CIMPA,IRBID Septembre 2005
Cours de calcul stochastique

Rappels

Martingales

Mouvement Brownien

Intégrale stochastique

Equations différentielles stochastiques

Théorème de Girsanov

Processus à sauts

Rappels

Espace probabilisé

Indépendance, espérance conditionnelle

Théorème de Radon-Nikodym

Vecteurs Gaussiens

Convergence de variables aléatoires

1 Espace probabilisé

Définition 1.1 *Une* ***tribu*** *ou σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω et vérifiant les propriétés suivantes :*

- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ *(stabilité par passage au complémentaire).*
- $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \implies (A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots) \in \mathcal{F}$ *(stabilité par intersection dénombrable).*

Définition 1.2 *Soit $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle* ***tribu engendrée par $\mathcal{A}$*** *et on note $\sigma(\mathcal{A})$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 1.3 *On appelle* ***tribu des Boréliens*** *de $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{B}$ quand aucune ambiguïté n'est possible) la tribu engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[$, $a > b \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to E$ est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$* ***mesurable*** *(ou mesurable lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$, où l'on a noté*

$$f^{-1}(A) \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \in A\}.$$

Définition 1.5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Une* ***variable aléatoire réelle (v.a.r.)*** X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 1.6 *La* ***tribu engendrée*** *par une variable aléatoire* X *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est l'ensemble* $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$.

Définition 1.7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Une* ***probabilité*** *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* P *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que*

- $P[\Omega] = 1$
- *Si* $A_1 \dots A_n \dots$ *sont des parties de* $\mathcal{F}$ deux à deux disjointes, *alors*

$$P\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[A_n].$$

On utilise souvent l'écriture avec les fonctions indicatrices :

$$P[A] = \int_A dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A dP.$$

Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une probabilité P s'écrit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on parle alors **d' espace de probabilité** ou d'*espace probabilisé*. On démontre aisément les propriétés suivantes :

(a) $P[A] + P[A^c] = 1$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

(b) $A \subset B \implies P[A] \leq P[B]$

(c) $P[A \cup B] + P[A \cap B] = P[A] + P[B]$ pour tout $A, B \in \mathcal{F}$.

(d) Si les A_n forment une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_n \supset A_{n+1}$), et si $A = \cup_n A_n$ (resp. $A = \cap_n A_n$) alors $P[A_n] \to P[A]$ quand $n \uparrow +\infty$.

Théorème 1.8 [Théorème de classe monotone] *Soient P et Q deux probabilités sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une famille stable par intersection finie et engendrant $\mathcal{F}$. Si $P[A] = Q[A]$ pour tout $A \in \mathcal{C}$, alors $P = Q$.*

Définition 1.9 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité. Un ensemble* $A \in \mathcal{F}$ *est dit* ***négligeable*** *pour* P *si* $P[A] = 0$.

On dit qu'une propriété est vraie **presque sûrement** (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable. Un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit *complet* si $\mathcal{F}$ contient tous les ensembles G (dits négligeables au sens large) tels que $\inf\{P[F] \,:\, F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0$. Partant d'un espace de probabilité donné $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il est toujours possible de le *compléter* en considérant $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des négligeables au sens large pour P.

Définition 1.10 *Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La* ***loi*** *de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie comme* mesure-image *de P par X : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$P_X(A) \;=\; P[X \in A] \;=\; P\left[\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in A\}\right].$$

2 Indépendance, espérance conditionnelle

Définition 2.1 *Soit X une v.a.r. telle que*

$$\int_\Omega |X(\omega)|\, dP \overset{def}{=} \int_{I\!R} |x|\, dP_X(x) \;<\; +\infty.$$

On définit alors l'espérance de X par

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_\Omega X(\omega)\, dP \;=\; \int_{I\!R} x dP_X(x).$$

On dit que X est **intégrable** quand $|X|$ a une espérance finie. On note $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (ou $L^1(\Omega)$) l'ensemble des v.a. intégrables. De la même façon, on définit

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \;=\; \left\{ X \text{ v.a.r.} / \int_{I\!R} |x|^p\, dP_X(x) < +\infty \right\}$$

pour tout $p \geq 1$ et $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \;=\; \{X \text{ v.a.r.} \exists K / \, X(\omega) \leq K < +\infty \text{ p.s.}\}$.
Comme P est une mesure finie, on montre aisément la chaîne d'inclusions :
$L^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset L^p(\Omega) \subset \ldots \subset L^1(\Omega)$.

L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F})$ des v.a. de carré intégrable joue un rôle essentiel : c'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $< X, Y >= E(XY)$.

La **fonction caractéristique** ou *transformée de Fourier* d'une v.a.r. X, est la fonction

$$\psi_X(t) \;=\; \mathbb{E}[e^{itX}] \;=\; \int_{I\!R} e^{itx} P_X(dx).$$

Elle est toujours définie puisque $e^{itX} \in L^\infty$, et caractérise la loi de X au sens suivant :

Théorème 2.2 *Soient X et Y deux v.a.r. On a l'équivalence*

$$X \overset{law}{=} Y \iff \psi_X(t) = \psi_Y(t) \text{ pour tout } t \in I\!R.$$

Quand X est positive, on peut définir sa **transformée de Laplace** :

$$\varphi_X(\lambda) \;=\; \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$$

pour tout $\lambda > 0$, qui caractérise aussi la loi de X :

Théorème 2.3 *Soient X et Y deux v.a.r. positives. On a l'équivalence*

$$X \overset{law}{=} Y \iff \varphi_X(\lambda) = \varphi_Y(\lambda) \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Dans certains cas, on peut définir les transformées de Laplace de variables non nécessairement positives :

Transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne : Soit X une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, i.e. une v.a.r. de densité donnée par

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = e^{(\lambda m + \lambda^2\sigma^2/2)}$$

pour tout $\lambda \in I\!R$. Réciproquement, si X une v.a.r. ayant cette transformée de Laplace, alors $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Propriétés de l'espérance. (a) **Linéarité** : si X, Y sont des v.a.r. intégrables, alors pour tout $a, b \in I\!R$ $aX + bY$ est intégrable et $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

(b) **Positivité** : si $X \leq Y$ p.s. alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. En particulier, si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$. De plus, si $X \geq 0$ p.s. et si $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ p.s.

(c) **Inégalité de Jensen** : si Φ est une fonction convexe et X une v.a.r. telle que $\Phi(X)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] \geq \Phi(\mathbb{E}[X]).$$

Définition 2.4 *Une famille* $\{X_i,\ i \in I\}$ *de v.a.r. dans* $L^1(\Omega)$ *est dite* **uniformément intégrable** (U.I.) *si*

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|\, \mathbb{1}_{|X_i|>n}] \ \to\ 0$$

quand $n \uparrow +\infty$.

Définition 2.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On dit que deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont* ***indépendantes*** *si $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_1$ et $B \in \mathcal{F}_2$. On notera alors $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$.*

Définition 2.6 *Une variable aléatoire X est* ***indépendante d'une sous-tribu*** *$\mathcal{G}$ si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes. En particulier, deux variables X et Y sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.*

Si X et Y sont des variables indépendantes ayant une densité sur $\mathbb{R}$, alors le couple (X, Y) a une densité sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Définition 2.7 *Une famille de sous-tribus $\{\mathcal{F}_i,\ i \in I\}$ est indépendante si toutes les sous-familles finies le sont, c'est-à-dire si*

$$P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} P[A_{i_k}]$$

pour tout $n \geq 2$ et pour tout $A_{i_k} \in \mathcal{F}_{i_k}$ avec $i_{k_1} \neq i_{k_2}$ si $k_1 \neq k_2$.

Théorème 2.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *et* X *une v.a.r. intégrable. Il existe une unique v.a.r.* Z $\mathcal{G}$*-mesurable telle que*

$$\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_A\right] \;=\; \mathbb{E}\left[Z \mathbb{1}_A\right]$$

pour tout $A \in \mathcal{G}$*. On appelle* Z *l'* ***espérance conditionnelle*** *de* X *sachant* $\mathcal{G}$ *et on note* $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ *Elle est caractérisée par*

$$\mathbb{E}(XG) = \mathbb{E}(ZG),\ \forall G, \textit{v.a. bornée}\, \mathcal{G}\textit{-mesurable.}$$

L'espérance conditionnelle possède les propriétés suivantes

(a) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\,|\mathcal{G}\,]] \;=\; \mathbb{E}[X]$.

(b) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}[X\,|\mathcal{G}\,] = X$.

(c) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{G}\,] = \mathbb{E}[X]$.

(d) Si $\mathcal{G}$ est la tribu triviale, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Si Y est $\mathcal{H}$ mesurable et si XY est intégrable, $\mathbb{E}[XY\,|\,\mathcal{H}\,] = Y\,\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{H}]\,]$

(f) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors
$\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{H}\,] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{G}]\,|\,\mathcal{H}\,] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{H}]\,|\,\mathcal{G}\,]$

(f) Si $X \perp Y$ et si $\varphi : I\!R^2 \to I\!R$ est une fonction borélienne bornée, alors
$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)\,|\,Y] = \mathbb{E}[\varphi(X,y)]_{y=Y}$: pour calculer $\mathbb{E}[\phi(X,Y)\,|\,Y]$, on explicite la fonction Ψ telle que $\Psi(y) = \mathbb{E}[\phi(X,y)]$, puis on remplace y par Y pour obtenir la v.a. $\Psi(Y)$.

3 Théorème de Radon-Nikodym

Soient P et Q deux probabilités définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) On dit que P est **absolument continue** par rapport à Q et on écrit $P \ll Q$ si pour tout $A \in \mathcal{F}$, $P[A] = 0 \Rightarrow Q[A] = 0$ *(*les négligeables pour P sont aussi négligeables pour Q*)*.

(b) On dit que P et Q sont **équivalentes** et on écrit $P \sim Q$ si pour tout $A \in \mathcal{F}$, $P[A] = 0 \Leftrightarrow Q[A] = 0$ P et Q ont les mêmes négligeables.

Soit X une v.a. de loi

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

sous P et soit

$$Z = \exp[h(X - m) - h^2\sigma^2/2]$$

Si on pose $dQ = ZdP$, alors sous Q, X est une v.a. de loi

$$\mathcal{N}(m + h\sigma^2, \sigma^2)$$

4 Vecteurs Gaussiens

Définition 4.1 *Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est un* ***vecteur gaussien*** *si pour tout vecteur déterministe $u = (u_1, \ldots, u_n)$, la variable aléatoire*

$$(u, X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} u_i X_i$$

est une variable gaussienne à valeurs réelles.

Théorème 4.2 *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien. Il existe un vecteur $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $(n \times n)$, symétrique positive σ tels que la transformée de Fourier de X est donnée par*

$$\mathbb{E}\left[e^{i(u,X)}\right] \;=\; \exp\left[i(u,\Gamma) - {}^t u\, \sigma u/2\right].$$

5 Convergence de variables aléatoires

Convergence presque sûre. Une suite de variables aléatoires X_n converge p.s. vers X si

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \text{quand } n \to \infty,$$

pour P presque tout ω. Cette notion de convergence dépend du choix de P mais évidemment, si $Q \sim P$, alors $X_n \to X$ P p.s. $\Leftrightarrow$ $X_n \to X$ Q p.s.

Théorème 5.1 **[Théorème de convergence monotone]** *Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite croissante (ou décroissante) de variables aléatoires et soit $X = \lim X_n$ p.s. Supposons que X soit intégrable. Alors $\mathbb{E}[X] = \lim \mathbb{E}[X_n]$.*

Théorème 5.2 **[Théorème de convergence dominée]** *Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires convergeant p.s. vers X. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| \leq Y$, alors X est intégrable et $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ quand $n \uparrow +\infty$.*

Convergence en probabilité. Une suite $\{X_n,\ n \geq 0\}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers X si

$$P[|X_n - X| \geq \varepsilon] \ \rightarrow \ 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Convergence dans les L^p. Une suite $\{X_n,\ n \geq 0\}$ de variables aléatoires dans L^p converge vers X dans L^p si

$$\|X_n - X\|_p \ = \ \mathbb{E}[|X_n - X|^p]^{1/p} \ \rightarrow \ 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. R

Convergence en loi. Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers X si

$$\mathbb{E}[\Phi(X_n)] \ \rightarrow \ \mathbb{E}[\Phi(X)]$$

quand $n \rightarrow \infty$, pour toute fonction Φ continue bornée.

Martingales et temps d'arrêt

Généralités sur les processus stochastiques

Temps d'arrêt

Martingales

1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *une famille de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*. On dit que* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *est une* ***filtration*** *si c'est une famille croissante, au sens où* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *si* $s \leq t$*.*

Une filtration est dite *normale* si elle vérifie deux propriétés supplémentaires :

• Les négligeables au sens large sont dans tous les $\mathcal{F}_t$ au sens où $P[A] = 0 \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{F}_0$.

• La filtration est continue à droite au sens où

$$\mathcal{F}_t^X \;=\; \mathcal{F}_{t+}^X \;\stackrel{def}{=}\; \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^X .$$

Définition 1.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *est un espace de probabilité filtré. Une famille* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *de v.a. sur* Ω *est appelée un* processus stochastique. *On dit que le processus* X *est* $(\mathcal{F}_t)$***-adapté*** *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \geq 0$.

A un processus stochastique X on peut associer sa **filtration naturelle** complétée $\left\{\mathcal{F}_t^X,\ t \geq 0\right\}$, définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\sigma(X_s,\ s \leq t), \mathcal{N})$

Définition 1.3 *On dit que deux processus* X *et* Y *sont égaux en loi et on écrit* $X \overset{law}{=} Y$ *si pour tout* $n \in I\!N$ *et pour tout* $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *on a*

$$\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\} \overset{law}{=} \{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}\}.$$

On dit aussi que X *et* Y *sont des* versions *l'un de l'autre.*

Propriétés fonctionnelles. (a) Un processus X est **croissant** si p.s. $t \to X_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dire si $X_t(\omega) \leq X_s(\omega)$ pour tout $t \leq s$, p.s. De même, on dira qu'un processus est continu à droite, continu, dérivable, de classe $\mathcal{C}^2$... etc si la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ vérifie p.s. la propriété considérée.

(b) Un processus X est dit à **variation finie** (V.F.) sur $[0, t]$ si

$$\sup_{0 \leq t_0 < \ldots < t_n \leq t} \left(\sum_{k=0}^{n} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| \right) < +\infty.$$

Processus Gaussiens. Un processus X est appelé un **processus gaussien** si toute combinaison linéaire finie de X_t est une variable aléatoire gaussienne, autrement dit si pour tout $n \in I\!N$, $t_1 \dots t_n$, $a_1 \dots a_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

est une variable gaussienne. Un processus gaussien est caractérisé par deux fonctions : sa **fonction espérance** $t \mapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et sa **fonction de covariance** $(s,t) \mapsto \Gamma(s,t) = \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$.

L'*espace gaussien* engendré par un processus gaussien X est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r. centrées $\{X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0\}$.

2 Temps d'arrêt

Définition 2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *un espace de probabilité filtré. Un* ***temps d'arrêt*** *relativement à* $(\mathcal{F}_t)$ *est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *telle que*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

L'exemple le plus simple de temps d'arrêt est un temps déterministe $t_0 \geq 0$.

Soit $\{X_t,\, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs réelles, continu à droite et partant de 0 ($X_0 = 0$). Pour tout $a > 0$, le temps aléatoire suivant

$$T_a \;=\; \inf\{t > 0,\; X_t > a\}\,,$$

appelé **premier temps de passage au seuil** a, est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.

Définition 2.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* τ *un temps d'arrêt relativement à* $(\mathcal{F}_t)$*. On appelle* ***filtration arrêtée en*** τ *la* σ*-algèbre*

$$\mathcal{F}_\tau \;=\; \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall\, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Proposition 2.3 *Si S et T sont des temps d'arrêt tels que p.s. $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Définition 2.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$***-martingale*** *si*

- $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ *(autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$*) pour tout* $t \geq 0$.
- $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ *pour tout* $s \leq t$.

La propriété fondamentale (et constamment utilisée en finance) d'une martingale est que pour tout horizon $T > 0$, l'ensemble du processus $\{X_t,\ t \leq T\}$ est complètement déterminé par la *valeur terminale* X_T au sens où $X_t = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t]$ pour tout $t \leq T$.

Définition 2.5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté tel que* $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ *pour tout* $t \geq 0$*. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$-sousmartingale *(resp.* $(\mathcal{F}_t)$-surmartingale*) si* $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ *(resp.* $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$*) pour tout* $s \leq t$*.*

Théorème 2.6 [Décomposition de Doob-Meyer] *Soit X une sous-martingale relativement à $\mathcal{F}_t$ telle que la famille* $\{X_T,\ T\ (\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt borné$\}$ *est UI. Il existe une $(\mathcal{F}_t)$-martingale M et un processus croissant $(\mathcal{F}_t)$-adapté A tel que*

$$X_t \ = \ M_t \ + \ A_t$$

pour tout $t \geq 0$. De plus, M et A sont uniques à constante additive près.

Par l'inégalité de Jenssen, on voit immédiatement que si X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, alors le processus $t \mapsto X_t^2$ est une $(\mathcal{F}_t)$-sous-martingale. Sous réserve d'UI, la décomposition de Doob-Meyer assure l'existence d'un unique processus croissant A tel que $(X_t^2 - A_t,\ t \geq 0)$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (on peut en fait se passer de la condition d'UI). On appelle A le *crochet* de la martingale X et on utilise la notation

$$A_t \ = \ < X >_t$$

pour tout $t \geq 0$.

Si T est un temps d'arrêt et M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, le processus Z défini par $Z_t = M_{t\wedge T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale et $\mathbb{E}[M_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0]$.

Proposition 2.7 *Si une martingale M continue est un processus à variations finies, alors elle est constante : $M_t = M_0$ p.s. pour tout $t \geq 0$.*