Chapitre 6
Modèles de taux d'intérêt

Les modèles de taux d'intérêt sont utilisés principalement pour "pricer" et couvrir des obligations et des options sur obligations. Jusqu'à présent, aucun modèle n'a pu s'imposer comme modèle de référence au même titre que le modèle de Black-Scholes pour les options sur actions. Dans ce chapitre, nous tentons de présenter les principes de base de la modélisation (en suivant essentiellement [AD89]) puis, nous illustrons la théorie par l'étude de trois modèles particuliers.

1 Principes de la modélisation

1.1 Notion de courbe des taux

Dans la plupart des modèles que nous avons introduits jusqu'à présent, le taux d'intérêt est supposé constant. Dans la réalité, on observe que le taux d'intérêt d'un prêt dépend à la fois de la date t d'émission du prêt et de la date T d'échéance ou de "maturité" du prêt.

Une personne empruntant 1 franc à l'instant t, jusqu'à l'échéance T, devra rembourser une somme $F(t,T)$ à la date T, ce qui équivaut à un taux d'intérêt moyen $R(t,T)$ donné par l'égalité

$$F(t,T)) = e^{(T-t)R(t,T)}.$$

Si on se place en environnement certain, c'est à dire si on suppose que tous les taux d'intérêt $(R(t,T))_{t\leq T}$ sont connus, alors, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la fonction F doit vérifier :

$$\forall t < u < s \quad F(t,s) = F(t,u)F(u,s).$$

Il est facile en effet d'exhiber des arbitrages possibles lorsque cette égalité n'est pas vérifiée (exercice !). Cette relation, jointe à l'égalité $F(t,t) = 1$, entraîne, si F est régulière, l'existence d'une fonction $r(t)$ telle que :

$$\forall t < T \quad F(t,T) = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)$$

et, par conséquent :

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds.$$

La fonction $r(s)$ s'interprète comme le taux d'intérêt instantané.

En environnement incertain, ce raisonnement n'est plus possible. A la date t, les taux d'intérêt futurs $R(u,T)$ pour $T > u > t$, ne sont pas connus. Néanmoins, on conçoit qu'il y ait des liaisons entre les différents taux, le but de la modélisation étant de les préciser.

Le problème se pose concrètement en terme de pricing des obligations. Nous appellerons "obligation zéro-coupon" un titre donnant droit à 1 franc à une date d'échéance T et nous noterons $P(t,T)$ la valeur de ce titre à l'instant t. On a évidemment $P(T,T) = 1$ et, en environnement certain :

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}. \tag{6.1}$$

1.2 Courbe des taux en avenir incertain

En avenir incertain, il faut penser le taux instantané comme un processus aléatoire : entre les instants t et $t + dt$, on peut emprunter au taux $r(t)$ (dans la pratique c'est un taux à court terme, par exemple le taux au jour le jour). Pour préciser la modélisation, nous nous placerons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T})$ et nous supposerons que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Comme dans les modèles étudiés précédemment, nous introduisons un actif dit "sans risque", dont le prix à l'instant t est donné par :

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r(s)ds}$$

où $(r(t))_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté vérifiant : $\int_0^T |r(t)|dt < \infty$, presque sûrement. L'appellation d'actif sans risque peut sembler étrange pour un actif dont le prix dépend du hasard ; nous verrons plus loin en quoi cet actif est moins "risqué" que les autres. Les actifs risqués sont ici les obligations zéro-coupon d'échéance inférieure ou égale à l'horizon T. Pour chaque instant $u \leq T$, nous introduisons donc un processus adapté $(P(t,u))_{0\leq t\leq u}$, vérifiant $P(u,u) = 1$ et donnant le prix du zéro-coupon d'échéance u en fonction du temps.

Dans le chapitre 1, nous avons caractérisé, dans le cadre des modèles discrets, l'absence d'opportunité d'arbitrage par l'existence d'une probabilité équivalente sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. L'extension de ce type de résultat à des modèles à temps continu est délicate (cf. [HK79], [Str90], [AD89] et [DS94]), mais nous avons pu constater, dans le chapitre 4, que l'existence d'une telle probabilité était vérifiée dans le modèle de Black-Scholes. En nous appuyant sur ces exemples, nous allons ici prendre comme point de départ de la modélisation l'hypothèse suivante :

(H) Il existe une probabilité $\mathbf{P}^*$ équivalente à $\mathbf{P}$, sous laquelle, pour tout réel $u \in [0,T]$, le processus $(\tilde{P}(t,u))_{0\leq t\leq u}$ défini par :

$$\tilde{P}(t,u) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,u)$$

est une martingale.

Cette hypothèse entraîne un certain nombre de conséquences intéressantes. En effet, la propriété de martingale sous $\mathbf{P}^*$ donne, en utilisant l'égalité $P(u,u) = 1$:

$$\tilde{P}(t,u) = \mathbf{E}^* \left(\tilde{P}(u,u) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}^* \left(e^{-\int_0^u r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

et, en supprimant l'actualisation,

$$P(t,u) = \mathbf{E}^* \left(e^{-\int_t^u r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right). \tag{6.2}$$

Cette égalité, qu'il est intéressant de comparer à la formule (6.1), montre que les prix $P(t,u)$ ne dépendent que du comportement du processus $(r(s))_{0\leq s\leq T}$ sous la probabilité $\mathbf{P}^*$. L'hypothèse que nous avons faite sur la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ permet de préciser la forme de la densité de la probabilité $\mathbf{P}^*$ par rapport à $\mathbf{P}$. Notons L_T cette densité. Pour toute variable aléatoire positive X, on a : $\mathbf{E}^*(X) = \mathbf{E}(XL_T)$ et, si X est $\mathcal{F}_t$-mesurable : $\mathbf{E}^*(X) = \mathbf{E}(XL_t)$, en posant $L_t = \mathbf{E}(L_T|F_t)$. La variable aléatoire L_t est donc la densité de la restriction de $\mathbf{P}^*$ à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbf{P}$.

Proposition 1.1 *Il existe un processus adapté $(q(t))_{0\leq t\leq T}$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t q(s)^2 ds \right) \quad \textit{p.s.} \tag{6.3}$$

Démonstration : Le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$, qui est la filtration naturelle du mouvement brownien (W_t). Il en résulte (cf. paragraphe 2.3 du chapitre 4) qu'il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ p.s. et, pour tout $t \in [0,T]$:

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{p.s.}$$

Puisque L_T est une densité de probabilité, on a $\mathbf{E}(L_T) = 1 = L_0$ et, puisque $\mathbf{P}^*$ est équivalente à $\mathbf{P}$, on a $L_T > 0$ p.s. et plus généralement $\mathbf{P}(L_t > 0) = 1$ quel que soit t. Pour obtenir la formule (6.3), on est tenté d'appliquer la formule d'Ito avec la fonction log. Pour cela, on a besoin de vérifier que $\mathbf{P}\left(\forall t \in [0,T], L_0 + \int_0^t H_s dW_s > 0\right) = 1$. Cette vérification (qui utilise de manière cruciale la propriété de martingale) fait l'objet de l'exercice 30. Ce point étant acquis, la formule d'Ito donne :

$$\log(L_t) = \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{L_s^2} H_s^2 ds \quad \text{p.s.}$$

ce qui entraîne l'égalité (6.3) avec $q(t) = \frac{H_t}{L_t}$. ∎

Corollaire 1.2 *Le prix à l'instant* t *de l'obligation zéro-coupon d'échéance* $u \geq t$ *peut s'écrire :*

$$P(t,u) = \mathbf{E}\left(e^{-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u q(s)^2 ds}\Big| \mathcal{F}_t\right). \tag{6.4}$$

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1 et de la formule suivante, facile à vérifier pour toute variable aléatoire positive X :

$$\mathbf{E}^*(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbf{E}(XL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t}. \tag{6.5}$$

∎

La proposition suivante permet de donner une interprétation économique du processus $(q(t))$ (cf. remarque 1.4 ci-dessous).

Proposition 1.3 *Pour chaque échéance* u*, il existe un processus adapté* $(\sigma_t^u)_{0\leq t\leq u}$ *tel que, sur* $[0,u]$ *:*

$$\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t))dt + \sigma_t^u dW_t \tag{6.6}$$

Démonstration : Puisque le processus $(\tilde{P}(t,u))_{0\leq t\leq u}$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$, $(\tilde{P}(t,u)L_t)_{0\leq t\leq u}$ est une martingale sous $\mathbf{P}$ (cf. exercice 31). De plus, on a : $\tilde{P}(t,u)L_t > 0$ p.s., pour tout $t \in [0,u]$. Alors, par le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 1.1, on voit qu'il existe un processus adapté $(\theta_t^u)_{0\leq t\leq u}$ tel que $\int_0^u (\theta_t^u)^2 dt < \infty$ et :

$$\tilde{P}(t,u)L_t = \tilde{P}(0,u)e^{\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^u)^2 ds}.$$

D'où, en explicitant L_t et en supprimant l'actualisation :

$$P(t,u) = P(0,u)\exp\left(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t (\theta_s^u - q(s))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t ((\theta_s^u)^2 - q(s)^2)ds\right).$$

En appliquant la formule d'Ito avec la fonction exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} &= r(t)dt + (\theta_t^u - q(t))dW_t - \frac{1}{2}((\theta_t^u)^2 - q(t)^2)dt + \frac{1}{2}(\theta_t^u - q(t))^2dt \\ &= (r(t) + q(t)^2 - \theta_t^u q(t))dt + (\theta_t^u - q(t))dW_t,\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité (6.6) en posant : $\sigma_t^u = \theta_t^u - q(t)$. ∎

Remarque 1.4 La formule (6.6) est à rapprocher de l'égalité $\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r(t)dt$, vérifiée par l'actif dit “sans risque”. C'est la présence du terme en dW_t qui rend les obligations plus risquées. De plus, pour l'intuition, l'expression $r(t) - \sigma_t^u q(t)$ apparaît comme le rendement moyen (i.e. en espérance) de l'obligation à l'instant t (car les accroissements du mouvement brownien sont de moyenne nulle) et l'expression $-\sigma_t^u q(t)$ exprime la différence entre le rendement moyen de l'obligation et le taux sans risque. D'où l'interprétation de $-q(t)$ comme une “prime de risque”. Sous la probabilité $\mathbf{P}^*$, le processus $(\tilde{W}_t)$ défini par : $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t q(s)ds$ est un mouvement brownien standard (théorème de Girsanov) et on a :

$$\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} = r(t)dt + \sigma_t^u d\tilde{W}_t. \qquad (6.7)$$

Pour cette raison la probabilité $\mathbf{P}^*$ est souvent appelée probabilité corrigée du risque ou probabilité “risque-neutre”.

1.3 Options sur obligations

Pour fixer les idées, considérons d'abord une option européenne d'échéance θ sur l'obligation zéro-coupon d'échéance égale à l'horizon T. S'il s'agit d'un call de prix d'exercice K, la valeur de l'option à l'instant θ est évidemment $(P(\theta,T) - K)_+$ et on peut espérer couvrir ce call avec un portefeuille constitué de certaines quantités d'actif sans risque et d'obligations. Pour préciser cela, nous allons définir des stratégies de gestion, en nous limitant à des portefeuilles constitués, à chaque instant, d'actifs sans risque et de zéro-coupons d'échéance T. Une stratégie est alors définie par la donnée d'un processus adapté $((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, H_t^0 représentant la quantité d'actif sans risque et H_t le nombre d'obligations d'échéance T détenues en portefeuille à l'instant t. La valeur du portefeuille à l'instant t est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T) = H_t^0 e^{\int_0^t r(s)ds} + H_t P(t,T)$$

et la condition d'autofinancement s'écrit, comme dans le chapitre 4, sous la forme :

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dP(t,T).$$

Pour que cette égalité ait un sens, on impose, compte tenu de la proposition 1.3, les conditions d'intégrabilité suivantes : $\int_0^T |H_t^0 r(t)|dt < \infty$ et $\int_0^T (H_t\sigma_t^u)^2 dt < \infty$ p.s.. Comme dans le chapitre 4, nous définissons les stratégies admissibles de la façon suivante :

Définition 1.5 *Une stratégie* $\phi = \left((H_t^0, H_t)\right)_{0\leq t\leq T}$ *est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée* $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{P}(t,T)$ *du portefeuille correspondant est, pour tout* t, *positive et si* $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ *est de carré intégrable sous* $\mathbf{P}^*$.

La proposition suivante montre que sous des hypothèses convenables, on peut couvrir toutes les options européennes d'échéance $\theta < T$.

Proposition 1.6 *On suppose* $\sup_{0\le t\le T}|r(t)| < \infty$ *p.s. et* $\sigma_t^T \neq 0$ *p.s., pour tout* $t \in [0,\theta]$. *Soit* $\theta < T$ *et soit* h *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_\theta$ *mesurable telle que* $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$ *soit de carré intégrable sous* $\mathbf{P}^*$. *Alors, il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant* θ *est égale à* h. *La valeur à un instant* $t \le \theta$ *d'une telle stratégie est donnée par :*

$$V_t = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}h\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Démonstration : La méthode est la même que dans le chapitre 4. On observe d'abord que si $\tilde{V}_t$ est la valeur (actualisée) à l'instant t d'une stratégie admissible $((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$, on a, en utilisant la condition d'autofinancement, la formule d'intégration par parties et la remarque 1.4 (cf. équation (6.7)) :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= H_t d\tilde{P}(t,T) \\ &= H_t\tilde{P}(t,T)\sigma_t^T d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

On en déduit, compte tenu du fait que $\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ est de carré intégrable sous $\mathbf{P}^*$, que $(\tilde{V}_t)$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$. On a donc :

$$\forall t \le \theta \quad \tilde{V}_t = \mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_\theta\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

et, si on impose la condition $V_\theta = h$, on obtient

$$V_t = e^{\int_0^t r(s)ds}\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}h|\mathcal{F}_t\right).$$

Pour achever la démonstration, il suffit de construire une stratégie admissible ayant à chaque instant cette valeur. Pour cela, on montre qu'il existe un processus $(J_t)_{0\le t\le\theta}$ tel que $\int_0^\theta J_t^2 < \infty$, p.s. et :

$$he^{-\int_0^\theta r(s)ds} = \mathbf{E}^*\left(he^{-\int_0^\theta r(s)ds}\right) + \int_0^\theta J_s d\tilde{W}_s.$$

Noter que cette propriété n'est pas une conséquence triviale du théorème de représentation des martingales car on ne sait pas si $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$ est dans la tribu engendrée par les $\tilde{W}_t$, $t \le \theta$ (on sait seulement qu'elle est dans la tribu $\mathcal{F}_\theta$ qui peut être plus grande ; voir à ce sujet l'exercice 32). Ce point étant acquis, il suffit de poser :

$$H_t = \frac{J_t}{\tilde{P}(t,T)\sigma_t^T} \quad \text{et} \quad H_t^0 = \mathbf{E}^*\left(he^{-\int_0^\theta r(s)ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) - \frac{J_t}{\sigma_t^T}$$

pour $t \le \theta$. On vérifie aisément que $((H_t^0, H_t))_{0\le t\le\theta}$ définit une stratégie admissible (l'hypothèse $\sup_{0\le t\le T}|r(t)| < \infty$ p.s. permet d'assurer la condition $\int_0^\theta |r(s)H_s^0|ds < \infty$) dont la valeur à l'instant θ est bien égale à h. ∎

Remarque 1.7 Nous ne nous sommes pas posés la question de l'unicité de la probabilité $\mathbf{P}^*$ et il n'est pas clair que le processus de risque $(q(t))$ soit défini sans ambiguïté. En fait, on peut montrer (cf. [AD89]) que $\mathbf{P}^*$ est l'unique probabilité équivalente à $\mathbf{P}$ sous laquelle $(\tilde{P}(t,T))_{0\le t\le T}$ soit une martingale si et seulement si le processus (σ_t^T) vérifie : $\sigma_t^T \neq 0$, $dtd\mathbf{P}$ presque partout. Cette condition, un peu plus faible que l'hypothèse de la proposition 1.6, est exactement ce qu'il faut pour pouvoir couvrir les options avec des obligations d'échéance T, ce qui n'est pas étonnant si l'on songe à la caractérisation des marchés complets que nous avons donnée dans le chapitre 1.

2 Quelques modèles usuels

Les équations (6.2) et (6.4) montrent que pour calculer le prix des obligations, on a besoin de connaître soit l'évolution de $r(t)$ sous $\mathbf{P}^*$, soit l'évolution du couple $(r(t), q(t))$ sous $\mathbf{P}$. Les premiers modèles que nous allons examiner décrivent l'évolution de $r(t)$ sous $\mathbf{P}$ par une équation de diffusion et choisissent la forme de $q(t)$ de façon à conserver le même type d'équation sous $\mathbf{P}^*$. Les prix des obligations et des options dépendent alors explicitement de “paramètres de risque” difficiles à estimer. Une des vertus du modèle de Heath-Jarrow-Morton, que nous présentons brièvement dans le paragraphe 2.3 est de fournir des formules de prix d'options dépendant uniquement de paramètres régissant l'évolution des taux sous $\mathbf{P}$.

2.1 Le modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le processus $r(t)$ vérifie :

$$dr(t) = a\left(b - r(t)\right)dt + \sigma dW_t \tag{6.8}$$

où a, b, σ sont des constantes positives. On suppose aussi que le processus $q(t)$ est une constante $q(t) = -\lambda$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$dr(t) = a\left(b^* - r(t)\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t \tag{6.9}$$

où $b^* = b - \lambda\sigma/a$ et $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$. Avant de calculer le prix des obligations selon ce modèle, donnons quelques conséquences de l'équation (6.8). Si on pose :

$$X_t = r(t) - b,$$

on voit que (X_t) est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t,$$

ce qui signifie que (X_t) est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. chapitre 3, paragraphe 5.2). On en déduit que $r(t)$ peut s'écrire :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as} dW_s \tag{6.10}$$

et que $r(t)$ suit une loi normale dont la moyenne est donnée par $\mathbf{E}(r(t)) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right)$ et la variance par $\mathrm{Var}(r(t)) = \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)$. Cela entraîne que $\mathbf{P}(r(t) < 0) > 0$, ce qui pour la pratique n'est pas très satisfaisant (sauf si cette probabilité reste très faible). Noter que, quand t tend vers l'infini, $r(t)$ converge en loi vers une gaussienne de moyenne b et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}$.

Pour calculer le prix des zéro-coupons, on se place sous la probabilité $\mathbf{P}^*$ et on utilise l'équation (6.9). D'après l'égalité (6.2),

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= e^{-b^*(T-t)}\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds} \middle| \mathcal{F}_t\right) \end{aligned} \tag{6.11}$$

en posant : $X_t^* = r(t) - b^*$. Comme (X_t^*) est solution de l'équation de diffusion à coefficients indépendants du temps

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma d\tilde{W}_t, \tag{6.12}$$

on peut écrire :

$$\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) = F(T-t, X_t^*) = F(T-t, r(t)-b^*) \tag{6.13}$$

où F est la fonction définie par : $F(\theta, x) = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right)$, (X_t^x) étant l'unique solution de l'équation (6.12) qui vérifie : $X_0^x = x$ (cf. chapitre 3, remarque 5.11).

Le calcul de $F(\theta, x)$ peut se faire complètement. En effet, on sait (cf. chapitre 3) que le processus (X_t^x) est gaussien, à trajectoires continues. Il en résulte que $\int_0^\theta X_s^x ds$ est une gaussienne, puisque l'intégrale est limite de sommes de Riemann, qui sont gaussiennes. On a donc, d'après l'expression de la transformée de Laplace d'une gaussienne,

$$\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right) = e^{-\mathbf{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)}.$$

De l'égalité : $\mathbf{E}^*(X_s^x) = xe^{-as}$, on déduit :

$$\mathbf{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) = x\frac{1-e^{-a\theta}}{a}.$$

Pour le calcul de la variance, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) &= \mathrm{Cov}\left(\int_0^\theta X_s^x ds, \int_0^\theta X_s^x ds\right)\\ &= \int_0^\theta \int_0^\theta \mathrm{Cov}\left(X_t^x, X_u^x\right) du dt. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Puisque $X_t^x = xe^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as} d\tilde{W}_s$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_t^x, X_u^x\right) &= \sigma^2 e^{-a(t+u)}\mathbf{E}^*\left(\int_0^t e^{as} d\tilde{W}_s \int_0^u e^{as} d\tilde{W}_s\right)\\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)}\int_0^{t\wedge u} e^{2as} ds\\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)}\frac{\left(e^{2a(t\wedge u)}-1\right)}{2a}\end{aligned}$$

et, en reportant dans l'égalité (6.14),

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) = \frac{\sigma^2\theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a\theta}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2.$$

En revenant aux équations (6.11) et (6.13), on obtient la formule suivante :

$$P(t,T) = \exp\left[-(T-t)R(T-t, r(t))\right],$$

où $R(T-t, r(t))$, qui s'interprète comme le taux d'intérêt moyen sur la période $[t, T]$, est donné par la formule :

$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta}\left[(R_\infty - r)\left(1-e^{-a\theta}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2\right]$$

avec $R_\infty = \lim_{\theta\to\infty} R(\theta, r) = b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2}$. Le taux R_∞ s'interprète comme un taux à long terme ; notons qu'il ne dépend pas du "taux instantané spot" r. Cette dernière propriété est considérée comme un défaut du modèle par les financiers.

Remarque 2.1 Dans la pratique, se pose le problème de l'estimation des paramètres et du choix de la valeur de r. Pour r on choisira un taux court (par exemple le taux au jour le jour ou "jj"), on pourra alors caler les paramètres b, a, σ par des méthodes statistiques sur les données historiques du taux instantané. Puis on détermine λ à partir des données de marché en inversant la formule de Vasicek. En fait les praticiens déterminent souvent les paramètres, y compris r, en ajustant au mieux la formule de Vasicek sur les données de marché.

Remarque 2.2 Le calcul des options sur obligations se fait facilement dans le modèle de Vasicek, grâce au caractère gaussien du processus d'Ornstein-Uhlenbek (cf. exercice 33).

2.2 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Dans [CIR85], Cox, Ingersoll et Ross proposent de modéliser l'évolution du taux instantané par l'équation suivante :

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t \tag{6.15}$$

avec σ et a positifs, $b \in \mathbf{R}$, le processus $(q(t))$ étant pris de la forme : $q(t) = -\alpha\sqrt{r(t)}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Notons qu'on ne peut pas appliquer à cette équation le théorème d'existence et d'unicité que nous avons donné au chapitre 3, puisque la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbf{R}_+$ et n'est pas lipschitzienne. Cependant, grâce au caractère hölderien de la fonction racine carrée, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 2.3 *On suppose que (W_t) est un mouvement brownien standard défini sur $[0, \infty[$. Pour tout réel $x \geq 0$, il existe un unique processus continu adapté (X_t), à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, vérifiant $X_0 = x$ et*

$$dX_t = (a - bX_t)\, dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \quad \text{sur } [0, \infty[. \tag{6.16}$$

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons à [IW81], p. 221. Pour permettre l'étude du modèle de Cox-Ingersoll-Ross, nous allons donner quelques propriétés de cette équation. Nous noterons (X_t^x) la solution de (6.16) issue de x et τ_0^x le temps d'arrêt défini par :

$$\tau_0^x = \inf\{t \geq 0 | X_t^x = 0\}$$

avec, comme d'habitude, $\inf \emptyset = \infty$.

Proposition 2.4
1. *Si $a \geq \sigma^2/2$, on a $\mathbf{P}(\tau_0^x = \infty) = 1$, pour tout $x > 0$.*
2. *Si $0 \leq a < \sigma^2/2$ et $b \geq 0$, on a $\mathbf{P}(\tau_0^x < \infty) = 1$, pour tout $x > 0$.*
3. *Si $0 \leq a < \sigma^2/2$ et $b < 0$, on a $\mathbf{P}(\tau_0^x < \infty) \in]0, 1[$, pour tout $x > 0$.*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 34.

La proposition suivante, qui permet de caractériser la loi du couple $\left(X_t^x, \int_0^t X_s^x ds\right)$, est la clé de tous les calculs de prix dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

Proposition 2.5 *Pour tous réels positifs λ et μ, on a :*

$$\mathbf{E}\left(e^{-\lambda X_t^x} e^{-\mu \int_0^t X_s^x\, ds}\right) = e^{-a\phi_{\lambda,\mu}(t)} e^{-x\psi_{\lambda,\mu}(t)},$$

où les fonctions $\phi_{\lambda,\mu}$ et $\psi_{\lambda,\mu}$ sont données par :

$$\phi_{\lambda,\mu}(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-b+e^{\gamma t}(\gamma+b)}\right)$$

et

$$\psi_{\lambda,\mu}(t) = \frac{\lambda\left(\gamma+b+e^{\gamma t}(\gamma-b)\right)+2\mu\left(e^{\gamma t}-1\right)}{\sigma^2\lambda\left(e^{\gamma t}-1\right)+\gamma-b+e^{\gamma t}(\gamma+b)}$$

avec $\gamma = \sqrt{b^2+2\sigma^2\mu}$.

Démonstration : Le fait que l'espérance à calculer puisse se mettre sous la forme $e^{-a\phi(t)-x\psi(t)}$ résulte d'une propriété d'additivité du processus (X_t^x) par rapport au paramètre a et à la condition initiale x (cf. [IW81], p.225, [RY90]). Si, fixant λ et μ, on considère la fonction $F(t,x)$ définie par :

$$F(t,x) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda X_t^x}e^{-\mu\int_0^t X_s^x\,ds}\right), \tag{6.17}$$

il est naturel de chercher F comme solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}x\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(a-bx)\dfrac{\partial F}{\partial x}-\mu x F \\ F(0,x) = e^{-\lambda x} \end{cases}$$

En effet, si F vérifie ces équations et a des dérivées bornées, la formule d'Itô montre que, pour tout T, le processus $(M_t)_{0\leq t\leq T}$, défini par :

$$M_t = e^{-\mu\int_0^t X_s^x\,ds}F(T-t,X_t^x)$$

est une martingale et l'égalité $\mathbf{E}(M_T) = M_0$ donne (6.17). Si F est de la forme : $F(t,x) = e^{-a\phi(t)-x\psi(t)}$ les équations ci-dessus se traduisent par : $\phi(0)=0$, $\psi(0)=\lambda$ et

$$\begin{cases} -\psi'(t) &= \frac{\sigma^2}{2}\psi^2(t)+b\psi(t)-\mu \\ \phi'(t) &= \psi(t) \end{cases}$$

La résolution de ces deux équations différentielles donne les expressions de ϕ et ψ. ∎

Quand on applique la proposition 2.5 avec $\mu = 0$, on obtient la transformée de Laplace de X_t^x sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda X_t^x}\right) &= \left(\frac{b}{\frac{\sigma^2}{2}\lambda(1-e^{-bt})+b}\right)^{2a/\sigma^2}\exp\left(-x\frac{\lambda b e^{-bt}}{\lambda\frac{\sigma^2}{2}(1-e^{-bt})+b}\right) \\ &= \frac{1}{(2\lambda L+1)^{2a/\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\lambda L\zeta}{2\lambda L+1}\right) \end{aligned}$$

en posant : $L = \frac{\sigma^2}{4b}\left(1-e^{-bt}\right)$ et $\zeta = \frac{4xb}{\sigma^2(e^{bt}-1)}$. Avec ces notations, la transformée de Laplace de X_t^x/L est donnée par la fonction $g_{4a/\sigma^2,\zeta}$, où $g_{\delta,\zeta}$ est définie par :

$$g_{\delta,\zeta}(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda+1)^{\delta/2}}\exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda+1}\right).$$

Cette fonction est la transformée de Laplace d'une loi connue sous le nom de loi du chi-deux décentrée à δ degrés de liberté, de paramètre de décentrage ζ (voir à ce sujet l'exercice 35). La *densité* de cette loi est donnée par la fonction $f_{\delta,\zeta}$, définie par :

$$f_{\delta,\zeta}(x) = \frac{e^{-\zeta/2}}{2\zeta^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}} I_{\frac{\delta}{2}-1}\left(\sqrt{x\zeta}\right) \quad \text{pour } x > 0,$$

où I_ν est la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν, définie par :

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)} .$$

On trouvera de nombreuses propriétés des fonctions de Bessel et des formules d'approximation des fonctions de répartition de lois du chi-deux décentrées dans [AS70], chapitres 9 et 26.

Revenons maintenant au modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Avec les hypothèses faites sur les processus $(r(t))$ et $(q(t))$, on a :

$$dr(t) = (a - (b + \sigma\alpha)r(t))\, dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_t,$$

où, sous la probabilité $\mathbf{P}^*$, le processus $(\tilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ est un mouvement brownien standard. Le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance T est alors donné, à l'instant 0, par :

$$\begin{aligned} P(0,T) &= \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^T r(s)ds}\right) \\ &= e^{-a\phi(T)-r(0)\psi(T)} \end{aligned} \tag{6.18}$$

où les fonctions ϕ et ψ sont données par les formules suivantes :

$$\phi(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\gamma^* e^{\frac{t(\gamma^*+b^*)}{2}}}{\gamma^* - b^* + e^{\gamma^* t}(\gamma^* + b^*)}\right)$$

et

$$\psi(t) = \frac{2\left(e^{\gamma^* t} - 1\right)}{\gamma^* - b^* + e^{\gamma^* t}(\gamma^* + b^*)}$$

avec $b^* = b + \sigma\alpha$ et $\gamma^* = \sqrt{(b^*)^2 + 2\sigma^2}$. Le prix à l'instant t est donné par : $P(t,T) = \exp\left(-a\phi(T-t) - r(t)\psi(T-t)\right)$.

Calculons maintenant le prix, à l'instant 0, d'un call européen d'échéance θ, de prix d'exercice K, sur un zéro-coupon d'échéance T. On peut montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont vérifiées ; le prix à l'instant 0 du call est donc donné par :

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbf{E}^*\left[e^{-\int_0^\theta r(s)ds}\left(P(\theta,T) - K\right)_+\right] \\ &= \mathbf{E}^*\left[e^{-\int_0^\theta r(s)ds}\left(e^{-a\phi(T-\theta)-r(\theta)\psi(T-\theta)} - K\right)_+\right] \\ &= \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} P(\theta,T)\mathbf{1}_{\{r(\theta) < r^*\}}\right) \\ &\quad -K\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}\mathbf{1}_{\{r(\theta) < r^*\}}\right) \end{aligned}$$

où r^* est défini par :

$$r^* = -\frac{a\phi(T-\theta) + \log(K)}{\psi(T-\theta)}.$$

Remarquons que $\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}P(\theta,T)\right) = P(0,T)$, par la propriété de martingale des prix actualisés. De même, $\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}\right) = P(0,\theta)$. On peut donc écrire le prix de l'option sous la forme :

$$C_0 = P(0,T)\mathbf{P}_1\left(r(\theta) < r^*\right) - KP(0,\theta)\mathbf{P}_2\left(r(\theta) < r^*\right)$$

en notant $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ les probabilités dont les densités par rapport à $\mathbf{P}^*$ sont données respectivement par :

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s)ds}P(\theta,T)}{P(0,T)} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s)ds}}{P(0,\theta)}.$$

On démontre (cf. exercice 36) que, si on pose

$$L_1 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)}{\gamma^*\left(e^{\gamma^*\theta}+1\right) + \left(\sigma^2\psi(T-\theta)+b^*\right)\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)}$$

et

$$L_2 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)}{\gamma^*\left(e^{\gamma^*\theta}+1\right) + b^*\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)},$$

la loi de $\frac{r(\theta)}{L_1}$ sous $\mathbf{P}_1$, (resp. de $\frac{r(\theta)}{L_2}$ sous $\mathbf{P}_2$) est une loi du chi-deux décentrée à $4a/\sigma^2$ degrés de liberté et de paramètre de décentrage égal à ζ_1 (resp. ζ_2), avec

$$\zeta_1 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}e^{\gamma^*\theta}}{\sigma^2\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)\left(\gamma^*(e^{\gamma^*\theta}+1) + (\sigma^2\psi(T-\theta)+b^*)(e^{\gamma^*\theta}-1)\right)}$$

et

$$\zeta_2 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}e^{\gamma^*\theta}}{\sigma^2\left(e^{\gamma^*\theta}-1\right)\left(\gamma^*(e^{\gamma^*\theta}+1) + b^*(e^{\gamma^*\theta}-1)\right)}\ .$$

Avec ces notations, en introduisant la fonction de répartition $F_{\delta,\zeta}$ de la loi du chi-deux décentrée à δ degrés de liberté de paramètre de décentrage ζ, on a donc :

$$C_0 = P(0,T)F_{4a/\sigma^2,\zeta_1}\left(\frac{r^*}{L_1}\right) - KP(0,\theta)F_{4a/\sigma^2,\zeta_2}\left(\frac{r^*}{L_2}\right).$$

2.3 Autres modèles

Le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross ont pour principal défaut de donner des prix qui sont des fonctions explicites du taux d'intérêt instantané "spot" et ne permettent donc pas d'intégrer, dans la structure des prix, l'observation de toute la courbe des taux.

Certains auteurs ont introduit des modèles bidimensionnels pour mieux rendre compte des disparités entre taux court et taux long (cf. [BS79], [SS84], [Cou82]). Ces modèles plus complexes ne débouchent pas sur des formules explicites et nécessitent la résolution d'équations aux dérivées partielles. Plus récemment, Ho et Lee [HL86] ont proposé un modèle à temps discret décrivant l'évolution de l'ensemble de la courbe des taux. Un modèle à temps continu basé sur la même idée a été introduit par Heath, Jarrow et Morton dans [HJM87], [Mor89]. C'est ce modèle que nous allons présenter brièvement.

On définit tout d'abord les taux d'intérêt *forward* $f(t,s)$, pour $t \leq s$, caractérisés par l'égalité suivante :

$$P(t,u) = \exp\left(-\int_t^u f(t,s)ds\right) \tag{6.19}$$

pour toute échéance u. Le nombre $f(t,s)$ représente donc le taux d'intérêt instantané à la date s tel que le marché "le voit" à la date t. Pour chaque u, le processus $(f(t,u))_{0\leq t\leq u}$ doit donc être un processus adapté et il est naturel de poser : $f(t,t)=r(t)$. On impose également à l'application $(t,s)\mapsto f(t,s)$, définie pour $t\leq s$, d'être continue. La modélisation consiste ensuite à supposer que, pour chaque échéance u, le processus $(f(t,u))_{0\leq t\leq u}$ vérifie une équation de la forme :

$$f(t,u)=f(0,u)+\int_0^t \alpha(v,u)dv+\int_0^t \sigma(f(v,u))dW_v, \tag{6.20}$$

avec un processus $(\alpha(t,u))_{0\leq t\leq u}$ adapté, l'application $(t,u)\mapsto\alpha(t,u)$ étant continue et σ étant une application continue de **R** dans **R** (on peut aussi prendre σ dépendant du temps, cf. [Mor89]).

Il faut alors s'assurer que ce modèle est compatible avec l'hypothèse (H). Cela impose des conditions sur les coefficients α et σ du modèle. Pour les faire apparaître, on calcule la différentielle $\frac{dP(t,u)}{P(t,u)}$ et on la compare à l'équation (6.6). Posons : $X_t=-\int_t^u f(t,s)ds$. On a $P(t,u)=e^{X_t}$ et, d'après l'équation (6.20),

$$\begin{aligned}
X_t &= \int_t^u (-f(s,s)+f(s,s)-f(t,s))\,ds\\
&= -\int_t^u f(s,s)ds+\int_t^u\left(\int_t^s \alpha(v,s)dv\right)ds+\int_t^u\left(\int_t^s \sigma(f(v,s))dW_v\right)ds\\
&= -\int_t^u f(s,s)ds+\int_t^u\left(\int_v^u \alpha(v,s)ds\right)dv+\int_t^u\left(\int_v^u \sigma(f(v,s))ds\right)dW_v \qquad (6.21)\\
&= X_0+\int_0^t f(s,s)ds-\int_0^t\left(\int_v^u \alpha(v,s)ds\right)dv-\int_0^t\left(\int_v^u \sigma(f(v,s))ds\right)dW_v\,.
\end{aligned}$$

Noter que l'interversion d'intégrales apparaissant dans l'équation (6.21) est justifiée par l'exercice 37. On a donc :

$$dX_t=\left(f(t,t)-\int_t^u \alpha(t,s)ds\right)dt-\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)dW_t$$

et, par la formule d'Ito :

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} &= dX_t+\frac{1}{2}d<X,X>_t\\
&= \left(f(t,t)-\left(\int_t^u \alpha(t,s)ds\right)+\frac{1}{2}\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)^2\right)dt\\
&\qquad -\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)dW_t\,.
\end{aligned}$$

Si l'hypothèse (H) est vérifiée, on doit avoir, d'après la proposition 1.3 et l' égalité $f(t,t)=r(t)$,

$$\sigma_t^u q(t)=\left(\int_t^u \alpha(t,s)ds\right)-\frac{1}{2}\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)^2,$$

avec $\sigma_t^u=-\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)$. D'où :

$$\int_t^u \alpha(t,s)ds=\frac{1}{2}\left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds\right)^2-q(t)\int_t^u \sigma(f(t,s))ds$$

et, en dérivant par rapport à u :

$$\alpha(t,u) = \sigma(f(t,u)) \left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds \ - q(t) \right)$$

L'équation (6.20) s'écrit alors, sous forme différentielle :

$$df(t,u) = \sigma(f(t,u)) \left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds \right) dt + \sigma(f(t,u))d\tilde{W}_t \tag{6.22}$$

Le théorème suivant, dû à Heath, Jarrow et Morton [HJM87], [Mor89] donne des conditions suffisantes pour que l'équation (6.22) ait une solution unique.

Théorème 2.6 *Si la fonction σ est lipschitzienne et bornée, pour toute fonction continue ϕ de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}_+$ il existe un unique processus continu à deux indices $(f(t,u))_{0\leq t\leq u\leq T}$ tel que, pour tout u, le processus $(f(t,u))_{0\leq t\leq u}$ soit adapté et vérifie (6.22), avec $f(0,u) = \phi(u)$.*

On voit que, pour tout processus continu $(q(t))$, on peut alors construire un modèle de la forme (6.20). Il suffit de prendre une solution de (6.22) et de poser ensuite :

$$\alpha(t,u) = \sigma(f(t,u)) \left(\int_t^u \sigma(f(t,s))ds \ - q(t) \right).$$

Ce qui est remarquable dans ce modèle, c'est que la loi des taux forward sous $\mathbf{P}^*$ ne dépend que de la fonction σ. C'est une conséquence de l'équation (6.22), qui ne fait apparaître que σ et $(\tilde{W}_t)$. Il en résulte que le prix des options ne dépendra que de la fonction σ. On est ainsi dans une situation analogue à celle du modèle de Black-Scholes. Le cas où σ est une constante est étudié dans l'exercice 38. Noter que la condition de bornitude sur σ est essentielle puisque, pour $\sigma(x) = x$, il n'y a pas de solution (cf. [HJM87], [Mor89]).

Remarque bibliographique : Pour l'évaluation des options sur obligations avec coupons, on pourra consulter [Jam89] et [KR89].

3 Exercices

Exercice 30 Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale continue telle que, pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbf{P}(M_t > 0) = 1$. On pose :

$$\tau = (\inf\{t \in [0,T] \mid M_t = 0\}) \wedge T.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt.
2. Montrer, en utilisant le théorème d'arrêt, que $\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}\left(M_T \mathbf{1}_{\{\tau = T\}}\right)$. En déduire que $\mathbf{P}(\{\forall t \in [0,T]\ M_t > 0\}) = 1$.

Exercice 31 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé filtré et soit $\mathbf{Q}$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$. On note L_t la densité de la restriction de $\mathbf{Q}$ à $\mathcal{F}_t$. Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté. Montrer que $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbf{Q}$ si et seulement si le processus $(L_tM_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbf{P}$.

Exercice 32 Les notations sont celles du paragraphe 1.3. Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$. On suppose que (M_t) est une martingale sous $\mathbf{P}^*$. Montrer, en utilisant l'exercice 31, qu'il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ p.s. et

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\tilde{W}_s \text{ p.s.}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Exercice 33 On se propose de calculer le prix, à l'instant 0, d'un call d'échéance θ et de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon d'échéance $T > \theta$, dans le modèle de Vasicek.

1. Montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont bien vérifiées.
2. Montrer que l'option est exercée si et seulement si $r(\theta) < r^*$, où
$$r^* = R_\infty \left(1 - \frac{a(T-\theta)}{1-e^{-a(T-\theta)}}\right) - \frac{\sigma^2\left(1-e^{-a(T-\theta)}\right)}{4a^2} - \log(K)\ \left(\frac{a}{1-e^{-a(T-\theta)}}\right).$$
3. Soit (X, Y) un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ sous une probabilité $\mathbf{P}$ et soit $\tilde{\mathbf{P}}$ la probabilité absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$, de densité
$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{e^{-\lambda X}}{\mathbf{E}\left(e^{-\lambda X}\right)}.$$
Montrer que, sous $\tilde{\mathbf{P}}$, Y est une gaussienne, dont on précisera la moyenne et la variance.
4. En utilisant la question précédente, montrer que sous les probabilités de densités respectives $\frac{e^{-\int_0^\theta r(s)ds}}{P(0,\theta)}$ et $\frac{e^{-\int_0^T r(s)ds}}{P(0,T)}$ par rapport à $\mathbf{P}^*$, la variable aléatoire $r(\theta)$ est une gaussienne. En déduire une expression du prix de l'option sous la forme $C_0 = P(0,T)p_1 - KP(0,\theta)p_2$, avec des paramètres p_1 et p_2 que l'on explicitera.

Exercice 34 Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 2.4. Pour $x, M > 0$, on note τ_M^x le temps d'arrêt défini par $\tau_M^x = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t^x = M\}$.

1. Soit s la fonction définie sur $]0, \infty[$ par
$$s(x) = \int_1^x e^{y\frac{2b}{\sigma^2}} y^{-2a/\sigma^2} dy.$$
Montrer que s vérifie : $\frac{\sigma^2}{2} x \frac{d^2 s}{dx^2} + (a - bx)\frac{ds}{dx} = 0$.
2. Pour $\varepsilon < x < M$, on pose : $\tau_{\varepsilon,M}^x = \tau_\varepsilon^x \wedge \tau_M^x$. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a :
$$s\left(X^x_{t\wedge\tau^x_{\varepsilon,M}}\right) = s(x) + \int_0^{t\wedge\tau^x_{\varepsilon,M}} s'(X_s^x)\sigma\sqrt{X_s^x} dW_s.$$
En déduire, en prenant les variances et en utilisant le fait que s' est bornée inférieurement sur l'intervalle $[\varepsilon, M]$, que $\mathbf{E}\left(\tau^x_{\varepsilon,M}\right) < \infty$, ce qui entraîne que $\tau^x_{\varepsilon,M}$ est fini p.s.
3. Montrer que si $\varepsilon < x < M$, $s(x) = s(\varepsilon)\mathbf{P}\left(\tau_\varepsilon^x < \tau_M^x\right) + s(M)\mathbf{P}\left(\tau_\varepsilon^x > \tau_M^x\right)$.
4. On suppose $a \geq \sigma^2/2$. Montrer qu'alors $\lim_{x\to 0} s(x) = -\infty$. En déduire que :
$$\mathbf{P}\left(\tau_0^x < \tau_M^x\right) = 0,$$
pour tout $M > 0$, puis que $\mathbf{P}\left(\tau_0^x < \infty\right) = 0$.

5. On suppose maintenant $0 \leq a < \sigma^2/2$ et on pose $s(0) = \lim_{x \to 0} s(x)$. Montrer que, pour tout $M > x$, on a : $s(x) = s(0)\mathbf{P}\left(\tau_0^x < \tau_M^x\right) + s(M)\mathbf{P}\left(\tau_0^x > \tau_M^x\right)$ et achever la démonstration de la proposition 2.4.

Exercice 35 Soit d un entier strictement positif et soient X_1, X_2, ..., X_d, d gaussiennes indépendantes de variance 1 et de moyennes respectives m_1, m_2, ...,m_d. Montrer que la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^d X_i^2$ suit une loi du chi-deux décentrée à d degrés de liberté, de paramètre de décentrage $\zeta = \sum_{i=1}^d m_i^2$.

Exercice 36 En utilisant la proposition 2.5, calculer, dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, la loi de $r(\theta)$ sous les probabilités $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ introduites à la fin du paragraphe 2.2.

Exercice 37 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé filtré et soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t)$. On considère un processus à deux indices $(H(t,s))_{0 \leq t,s \leq T}$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout ω, l'application $(t,s) \mapsto H(t,s)(\omega)$ est continue et, pour tout $s \in [0,T]$, le processus $(H(t,s))_{0 \leq t \leq T}$ est adapté. On se propose de justifier l'égalité $\int_0^T \left(\int_0^T H(t,s) dW_t\right) ds = \int_0^T \left(\int_0^T H(t,s) ds\right) dW_t$. On supposera pour simplifier que $\int_0^T \mathbf{E}\left(\int_0^T H^2(t,s) dt\right) ds < \infty$ (ce qui est suffisant pour justifier l'égalité (6.21)).

1. Montrer que

$$\int_0^T \mathbf{E}\left(\left|\int_0^T H(t,s) dW_t\right|\right) ds \leq \int_0^T \left[\mathbf{E}\left(\int_0^T H^2(t,s) dt\right)\right]^{1/2} ds.$$

   En déduire que l'intégrale $\int_0^T \left(\int_0^T H(t,s) dW_t\right) ds$ a un sens.

2. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ une subdivision de l'intervalle $[0,T]$. Remarquer que

$$\int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N-1} H(t_i,s)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right) ds = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_0^T H(t_i,s) ds\right)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$$

   et justifier le passage à la limite conduisant à l'égalité souhaitée.

Exercice 38 Dans le modèle de Heath-Jarrow-Morton, on prend pour fonction σ une constante strictement positive, encore notée σ. On se propose de calculer le prix d'un call d'échéance θ, de prix d'exercice K, sur un zéro-coupon d'échéance $T > \theta$.

1. Montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont vérifiées.
2. Montrer que la solution de l'équation (6.22) est donnée par $f(t,u) = f(0,u) + \sigma^2 t \left(u - \frac{t}{2}\right) + \sigma \tilde{W}_t$. En déduire que

$$P(\theta,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,\theta)} \exp\left(-\sigma(T-\theta)\tilde{W}_\theta - \frac{\sigma^2 \theta T(T-\theta)}{2}\right).$$

3. Calculer, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbf{E}^*\left(e^{-\sigma \int_0^\theta \tilde{W}_s ds} e^{\lambda \tilde{W}_\theta}\right)$. En déduire la loi de $\tilde{W}_\theta$ sous les probabilités $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ de densités par rapport à $\mathbf{P}^*$ respectivement données par

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds} P(\theta,T)}{P(0,T)} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds}}{P(0,\theta)}.$$

4. Montrer que le prix du call à l'instant 0 est donné par

$$C_0 = P(0,T)N(d) - KP(0,\theta)N\left(d - \sigma\sqrt{\theta}(T-\theta)\right) \ ,$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d = \frac{\sigma\sqrt{\theta}(T-\theta)}{2} - \frac{\log\left(K\frac{P(0,\theta)}{P(0,T)}\right)}{\sigma\sqrt{\theta}(T-\theta)}.$$