Introduction aux modèles poissonniens

Processus ponctuels sur $\mathbb{R}^+$

L'hypothèse de Poisson

La propriété de Markov forte et ses conséquences

Une formule d'Itô avec sauts

Des martingales

Exemple de changement de probabilité

1 Processus ponctuels sur $\mathbb{R}^+$

Un processus ponctuel est la donnée d'une suite ordonnée de variables aléatoires positives

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots$$

qui modélisent les instants de saut d'un certain phénomène. On fait l'hypothèse que $T_{n+1} \neq T_n$ p.s. On suppose aussi que $T_n \uparrow +\infty$ p.s.

Pour tout $t \geq 0$ on introduit

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

et on dit que $\{N_t,\ t \geq 0\}$ est le **processus de comptage** associé à la suite $\{T_n,\ n \geq 0\}$. On a

$$\{N_t < n\} = \{T_n > t\}\,,\ \{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$\{N_t,\ t \geq 0\}$ est un processus continu à droite .

2 L'hypothèse de Poisson

Cette hypothèse formule une hypothèse d'indépendance et de stationnarité sur le processus $\{N_t,\ t \geq 0\}$ identique à celle du Brownien :

Définition 2.1 *Soit* $\{T_n,\ n \geq 0\}$ *un processus ponctuel sur* $\mathbb{R}^+$. *On dit que c'est un* processus ponctuel de Poisson (P.P.P) *si le processus de comptage associé* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *est un* ***P.A.I.S.*** *Autrement dit, si* $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s,\ s \leq t\} \vee \mathcal{N}$ *désigne la filtration naturelle complétée du processus* N, *alors pour tout* $t, s \geq 0$ *la v.a.* $N_{t+s} - N_t$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_t^N$ *et a même loi que* N_s.

Théorème 2.2 [Théorème de structure poissonnien] *Soit* $\{T_n,\ n \geq 0\}$ *un processus ponctuel de Poisson sur* $\mathbb{R}^+$*. Alors il existe* $\theta > 0$ *tel que pour tout* $t > 0$*, la v.a.* N_t *suit la loi de Poisson d'intensité* θt*. Autrement dit, pour tout* $t > 0, k \in \mathbb{N}$*,*

$$P\left[N_t = k\right] \;=\; e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}.$$

On dit que θ *est* l'intensité *du processus* $\{T_n,\ n \geq 0\}$*.*

Comme conséquence de l'indépendance et de la stationnarité des accroissements de N, on obtient immédiatement que la loi conditionnelle de la v.a. $(N_{t+s} - N_t)$ sachant $\mathcal{F}_t^N$ est la loi de Poisson de paramètre θs, autrement dit que

$$P\left[N_{t+s} - N_t = k \mid \mathcal{F}_t^N\right] \;=\; P\left[N_s = k\right] \;=\; e^{-\theta s}\frac{(\theta s)^k}{k!}$$

pour tout $k \geq 0$. On peut aussi calculer la loi de $T_i - T_{i-1}$

$$T_i - T_{i-1} \;\sim\; \mathrm{Exp}(\theta).$$

3 La propriété de Markov forte et ses conséquences

Soit $\{N_t,\ t \geq 0\}$ un processus de comptage de Poisson d'intensité $\theta > 0$. Par hypothèse, c'est un P.A.I.S. au sens où pour tous $s, t \geq 0$, la v.a. $N_{t+s} - N_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t^N$ et a même loi que N_s, $\left\{\mathcal{F}_t^N,\ t \geq 0\right\}$ désignant la filtration naturelle complétée du processus N. Rappelons qu'un *temps d'arrêt* T pour cette filtration est une v.a. positive telle que

$$\{T \leq t\} \ \in \ \mathcal{F}_t^N$$

pour tout $t \geq 0$. Si T est un temps d'arrêt, on peut alors définir la σ-algèbre

$$\mathcal{F}_T^N \ = \ \left\{A \in \mathcal{F}_\infty^N \ / \ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N \ \text{ pour tout } t \geq 0\right\}.$$

Théorème 3.1 *Pour tout temps d'arrêt T et tout temps déterministe $t \geq 0$, la v.a. $N_{T+t} - N_T$ est indépendante de $\mathcal{F}_T^N$ et a même loi que N_t.*

4 Une formule d'Itô avec sauts

Nous terminons ce chapitre par une courte évocation du calcul stochastique discontinu, via la formule d'Itô avec sauts. Soit N un processus de comptage de Poisson. Soit $t \mapsto \theta_t$ un processus *quelconque*. On peut définir l'intégrale stochastique

$$I_t^\theta \;=\; \int_0^t \theta_s \, dN_s \;=\; \sum_{n \geq 1} \theta_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

ce que l'on va également écrire

$$I_t^\theta \;=\; \sum_{0 < s \leq t} \theta_s \, \Delta N_s \, .$$

Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction mesurable *quelconque*. On a $f(N_t) = f(0)$ si $t < T_1$, $f(N_t) = f(N_{T_1})$ si $T_1 \leq t < T_2$... ce qu'on peut récrire

$$\begin{aligned} f(N_t) &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \big(f(N_{T_i}) - f(N_{T_{i-1}})\big) \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} (f(N_{T_i}) - f(N_{T_i-})) \\ &= f(0) + \sum_{s \leq t} (f(N_s) - f(N_{s-})) \end{aligned}$$

sur l'événement $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$. Comme le dernier terme ne dépend pas de n on en peut en déduire le

Théorème 4.1 [Formule d'intégration pour le processus de Poisson] *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable on a*

$$f(N_t) \quad = \quad f(0) \; + \; \sum_{s \leq t} (f(N_s) - f(N_{s-}))$$

Théorème 4.2 [Deuxième formule d'intégration pour le processus de Poisson] *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ on a*

$$f(N_t) \quad = \quad f(0) \; + \; \int_0^t (f(N_{s-} + 1) - f(N_{s-}))\, dN_s.$$

5 Des martingales

Proposition 5.1 *Pour tout $\alpha \in I\!R, \beta > -1$, pour toute fonction bornée h, les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales :*

(i) $\quad M_t = N_t - \lambda t,$

(ii) $\quad M_t^2 - \lambda t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t,$

(iii) $\quad (a) \quad \exp(\alpha N_t + \lambda t(1 - e^{\alpha})),$

$(b) \quad \exp[\ln(1+\beta)N_t - \lambda\beta t] = (1+\beta)^{N_t} e^{-\lambda\beta t},$

$(c) \quad \exp\Big[\int_0^t h(s)dN_s - \lambda \int_0^t (1 - e^{h(s)})ds\Big]$

Si H est un processus borné $(\mathcal{F}_t)$**-prévisible,** les processus suivants sont des martingales

$$M_t^H \stackrel{def}{=} \int_0^t H_s dN_s - \lambda \int_0^t H_s ds = \int_0^t H_s dM_s \tag{5.1}$$

$$Y_t^H \stackrel{def}{=} (M_t^H)^2 - \lambda \int_0^t H_s^2 ds \tag{5.2}$$

$$Z_t^H \stackrel{def}{=} \exp\left(\int_0^t H_s dN_s + \lambda \int_0^t (1 - e^{H_s}) ds \right) \tag{5.3}$$

La formule d'Itô est

$$
\begin{aligned}
f(N_t) &= f(0) + \int_0^t (f(N_{s-}+1) - f(N_{s-}))\, dM_s \\
&\quad -\theta \int_0^t (f(N_{s-}+1) - f(N_{s-})\, ds
\end{aligned}
$$

5.1 Exemple de changement de probabilité

Si N est un PP d'intensité λ, alors le processsus

$$L_t = 2^{N_t} e^{-\lambda t} = e^{N_t - \lambda t} \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s}$$

est une martingale solution de $dL_t = L_{t-} dM_t$. Soit Q la probabilitédéfinie par $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = L_t$. Alors

$$E^Q(x^{N_t}) = \exp(2\lambda t(x-1))$$

et le processus N a des A.I. sous Q.

Il en résulte que N est un Q-processus de Poisson process d'intensité 2λ.