode du pont Brownien pour améliorer la qualité de la trajectoire, en particulier si l'on veut utiliser des suites de Sobol.

Le prix du sous-jacent s'écrit alors pour cette trajectoire :

$$S_{T_i} = x e^{\sigma W_{T_i} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_i}, 1 \leq i \leq n$$

### Calcul par Différences Finies

La moyenne empirique de  $e^{-rT} \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$  sur un nombre N de trajectoires fournit l'estimateur Monte-Carlo du prix de l'option :

$$u(x, \sigma) = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}))$$

Par différences finies, on calcule les Grecques :

$$\delta \simeq \frac{u(x+h, \sigma) - u(x-h, \sigma)}{2h}$$

$$\gamma \simeq \frac{u(x, \sigma + \varepsilon) - u(x, \sigma - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

$$\vartheta \simeq \frac{u(x + h, \sigma) - 2u(x, \sigma) + u(x - h, \sigma)}{h^2}$$

### Calcul de Malliavin global

On implémente les estimateurs de :

$$\delta = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\delta))$$

$$\gamma = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\gamma))$$

$$\vartheta = e^{-rT} E(\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\vartheta))$$

avec

$$\pi(\delta) = \frac{W_{T_1}}{x\sigma T_1}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x}\pi(\delta) - \frac{1}{x^2\sigma^2 T_1}$$

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(W_{T_i} - W_{T_{i-1}})^2}{T_i - T_{i-1}} - \sigma W_{T_n} - n \right]$$

### Calcul de Malliavin localisé

On décompose le pay-off :

$$\Phi(s_1, \dots, s_n) = G_\varepsilon(s_1, \dots, s_n) + F_\varepsilon(s_1, \dots, s_n)$$

où  $G_\varepsilon$  est la composante régulière définie plus loin , pour un paramètre de localisation  $\varepsilon$ , et  $F_\varepsilon$  est la composante localisée définie par :

$$F_\varepsilon(s_1, \dots, s_n) = \Phi(s_1, \dots, s_n) - G_\varepsilon(s_1, \dots, s_n)$$

On estime alors :

$$\delta = \frac{e^{-rT}}{x} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i G_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} \right) + e^{-rT} E(F_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\delta))$$

$$\gamma = \frac{e^{-rT}}{x^2} E \left( \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 G_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} S_{T_j} \right) + e^{-rT} E(F_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\gamma))$$

$$\vartheta = e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i G_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) S_{T_i} (W_{T_i} - \sigma T_i) \right) + e^{-rT} E(F_\varepsilon(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \pi(\vartheta))$$

Dans le cas d'un Call ou d'une Digitale,  $G_\varepsilon$  est défini de la manière suivante :



**a/ Cas du Call**

Le pay-off est

$$\Phi(s) = (s - K)_+$$

On pose

$$C_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon}{4} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 1_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(s) + s 1_{[\varepsilon, +\infty[}$$

Alors :

$$C'_\varepsilon(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) 1_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(s) + 1_{[\varepsilon, +\infty[}$$

$$C''_\varepsilon(s) = \frac{1}{2\varepsilon} 1_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(s)$$

On définit

$$G_\varepsilon(s) = C_\varepsilon(s - K)$$

**b/Cas de la Digitale**

Le pay-off est

$$\Phi(s) = 1_{\{s \geq K\}}$$

On pose

$$D_\varepsilon(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 1_{]-\varepsilon, 0]}(s) + \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{\varepsilon}\right)^2\right) 1_{]0, \varepsilon[}(s) + 1_{[\varepsilon, +\infty[}$$

Alors :

$$D'_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) 1_{]-\varepsilon, 0]}(s) + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{s}{\varepsilon}\right) 1_{]0, \varepsilon[}(s)$$

$$D''_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^2} 1_{]-\varepsilon, 0]}(s) - \frac{1}{\varepsilon^2} 1_{]0, \varepsilon[}(s)$$

On définit :

$$G_\varepsilon(s) = D_\varepsilon(s - K)$$

**Formules Fermées**

On note :

$$n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$N(s) = \int_{-\infty}^s n(\zeta) d\zeta$$

$$d = \frac{lx\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

**a/Cas du Call**

$$u(x, \sigma) = xN(d + \sigma\sqrt{T}) - e^{-rT}KN(d)$$

$$\delta = N(d + \sigma\sqrt{T})$$

$$\gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}n(d + \sigma\sqrt{T})$$

$$\vartheta = x\sqrt{T}n(d + \sigma\sqrt{T})$$

**b/Cas de la Digitale**

$$u(x, \sigma) = e^{-rT}KN(d)$$

$$\delta = \frac{e^{-rT}}{x\sigma\sqrt{T}}n(d)$$

$$\gamma = -\frac{e^{-rT}}{x^2\sigma^2T}n(d)(d + \sigma\sqrt{T})$$

$$\vartheta = -\frac{e^{-rT}}{\sigma}n(d)(d + \sigma\sqrt{T})$$

rem : on vérifie

$$\delta_{Digitale} = \frac{x}{K}\gamma_{Call}$$

# Chapitre 10

## Annexe 3 : Erreur par Différences Finies

On se limite aux cas du Delta et du Gamma d'une Digitale dans le cas Black-Scholes.

CAS DU DELTA

On approche  $\delta$  par

$$\begin{aligned}\delta(h) &= \frac{u(x+h, \sigma) - u(x-h, \sigma)}{2h} \\ &= \frac{e^{-rT}}{2h} E \left( \Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) - \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) \right)\end{aligned}$$

Pour  $N$  trajectoires simulées, par l'intermédiaire d'une famille de variables normales standard indépendantes  $(\xi_i, 1 \leq i \leq N)$ , la méthode de Monte-Carlo fournit un estimateur de  $\delta(h)$  :

$$\begin{aligned}\delta_N(h) &= \frac{1}{2h} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} \Phi \left( (x+h) e^{\sigma \sqrt{T} \xi_i + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} \Phi \left( (x-h) e^{\sigma \sqrt{T} \xi_i + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e^{-rT}}{2h} \left( \Phi \left( (x+h) e^{\sigma \sqrt{T} \xi_i + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) - \Phi \left( (x-h) e^{\sigma \sqrt{T} \xi_i + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) \right)\end{aligned}$$

$\delta_N(h)$  s'interprète donc comme une moyenne empirique, donc comme l'estimateur de Monte-Carlo habituel de  $\delta(h)$ .

Dans le calcul des erreurs, il faut cependant tenir compte du fait qu'il s'agit également d'un estimateur biaisé de  $\delta$ .

Le biais, dû à la non-linéarité du prix  $u$ , se contrôle en réduisant le pas  $h$ .

L'erreur de la méthode de Monte-Carlo se contrôle en augmentant le nombre  $N$  de trajectoires.

On examine plus précisément l'influence de  $h$  sur cette dernière erreur.

On a :

$$\text{var}(\delta_N(h)) = \frac{e^{-2rT}}{N} \frac{V(h)}{4h^2}$$

avec

$$V(h) = \text{var} \left( \Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \right)$$

### Calcul pour la Digitale

$$\Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) = 1_{\left\{d(x-h) < -\frac{W_T}{\sqrt{T}} \leq d(x+h)\right\}}$$

avec

$$d(x) = \frac{lx\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} V(h) &= (N(d(x+h)) - N(d(x-h))) [1 - (N(d(x+h)) - N(d(x-h)))^2] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2h}{x\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

d'où

$$\text{var}(\delta_N(h)) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2e^{-2rT}}{x\sigma\sqrt{T}Nh} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

### CAS DU GAMMA

On approche  $\gamma$  par

$$\begin{aligned} &\gamma(h) \\ &= \frac{u(x+h, \sigma) - 2u(x, \sigma) + u(x-h, \sigma)}{h^2} \\ &= \frac{e^{-rT}}{h^2} E \left( \Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - 2\Phi \left( x e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) + \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \right) \end{aligned}$$

Les remarques précédentes concernant l'estimateur Monte-Carlo du delta valent pour celui du gamma, noté  $\gamma_N$ .

En particulier, pour le calcul de l'erreur de Monte-Carlo, on pose :

$$\text{var}(\gamma_N(h)) = \frac{e^{-2rT}}{N} \frac{V(h)}{4h^4}$$

avec

$$V(h) = \text{var} \left( \Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - 2\Phi \left( x e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) + \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \right)$$

### Calcul pour la Digitale

On a

$$\Phi \left( (x+h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - 2\Phi \left( x e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) + \Phi \left( (x-h) e^{\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) =$$

$$-1_{\left\{d(x-h) < -\frac{w_T}{\sqrt{T}} \leq d(x)\right\}} + 1_{\left\{d(x) < -\frac{w_T}{\sqrt{T}} \leq d(x+h)\right\}}$$

On calcule

$$V(h) = N(d(x+h)) - N(d(x-h)) - [N(d(x+h)) - 2N(d(x)) + N(d(x-h))]^2$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2h}{x\sigma\sqrt{T}}$$

d'où

$$\text{var}(\gamma_N(h)) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{-2rT}}{2x\sigma\sqrt{T}Nh^3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$



# Chapitre 11

## Annexe 4 : Etude de la Localisation

Dans cette partie, on présente des calculs pratiques permettant de valider l'étude expérimentale de la localisation. On se restreint au cas du Delta d'une Digitale.

On avait conclu que le paramètre de localisation optimal était relativement élevé et que le choix d'un paramètre trop faible augmentait par ailleurs la variance de l'estimateur empirique. On a également montré qu'il est en général intéressant de décomposer l'estimateur en une composante localisée et une composante régulière même si l'on se trouve très loin de l'optimum.

### **Reduction de la variance par la localisation**

On se propose d'établir la formule fermée relative au calcul de l'erreur de l'estimateur Monte Carlo

Le pay-off s'écrit :

$$\Phi(S_T) = 1_{\{S_T \geq H\}}$$

On décompose

$$\Phi(S_T) = F_\varepsilon(S_T) + G_\varepsilon(S_T)$$

en définissant la composante localisée :

$$F_\varepsilon(S_T) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_T - H}{\varepsilon}\right)^2 1_{\{H \geq S_T > H - \varepsilon\}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_T - H}{\varepsilon}\right)^2 1_{\{H + \varepsilon > S_T > H\}}$$

et la composante régulière :

$$G_\varepsilon(S_T) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_T - H}{\varepsilon}\right)^2 1_{\{H \geq S_T > H - \varepsilon\}} + \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_T - H}{\varepsilon}\right)^2\right) 1_{\{H + \varepsilon > S_T > H\}} + 1_{\{S_T \geq H + \varepsilon\}}$$

On a immédiatement :

$$G'_\varepsilon(S_T) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{S_T - H}{\varepsilon} \right) 1_{\{H \geq S_T > H - \varepsilon\}} + \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{S_T - H}{\varepsilon} \right) 1_{\{H + \varepsilon > S_T > H\}}$$

Le Delta vaut alors :

$$\delta = E \left( e^{-rT} F_\varepsilon(S_T) \frac{W_T}{x\sigma T} \right) + E \left( e^{-rT} G'_\varepsilon(S_T) \frac{S_T}{x} \right)$$

Il se calcule comme l'espérance de l'estimateur du Delta par la méthode de Malliavin localisée :

$$\delta_{maloc} = e^{-rT} F_\varepsilon(S_T) \frac{W_T}{x\sigma T} + e^{-rT} G'_\varepsilon(S_T) \frac{S_T}{x}$$

Il s'agit de déterminer la variance de  $\delta_{maloc}$  :

$$var(\delta_{maloc}) = E(\delta_{maloc}^2) - \delta^2$$

On obtient :

$$\delta_{maloc} = \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} X_- - \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} X_+$$

avec

$$X_- = (S_T - (H - \varepsilon)) \left( S_T - (S_T - (H - \varepsilon)) \frac{W_T}{2\sigma T} \right) 1_{\{H \geq S_T > H - \varepsilon\}}$$

$$X_+ = (S_T - (H + \varepsilon)) \left( S_T - (S_T - (H + \varepsilon)) \frac{W_T}{2\sigma T} \right) 1_{\{H + \varepsilon \geq S_T > H\}}$$

Alors

$$\delta_{maloc}^2 = \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} X_-^2 + \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} X_+^2$$

On a :

$$H \geq S_T > H - \varepsilon \Leftrightarrow d_- > u \geq d$$

$$H + \varepsilon \geq S_T > H \Leftrightarrow d \geq u > d_+$$

en posant :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{W_T}{\sqrt{T}} \\ d &= \frac{\ln\left(\frac{x}{H}\right) + R}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_- &= \frac{\ln\left(\frac{x}{H-\varepsilon}\right) + R}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$



$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{x}{H+\varepsilon}\right) + R}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$R = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$$

On a alors, avec ces notations :

$$X_- = (S_T - (H - \varepsilon)) \left( S_T + (S_T - (H - \varepsilon)) \frac{u}{2\sigma\sqrt{T}} \right) 1_{\{d_- > u \geq d\}}$$

$$X_+ = (S_T - (H + \varepsilon)) \left( S_T + (S_T - (H + \varepsilon)) \frac{u}{2\sigma\sqrt{T}} \right) 1_{\{d \geq u > d_+\}}$$

On introduit pour la suite des calculs la variable aléatoire

$$X_{a,b,\alpha,\beta} = (S_T - a) (S_T + b (S_T - a) u) 1_{\{\alpha < u < \beta\}}$$

où  $a, b, \alpha, \beta$ , sont des réels fixés.

On pose également

$$A_{n,p,\alpha,\beta} = E \left( S_T^n u^p 1_{\{\alpha < u < \beta\}} \right)$$

Le développement conduit à :

$$\begin{aligned} E \left( X_{a,b,\alpha,\beta}^2 \right) &= b^2 A_{4,2,\alpha,\beta} + 2b A_{4,1,\alpha,\beta} + A_{4,0,\alpha,\beta} \\ &\quad - 2a \left( 2b^2 A_{3,2,\alpha,\beta} + 3b A_{3,1,\alpha,\beta} + A_{3,0,\alpha,\beta} \right) \\ &\quad + a^2 \left( 6b^2 A_{2,2,\alpha,\beta} + 6b A_{2,1,\alpha,\beta} + A_{2,0,\alpha,\beta} \right) \\ &\quad - 2a^3 \left( 2b^2 A_{1,2,\alpha,\beta} + b A_{1,1,\alpha,\beta} \right) \\ &\quad + a^4 b^2 A_{0,2,\alpha,\beta} \end{aligned}$$

Il reste à calculer  $A_{n,p,\alpha,\beta}$ .

On obtient :

$$A_{n,p,\alpha,\beta} = x^n e^{nR + n^2 \frac{\sigma^2 T}{2}} \sum_{k=0}^p C_n^k \left( n\sigma\sqrt{T} \right)^{p-k} \left( I_k \left( \beta + n\sigma\sqrt{T} \right) - I_k \left( \alpha + n\sigma\sqrt{T} \right) \right)$$

avec

$$I_k(y) = \int_{-\infty}^y s^k n(s) ds$$

où  $n$  est la densité de la loi normale centrée réduite.

Pour les trois premières valeurs, on a :

$$I_0(y) = N(y)$$

$$I_1(y) = -n(y)$$

$$I_2(y) = N(y) - yn(y)$$

ce qui est suffisant pour le calcul de  $E(X_{a,b,\alpha,\beta}^2)$ .

Compte tenu de ce qui précède ainsi que de l'expression exacte de  $\delta$ , la variance de  $\delta_{maloc}$  se calcule alors :

$$\begin{aligned} var(\delta_{maloc}) &= \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} E\left(X_{H-\varepsilon, \frac{1}{2\sigma\sqrt{T}}, d, d_-}^2\right) \\ &\quad + \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} E\left(X_{H+\varepsilon, \frac{1}{2\sigma\sqrt{T}}, d_+, d}^2\right) \\ &\quad - \frac{e^{-2rT}}{x^2\sigma^2 T} n^2(d) \end{aligned}$$

Pour étudier le gain obtenu sur la méthode de Malliavin globale, on rappelle que l'estimateur est donné dans ce dernier cas par :

$$\delta_{maglob} = e^{-rT} \Phi(S_T) \frac{W_T}{x\sigma T}$$

Avec des notations introduites précédemment, on réécrit :

$$\delta_{maglob} = e^{-rT} \frac{-u}{x\sigma T} 1_{\{u < d\}}$$

On obtient alors facilement :

$$var(\delta_{maglob}) = \frac{e^{-2rT}}{x^2\sigma^2 T} (I_2(d) - n^2(d))$$

### Etude de la composante régularisée

L'objectif est de déterminer la variance de  $\delta_{maloc-reg}$  :

$$var(\delta_{maloc-reg}) = E(\delta_{maloc-reg}^2) - E(\delta_{maloc-reg})^2$$

On obtient :

$$\delta_{maloc-reg} = \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} Y_- - \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} Y_+$$

avec

$$Y_- = (S_T - (H - \varepsilon)) S_T 1_{\{H \geq S_T > H - \varepsilon\}} = (S_T - (H - \varepsilon)) S_T 1_{\{d_- > u \geq d\}}$$

$$Y_+ = (S_T - (H + \varepsilon)) S_T 1_{\{H+\varepsilon \geq S_T > H\}} = (S_T - (H - \varepsilon)) S_T 1_{\{d > u \geq d_+\}}$$

D'où :

$$Y_- = X_{(H-\varepsilon),0,d,d_-}$$

$$Y_+ = X_{(H+\varepsilon),0,d_+,d}$$

On calcule :

$$E(X_{a,0,\alpha,\beta}) = A_{2,0,\alpha,\beta} - aA_{1,0,\alpha,\beta}$$

On a aussi, d'après un calcul précédent :

$$E(X_{a,0,\alpha,\beta}^2) = A_{4,0,\alpha,\beta} - 2aA_{3,0,\alpha,\beta} + a^2A_{2,0,\alpha,\beta}$$

On peut donc déterminer :

$$E(\delta_{maloc.reg}) = \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} E(X_{(H-\varepsilon),0,d,d_-}) - \frac{e^{-rT}}{x\varepsilon^2} E(X_{(H+\varepsilon),0,d_+,d})$$

et

$$\begin{aligned} var(\delta_{maloc.reg}) &= \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} E(X_{(H-\varepsilon),0,d,d_-}^2) \\ &\quad + \frac{e^{-2rT}}{x^2\varepsilon^4} E(X_{(H+\varepsilon),0,d_+,d}^2) \\ &\quad - E(\delta_{maloc.reg})^2 \end{aligned}$$



# Chapitre 12

## Annexe 5 : Poids dans le Cas Hull-White

### Poids Malliavin

Le pay-off envisagé est du type

$$\Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n})$$

avec

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$$

Les poids Malliavin ont pour expressions admissibles :

$$\pi(\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{xT_1\sigma_t}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x}\pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(xT_1\sigma_t)^2}$$

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} - n \right\}$$

en introduisant la notion de Vega

$$\vartheta = \frac{dE(e^{-rT}\Phi)}{d\sigma_0}$$

**Proof.** On suit la technique de Fournier et al.

Pour simplifier les notations, et grâce aux justifications précédentes, on effectue le calcul de Malliavin (dérivée de Malliavin et intégrale de Skohorod) par rapport au seul Brownien  $W^1$ , ce qui évite le conditionnement.

**a/ cas du Delta**

Le calcul habituel donne immédiatement :

$$\begin{aligned}\pi(\delta) &= \delta \left( \frac{Y_t}{T_1 \sigma_t S_t} 1_{[0, T_1]} \right) \\ &= \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t}\end{aligned}$$

**b/ cas du Gamma**

On part de l'expression du Delta

$$\delta = e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right)$$

que l'on dérive par rapport à  $x$  en supposant d'abord que  $\Phi$  est dérivable, à dérivée bornée :

$$\begin{aligned}\gamma &= -e^{-rT} E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x^2 T_1 \sigma_t} \right) \\ &\quad + e^{-rT} \sum_{i=1}^n E \left( \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right)\end{aligned}$$

On a, grâce en particulier à la relation fondamentale établie plus haut :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n E \left( \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) Y_{T_i} \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right) &= \sum_{i=1}^n E \left( \partial_i \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \int_0^{T_1} \frac{D_t S_{T_i}}{x T_1 \sigma_t} dt \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right) \\ &= E \left( \int_0^{T_1} D_t \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \frac{1}{x T_1 \sigma_t} \left( \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right) dt \right) \\ &= E \left( \Phi(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}) \delta \left( \frac{1_{[0, T_1]}}{x T_1 \sigma_t} \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t} \right) \right)\end{aligned}$$

On calcule enfin :

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1_{[0,T_1]}}{xT_1\sigma_t} \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{xT_1\sigma_t} \right) &= \delta \left( \frac{1_{[0,T_1]}}{xT_1\sigma_t} \right) \left( \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{xT_1\sigma_t} \right) \\ &\quad - \int_0^T \frac{1_{[0,T_1]}}{xT_1\sigma_t} D_t \left( \int_0^{T_1} \frac{dW_s^1}{xT_1\sigma_s} \right) dt \\ &= \left( \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{xT_1\sigma_t} \right)^2 - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(xT_1\sigma_t)^2} \end{aligned}$$

En regroupant les termes, on obtient l'expression du poids, dans le cas où le Pay-off est régulier. On relâche ensuite cette condition par un raisonnement utilisant la densité des fonctions régulières

**c/cas du Vega**

On établit :

$$\begin{aligned} dZ_t &= rZ_t dt + \left( \frac{\sigma_t}{\sigma_0} S_t + \sigma_t Z_t \right) dW_t^1 \\ dY_t^{-1} &= Y_t^{-1} (-r + \sigma_t^2) dt - Y_t^{-1} \sigma_t dW_t^1 \end{aligned}$$

où  $Z_t$  est le processus dérivé par rapport à  $\sigma_0$ .

On en déduit pour le processus  $\beta_t$  défini par :

$$\begin{aligned} \beta_t &= Z_t Y_t^{-1} \\ \beta_t &= \frac{x}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s dW_s^1 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \end{aligned}$$

On introduit le processus

$$\tilde{\beta}_t = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} (\beta_{T_i} - \beta_{T_{i-1}}) 1_{]T_{i-1}, T_i]}$$

Le poids cherché est l'intégrale de Skohorod du processus

$$(\sigma_t S_t)^{-1} Y_t \tilde{\beta}_t$$

On calcule

$$\delta \left( (\sigma_t S_t)^{-1} Y_t \tilde{\beta}_t \right) = \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \delta \left( \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s dW_s^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s^2 ds \right) \sigma_t^{-1} 1_{]T_{i-1}, T_i]} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s dW_s^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s^2 ds \right) \delta(\sigma_t^{-1} 1_{[T_{i-1}, T_i]}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_0^T D_t \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s dW_s^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s^2 ds \right) \sigma_t^{-1} 1_{[T_{i-1}, T_i]} dt \\
&= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s dW_s^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s^2 ds \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_s^{-1} dW_s^1 \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t \sigma_t^{-1} dt
\end{aligned}$$

d'où l'expression du poids. ■

### Réduction des Poids

On montre le résultat suivant :

On améliore les poids Malliavin en adoptant les expressions :

$$\pi_a(\delta) = \int_0^{T_1} \sigma_t dW_t^1 \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1}$$

$$\pi_a(\gamma) = \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \left( x^2 \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1}$$

$$\pi_a(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} - n \right\}$$

**Proof.**

### a/Cas du Delta

Il s'agit de montrer :

$$\pi_a(\delta) = E(\pi(\delta) | \sigma(W^2, S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E_{\omega^2}(\pi(\delta) | \sigma(S_{T_1}, \dots, S_{T_n}))$$

$E_{\omega^2}$  signifiant que l'on fixe la trajectoire  $\omega^2$  du Brownien  $W^2$ .

De

$$S_t = x e^{-rt} e^{\int_0^t \sigma_s dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$$



on déduit :

$$E_{\omega^2} (\pi (\delta) | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E_{\omega^2} (\pi (\delta) | \sigma (U_1, \dots, U_n))$$

où l'on a posé :

$$U_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1$$

On a :

$$\pi (\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \sigma_t}$$

La trajectoire  $\omega^2$  étant fixée, le vecteur

$$(\pi (\delta), U_1, \dots, U_n)^T$$

est Gaussien, centré, et l'on vérifie :

$$\begin{aligned} E_{\omega^2} (\pi (\delta) U_i) &= \delta_{i1} \frac{1}{x} \\ E_{\omega^2} (U_1^2) &= \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\pi (\delta) = \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} U_1 + Z$$

avec Z centré et indépendant de  $(U_{T_1}, \dots, U_{T_n})$ .

On en déduit :

$$E_{\omega^2} (\pi (\delta) | \sigma (U_1, \dots, U_n)) = \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} U_1 = \pi_a (\delta)$$

### b/Cas du Gamma

On a :

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \sigma_t)^2}$$

d'où :

$$E_{\omega^2} (\pi (\gamma) | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E_{\omega^2} (\pi (\delta)^2 | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) - \frac{1}{x} \pi_a (\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \sigma_t)^2}$$

et il reste à déterminer :

$$E_{\omega^2} (\pi (\delta)^2 | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E_{\omega^2} (\pi (\delta)^2 | \sigma (U_1, \dots, U_n))$$

A cet effet on reprend la régression précédente :

$$\pi (\delta) = k U_1 + Z = \pi_a (\delta) + Z$$

avec

$$k = \left( x \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1}$$

Le développement donne :

$$\begin{aligned} E_{\omega^2} (\pi (\delta)^2 | \sigma (U_1, \dots, U_n)) &= k^2 U_1^2 + E_{\omega^2} (Z^2) \\ &= k^2 U_1^2 + E_{\omega^2} (\pi (\delta)^2) - k^2 E_{\omega^2} (U_1^2) \\ &= k^2 U_1^2 + \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \sigma_t)^2} - k^2 \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \\ &= \pi_a (\delta)^2 + \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \sigma_t)^2} - \left( x^2 \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} \end{aligned}$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$E_{\omega^2} (\pi (\gamma) | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = \pi_a (\gamma)$$

### **b/Cas du Vega**

On part de l'expression :

$$\pi(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} - n \right\}$$

On en déduit :

$$E_{\omega^2} (\pi (\vartheta) | \sigma (U_1, \dots, U_n)) \\ = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t dW_t^1 - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) E_{\omega^2} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} | \sigma (U_1, \dots, U_n) \right) - n \right\}$$

En raisonnant comme pour le cas du Delta, on obtient :

$$E_{\omega^2} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\sigma_t} | \sigma (U_1, \dots, U_n) \right) = (T_i - T_{i-1}) \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right)^{-1} U_i$$

On vérifie bien :

$$E_{\omega^2} (\pi (\vartheta) | \sigma (S_{T_1}, \dots, S_{T_n})) = E_{\omega^2} (\pi (\vartheta) | \sigma (U_1, \dots, U_n)) = \pi_a (\vartheta)$$

■

### Composante Régulière

On a :

$$\begin{aligned} \delta_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg} Y_{T_i} \right) \\ \gamma_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i,j=1}^n \partial_{i,j}^2 \Phi_{reg} Y_{T_i} Y_{T_j} \right) \\ \vartheta_{reg} &= e^{-rT} E \left( \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi_{reg} Z_{T_i} \right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{dS_t}{dx} = \frac{S_t}{x} \\ Z_t &= \frac{dS_t}{d\sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s dW_s^1 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) S_t \end{aligned}$$

sont les processus dérivés déterminés plus haut.

**Proof.** Le seul fait non évident concerne l'expression de  $Z_t$ .

Le processus  $Z_t$  se calcule indirectement dans le calcul du poids du Vega par l'intermédiaire du processus  $\beta_t$ . On peut évidemment le calculer directement par une technique du type "variation de la constante". ■

### Corrélation instantannée

**a/Poids Malliavin**

Les poids Malliavin ont pour expressions :

$$\pi(\delta) = \int_0^{T_1} \frac{dW_t^1}{x T_1 \cos(\theta_t) \sigma_t}$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi(\delta) - \int_0^{T_1} \frac{dt}{(x T_1 \cos(\theta_t) \sigma_t)^2}$$

$$\begin{aligned} \pi(\vartheta) = & \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(T_i - T_{i-1})} \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \\ & \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{dW_t^1}{\cos(\theta_t) \sigma_t} \\ & - \frac{n}{\sigma_0} \end{aligned}$$

**Proof.**

La preuve est similaire au cas sans corrélation, en notant que la diffusion par rapport au Brownien  $W^1$  est  $\cos(\theta_t) \sigma_t$  au lieu de  $\sigma_t$ , ce qui permet immédiatement d'écrire les poids du Delta et du Gamma en opérant le remplacement indiqué.

Pour le Vega, il s'agit en plus de calculer le processus  $\beta_t = Z_t Y_t^{-1}$ .

On cherche les solutions de

$$dZ_t = r Z_t dt + \left( \frac{\sigma_t}{\sigma_0} S_t + \sigma_t Z_t \right) (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2)$$

sous la forme  $A_t S_t$ .

On calcule sans difficulté

$$Z_t = \frac{1}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s (\cos(\theta_s) dW_s^1 + \sin(\theta_s) dW_s^2) - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) S_t$$

On en déduit :

$$\beta_t = \frac{x}{\sigma_0} \left( \int_0^t \sigma_s (\cos(\theta_s) dW_s^1 + \sin(\theta_s) dW_s^2) - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)$$

ce qui permet d'obtenir le poids voulu. ■

### b/Poids Réduits

On améliore les poids Malliavin en adoptant les expressions :

$$\pi_a(\delta) = \int_0^{T_1} \cos(\theta_t) \sigma_t dW_t^1 \left( x \int_0^{T_1} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1}$$

$$\pi_a(\gamma) = \pi_a(\delta)^2 - \frac{1}{x} \pi_a(\delta) - \left( x^2 \int_0^{T_1} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \pi_a(\vartheta) = & \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_t^2 dt \right) \left( \int_{T_{i-1}}^{T_i} (\cos(\theta_t) \sigma_t)^2 dt \right)^{-1} \\ & \int_{T_{i-1}}^{T_i} \cos(\theta_t) \sigma_t dW_t^1 \\ & - \frac{n}{\sigma_0} \end{aligned}$$

**Proof.** La preuve est similaire au cas sans corrélation, en faisant le remplacement indiqué plus haut. ■



# Références





# Bibliographie

- [1] D. Lamberon, B. Lapeyre, *Méthodes de Monte-Carlo pour les Equations de Transport et de Diffusion*, (Springer-Verlag, 1998)
- [2] N. Bouleau, D. Talay, *Probabilités Numériques*, (INRIA, Collection Didactique, 1992)
- [3] E.Fournier, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.L. Lions, N. Touzi, *An Application of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance*, (CEREMADE, N°9726,15-09-97).
- [4] E.Fournier, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.L. Lions, N. Touzi, *An Application of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance II*, (January 1998).
- [5] B. Oksendal, *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, (May 1997) [59](#)
- [6] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, (Springer-Verlag, 1995)
- [7] J. Hull, A. White, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, (Risk Publications, April 1996), p. 19