Intégrale stochastique

Plan

L'intégrale stochastique générale

Intégrale de Wiener

Exemples

Processus d'Itô

Formule d'Itô

Formule de Black & Scholes

Le processus B est un mouvement Brownien et $\left\{\mathcal{F}_t^B,\ t \geq 0\right\}$ est sa filtration naturelle.

1 L'intégrale stochastique générale

On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s \, dB_s$$

quand $\{\theta_s, \ s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Définition 1.1 *On dit que* $\{\theta_t, \ t \geq 0\}$ *est un* bon processus *s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)$*-adapté, càglàd, et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right] < +\infty$$

pour tout $t > 0$.

1.1 Cas des processus étagés

Ce sont les processus du type

$$\theta_t^n \;=\; \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

où $p_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_{p_n}$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$ pour tout $i = 0, \ldots, p_n$. On définit

$$I_t(\theta^n) \;=\; \int_0^t \theta_s^n \, dB_s \;=\; \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

Propriétés:

$$
\begin{aligned}
E\left[I_t(\theta^n)\right] &= 0 \\
\operatorname{Var}\left[I_t(\theta^n)\right] &= E\left[\int_0^t \left(\theta_s^n\right)^2\, ds\right].
\end{aligned}
$$

Les processus $I_t(\theta^n)$ et $I_t^2(\theta^n) - \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds$ sont des martingales.

1.2 Cas général

Si θ est un bon processus, il existe $\{\theta^n,\ n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$E\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2\, ds\right] \;\to\; 0$$

quand $n \uparrow +\infty$. Il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$E\left[\left|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)\right|^2\right] \;\to\; 0$$

quand $n \uparrow +\infty$. On pose

$$I_t(\theta) \;=\; \int_0^t \theta_s\, dB_s$$

pour tout $t \geq 0$.

Propriétés:

$$\begin{aligned} E\left[I_t(\theta)\right] &= 0 \\ \operatorname{Var}\left[I_t(\theta)\right] &= E\left[\int_0^t \theta_s^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

Linéarité :

$$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) \;=\; a_1 I_t(\theta^1) \;+\; a_2 I_t(\theta^2).$$

Propriétés de martingale : Pour tout bon processus θ, les processus

$$t \;\mapsto\; I_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \;\mapsto\; I_t(\theta)^2 \;-\; \int_0^t \theta_s^2 ds$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-**martingales** continues.

$$E\left[(I_t(\theta) - I_s(\theta))^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[\int_s^t \theta_u^2 du \;\middle|\mathcal{F}_s^B\right].$$

Propriété d'isométrie : Pour tous bons processus φ, θ et tout $s, t \geq 0$, on a

$$E\left[I_s(\varphi) I_t(\theta)\right] \;=\; E\left[\int_0^{s\wedge t} \theta_u \varphi_u \, du\right].$$

Le processus

$$I_t(\theta) I_t(\varphi) - \int_0^t \theta_u \varphi_u \, du$$

est une $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale.

Proposition 1.2 *Pour tout $t \geq 0$ on a*

$$\int_0^t B_s \, dB_s \;=\; \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Il est possible de définir $I_t(\theta)$ sous la seule condition

$$\int_0^t \theta_s^2\, ds \;<\; +\infty \quad \text{p.s.}$$

Cependant, $t \mapsto I_t(\theta)$ n'est plus nécessairement une martingale.

Définition 1.3 *Soit* $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ *une filtration et* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-**martingale locale** s'il existe une suite* $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$ *de* $(\mathcal{F}_t)$*-temps d'arrêt telle que*

$$P\left[\tau_n \to +\infty\right] \;=\; 1$$

et le processus $X^n : t \mapsto X_{t\wedge\tau_n}$ *est une martingale pour tout* $n \geq 0$.

Définition 1.4 *On dit que* $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ *est un* bon processus local *s'il est càglàd,* $(\mathcal{F}_t^B)$*-adapté, et si*

$$\int_0^t \theta_s^2\, ds \;<\; +\infty \quad \textit{p.s.}$$

pour tout $t > 0$.

Soit θ un bon processus local. On peut définir $I_t(\theta)$ pour tout $t > 0$, qui est une martingale locale. De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt, on montre que le processus

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds$$

est une martingale locale.

1.3 Le crochet

Définition 1.5 *Si Z est une martingale locale continue , $< Z >$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $t \mapsto Z_t^2 - < Z >_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.*

Par polarité, on peut définir le crochet de deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales M et N en écrivant

$$< M, N >_t = \frac{1}{2} \left(< M + N >_t - < M >_t - < N >_t \right).$$

Le crochet $< M, N >$ est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - < M, N >$ soit une martingale locale.

Enfin, la proposition suivante donne enfin de $< M, N >$ une importante construction trajectorielle :

Proposition 1.6 *Soient M et N deux martingales locales continues. Alors p.s. pour tout $t \geq 0$,*

$$< M, N >_t \; = \; \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

où $\{t_i^n, \; i = 0 \ldots 2^n\}$ désigne la subdivision régulière sur $[0, t]$.

$$< I(\theta) >_t = \int_0^t \theta_s^2 \, ds \quad \text{et} \quad < I(\theta), I(\varphi) >_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds.$$

On dit que deux martingales continues sont *orthogonales* si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale. Par exemple, deux Browniens indépendants sont des martingales orthogonales.

2 Cas particulier: Intégrale de Wiener

2.1 Définition

On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2\, ds < \infty$.
C'est un espace de Hilbert pour la norme
$||f||_2 = \left(\int_0^{\infty} f^2(s)\, ds\right)^{1/2}$.

2.1.1 a. Fonctions en escalier

Pour $f = \mathbb{1}_{]u,v]}$, on pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = B(v) - B(u)$.
Soit f une fonction en escalier, $f(s) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} \mathbb{1}_{]t_i;t_{i+1}]}(s)$ on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} \left(B(t_i) - B(t_{i-1}) \right).$$

La variable aléatoire $I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ est une **variable gaussienne** d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$.

L'intégrale est linéaire : $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Si f et g sont des fonctions en escalier $E(I(f)\, I(g)) = \int_{R^+} f(s)\, g(s)\, ds$. Le processus I est un processus gaussien, c'est une martingale.

2.1.2 b. Cas général

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}^+)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^\infty |f_n - f|^2(x)\, dx \to_{n\to\infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a. $F_n = \int_0^\infty f_n(s)\, dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \to_{n,m\to\infty} 0$), donc elle est convergente. On pose

$$I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty f(s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s)\, dB_s$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.

On dit que $I(f)$ est **l'intégrale stochastique** (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à B.

Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a. $\int_0^\infty f(s)dB_s$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

2.2 Propriétés

• L'application $f \to I(f)$ est linéaire

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

et **isométrique** de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$

$$E\left(I(f)\, I(g)\right) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s) g(s)\, ds.$$

• La variable $I(f)$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s) ds$ appartenant à l'espace gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t

$$E\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s) dB_s\right) = \int_0^t f(s) ds\,. \tag{2.1}$$

La propriété (2.1) est en fait une caractérisation de l'intégrale stochastique au sens où si pour tout t, $E(ZB_t) = \int_0^t f(s)ds$, alors

$$Z = \int_0^\infty f(s)dB_s.$$

2.3 Processus lié à l'intégrale stochastique

De la même façon on définit $\int_0^t f(s)dB_s$ pour f telle que $\int_0^T |f(s)|^2\,ds < \infty,\ \forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions. On notera L^2_{loc} cette classe de fonctions.

Théorème 2.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s) dB_s$.

a) Le processus M *est une* ***martingale continue****, la v.a.* M_t *est d'espérance* 0 *et de variance* $\int_0^t f^2(s)\, ds$.

b) Le processus M *est un* ***processus gaussien*** *centré de covariance* $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\, du$ *à accroissements indépendants.*

c) Le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\, ds\,,\, t \geq 0)$ *est une martingale.*

d) Si f *et* g *sont dans* L^2_{loc}*, on a*

$$E(\int_0^t f(u) dB_u \int_0^s g(u) dB_u) = \int_0^{t\wedge s} f(u) g(u) du\,.$$

2.4 Intégration par parties

Théorème 2.2 *Si f est une* ***fonction*** *de classe C^1,*

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s\,ds.$$

On peut aussi écrire cette formule

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt\,.$$

3 Exemples

3.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Théorème 3.1 *L'équation de Langevin*

$$V_t = -\int_0^t aV_s ds + \sigma B_t + V_0, \tag{3.1}$$

a pour unique solution

$$V_t = e^{-ta}V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s. \tag{3.2}$$

On écrit l'équation (3.1) sous forme condensée

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t, \quad V_0 \text{ donné}$$

les données du problème sont la variable aléatoire V_0, le Brownien B et les constantes a et σ.

Proposition 3.2 *Le processus V, appellé* ***processus d'Ornstein-Uhlenbeck*** *est gaussien d'espérance et de covariance*

$$E(V_t) = e^{-ta} V,$$

$$\mathrm{cov}[V_s, V_t] = \int_0^s e^{-(s-u)a} \sigma^2 e^{-(t-u)a} \, du \, , \; s \leq t$$

En particulier, si V_0 est une constante ($v = 0$)

$$\mathrm{cov}[V_s, V_t] = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)} (e^{2as} - 1)$$

et $\mathrm{Var}(V_t) = \dfrac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$.

En écrivant

$$\begin{aligned} V_s &= e^{-sa}V_0 + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma dB_u \\ V_s e^{(s-t)a} &= e^{-ta}V_0 + \int_0^s e^{-(t-u)a}\sigma dB_u \end{aligned}$$

on en déduit, pour $s \leq t$

$$V_t = V_s e^{-(t-s)a} + \int_s^t e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$$

ou encore

$$V_{t+s} = V_s e^{-ta} + \int_0^t e^{-(t-u)a}\sigma d\widetilde{B}_u$$

où le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_u = B_{s+u} - B_s$ est un MB indépendant de $\mathcal{F}_s$ (donc de V_s).

En particulier
$E(f(V_{t+s})|\mathcal{F}_s) = E(f(V_s e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = E(f(V_{t+s})|V_s)$ (dans cette égalité Y est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_s$) ce qui établit le caractère markovien de V.

Le calcul explicite peut se faire en utilisant que

$$E(f(V_s^{(x)} e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = \Psi(V_s^{(x)})$$

avec $\Psi(y) = E(f(ye^{-ta} + Y)) = E(f(V_t^{(y)}))$ où $V^{(x)}$ est la solution de l'équation de valeur initiale x, soit
$V_t^{(x)} = e^{-ta}x + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s$.

Proposition 3.3 *La variable aléatoire* $\int_0^t V_s ds$ *est une v.a. gaussienne, de moyenne* $V_0 \frac{1-e^{-at}}{a}$ *et de variance*
$-\dfrac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-at})^2 + \dfrac{\sigma^2}{a^2}(t - \dfrac{1-e^{-at}}{a})$.

3.2 Modèle de Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t. \tag{3.3}$$

La forme explicite de la solution est

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u.$$

L'égalité

$$r_t = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u, \ s \leq t$$

établit le caractère Markovien de r.

• Si r_0 est une constante, r_t est une variable gaussienne de moyenne $(r_0 - b)e^{-at} + b$, et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$.

• En particulier, ce n'est pas une variable positive.

• Le processus r est gaussien de covariance $Cov(r_s, r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)}(e^{2as} - 1)$ pour $s \leq t$.

Proposition 3.4 *Pour tout $s < t$, l'espérance et le variance conditionnelle de r sont*

$$
\begin{aligned}
E(r_t|r_s) &= (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b \\
var_s\ (r_t) &= \frac{\sigma 2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})
\end{aligned}
$$

Proposition 3.5 *La variable $\int_0^t r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne*

$$E(\int_0^t r_s ds) = bt + (r_0 - b)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

et de variance $-\dfrac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-at})^2 + \dfrac{\sigma^2}{a^2}(t - \dfrac{1 - e^{-at}}{a})$.

On en déduit

$$E(\exp - \int_s^t r_u \, du \,|\mathcal{F}_s) = \exp(-M(t,s) + \frac{1}{2}V(t,s))\,.$$

Ces calculs sont utiles pour valoriser des zéro-coupons en finance : si $B(t,T)$ est la valeur d'un ZC de maturité T, on a

$$B(t,T) = E(\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)|\mathcal{F}_t)$$

et

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp\left[b(T-t) + (r_t - b)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right. \\ &\quad \left. -\frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a})\right] \end{aligned}$$

4 Processus d'Itô

Ce sont des processus écrits sous la forme

$$X_t \;=\; x \;+\; \int_0^t b_s \, ds \;+\; \int_0^t \sigma_s \, dB_s \tag{4.1}$$

où b est un processus $\mathbf{F}_t^B$-adapté tel que

$$\int_0^t |b_s| \, ds \;<\; +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour tout $t \geq 0$, et σ un bon processus local. On utilise la notation formelle

$$\begin{aligned} dX_t &= b_t \, dt + \sigma_t \, dB_t \\ X_0 &= x \, . \end{aligned}$$

Le coefficient b s'appelle la *dérive* (ou le *drift*) du processus, et σ son coefficient de diffusion.

Le processus

$$t \ \mapsto \ x \ + \ \int_0^t b_s \, ds$$

est la *partie à variation finie* de X, et le processus

$$t \ \mapsto \ \int_0^t \sigma_s \, dB_s$$

la *partie martingale* de X (c'est a priori une martingale locale). La décomposition (4.1) du processus X est unique, au sens où si X admet une autre décomposition

$$X_t \ = \ x \ + \ \int_0^t \tilde{b}_s \, ds \ + \ \int_0^t \tilde{\sigma}_s \, dB_s,$$

alors $b \equiv \tilde{b}$ et $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$. En particulier, X sous la forme (4.1) est une martingale locale si et seulement si $b \equiv 0$.

En fait, cette représentation des martingales locales dans une filtration Brownienne est caractéristique, indépendamment de ce que le processus soit *a priori* un processus d'Itô :

Théorème 4.1 [Théorème de représentation des martingales locales] *Soit B un mouvement brownien et M une $\mathcal{F}_t^B$-martingale locale continue. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ bon processus local tel que*

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s \, dB_s.$$

Ce théorème est extrémement important en Finance (marché complet).

Si X^1 et X^2 sont deux processus d'Itô de décomposition

$$X_t^i \;=\; x \;+\; \int_0^t b_s^i\, ds \;+\; \int_0^t \sigma_s^i\, dB_s$$

pour $i = 1, 2$, leur crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales. Autrement dit

$$< X^1, X^2 > = \; < I(\sigma^1), I(\sigma^2) >= \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds.$$

5 Formule d'Itô

On se donne un processus d'Itô réel X de décomposition (4.1) et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière.

Théorème 5.1 [Première formule d'Itô] *Supposons f de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Si f est à dérivées bornées, et σ borné, le processus $f(X_t) - \int_0^t f'(X_s)b_s\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$ est une martingale.

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(f'(X_t) b_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 \right) dt + f'(X_t) \sigma_t dB_t \\
&= f'(X_t) b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X \rangle_t + f'(X_t) \sigma_t dB_t .
\end{aligned}
$$

On utilise souvent la notation

$$
df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) dX_t \cdot dX_t
$$

avec la table de multiplication

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

En particulier, $t \mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô de dérive

$$\int_0^t \left(f'(X_s) b_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \sigma_s^2 \right) ds$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s) \sigma_s \, dB_s.$$

Quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale, et on en déduit :

$$\begin{aligned} E\left[f(X_t)\right] &= E\left[f(X_0)\right] + \int_0^t E\left[f'(X_s) b_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \sigma_s^2 \right] ds \\ E\left[f(X_t) \,\middle|\, \mathcal{F}_s^B\right] &= f(X_s) + E\left[\int_s^t \left(f'(X_u) b_u + \frac{1}{2} f''(X_u) \sigma_u^2 \right) du \,\middle|\, \mathcal{F}_s^B \right] \end{aligned}$$

Théorème 5.2 [Deuxième formule d'Itô] *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x. On a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0)+\int_0^t f_t'(s,X_s)ds+\int_0^t f_x'(s,X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)\sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \left(f_t'(t,X_t)+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,X_t)\sigma_t^2\right)dt + f_x'(t,X_t)dX_t \\ &= f_t'(t,X_t)dt+f_x'(t,X_t)dX_t+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,X_t)d\langle X\rangle_t. \\ &= \left(f_t'(t,X_t)+f_x'(t,X_t)b_t+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,X_t)\sigma_t^2\right)dt \\ &\quad +f_x'(t,X_t)\sigma_t dB_t \end{aligned}$$

Exemple fondamental: Le **mouvement brownien géométrique**, ou **processus log-normal** est défini par l'équation

$$X_t \;=\; x \;+\; \mu \int_0^t X_s \, ds \;+\; \sigma \int_0^t X_s \, dB_s$$

avec $\mu, \sigma \in I\!R$. On montre que

$$X_t \;=\; x \exp \left[\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2 \right] .$$

Dans le cas où μ et σ sont des fonctions déterministes :

$$X_t \;=\; x \;+\; \int_0^t \mu(s) X_s \, ds \;+\; \int_0^t \sigma(s) X_s \, dB_s$$

$$X_t = X_0 \exp - \left[\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \, . \right]$$

Théorème 5.3 [Troisième formule d'Itô] *Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp. de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp. b^2), de coefficient de diffusion σ^1 (resp. σ^2) et portés respectivement par deux Browniens B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\mathcal{F}_t^{B^i}$-adaptés. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées. On a*

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'(X_s^1, X_s^2)\, dX_s^1 + \int_0^t f_2'(X_s^1, X_s^2)\, dX_s^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left(f_{11}''(X_s^1, X_s^2)\left(\sigma_s^1\right)^2 + 2\,\rho\, f_{12}''(X_s^1, X_s^2)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''(X_s^1, X_s^2)\left(\sigma_s^2\right)^2 \right) ds$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

Proposition 5.4 [Formule d'intégration par parties]

$$X_t^1 X_t^2 \;=\; x_1 x_2 \;+\; \int_0^t X_s^1 \, dX_s^2 \;+\; \int_0^t X_s^2 \, dX_s^1 \;+\; \rho \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 \, ds.$$

$$d(X^1 X^2)_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + d\langle X^1, X^2 \rangle_t \, .$$

6 Formule de Black & Scholes

On considère un marché financier comportant un actif dit sans risque de taux constant r et de prix $S_t^0 = e^{rt}$ et un actif risqué dont le prix S vérifie

$$dS_t \;=\; b\, S_t\, dt \;+\; \sigma\, S_t\, dB_t$$

soit

$$S_t \;=\; S_0 \exp\left[\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t\right]$$

On fixe un horizon $T > 0$ et on souhaite donner le prix d'un actif financier qui versera $h(S_T)$ à la date T.

Le cas d'un **call Européen** de maturité T et de strike K correspond au cas $h(x) = (x - K)^+$.

On procède par duplication (hedging): on forme un portefeuille constitué d' α parts de l'actif sans risque (le montant de la richesse investie dans cet actif est αe^{rt}) et de β_t parts de l'actif risqué.

On va trouver un portefeuille **auto-financant** de valeur terminale $h(S_T)$. La valeur de ce portefeuille à la date t est

$$V_t \;=\; \alpha_t S_t^0 \;+\; \beta_t S_t\,.$$

La condition d'*auto-financement* se formalise par

$$dV_t \;=\; \alpha_t dS_t^0 \;+\; \beta_t dS_t\,;$$

soit

$$dV_t \;=\; rV_t dt + \beta_t S_t\left((b-r)dt + \sigma dB_t\right)$$

On suppose que la valeur du portefeuille à la date t est une fonction déterministe du temps et de la valeur de l'actif risqué, soit $V(t, S_t)$.

En utilisant la deuxième formule d'Itô, on calcule

$$\begin{aligned} dV_t &= \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + b\, S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt \\ &+ \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \right) dB_t. \end{aligned}$$

En identifiant avec la condition d'auto-financement,

$$\sigma \beta_t S_t \;=\; \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \quad \text{soit} \quad \beta_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t),$$

ce qui entraîne alors

$$r S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) \;+\; \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) \;-\; rV(t, S_t) = 0$$

avec pour condition terminale $V(T, S_T) = h(S_T)$.

Comme S_t est une v.a. qui peut prendre toutes les valeurs de $I\!R^+$, on en déduit que V satisfait l'EDP

$$\boxed{rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \;+\; \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}(t,x) \;-\; rV(t,x) \;=\; 0} \tag{6.1}$$

avec pour condition terminale $V(T,x) = h(x)$.

Dans le cas d'un call européen $h(x) = (x-K)^+$, et pour $\sigma > 0$, cette équation se résout alors en :

$$V(t,x) \;=\; x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition d'une v.a. gaussienne standard :

$$\mathcal{N}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

et avec les notations

$$d_1 = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln \left(x e^{r(T-t)}/K \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

La quantité

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \;=\; \mathcal{N}(d_1)$$

qui représente la *couverture* du marché, soit le nombre de parts de l'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option s'appelle le Delta de l 'option et représente aussi la sensibilité du prix de l option par rapport au prix du sous jacent.

Comme conséquence de la formule d'Itô appliquée aux EDS, on verra plus tard une formule probabiliste pour le prix du call :

$$C(t, S_t) \; = \; e^{r(t-T)} E\left[(\widetilde{S}_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

lorsque le $\widetilde{S}$ a pour dynamique

$$d\widetilde{S}_t = r\widetilde{S}_t dt + \sigma \widetilde{S}_t dB_t \, .$$

Cette interprétation est **fondamentale** en Finance, et fait intervenir un changement de probabilité.