Equations différentielles stochastiques

Equations différentielles stochastiques

Quelques propriétés

Lien avec les équations aux dérivées partielles

1 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.1 *Soient* $b : I\!R^+ \times I\!R^d \longrightarrow I\!R^d$ *et* $\sigma : I\!R^+ \times I\!R^d \longrightarrow \mathcal{M}_{d,m}(I\!R)$ *deux fonctions mesurables bornées. Soit* $x \in I\!R^d$ *une condition initiale.*
Une solution de l'EDS

$$E_x(b,\sigma) \quad : \left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x \\ dX_t & = & b(t,X_t)\,dt \;+\; \sigma(t,X_t)\,dB_t \end{array} \right.$$

est constituée par :

(a) *Un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}, P)$

(b) *Un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement brownien* $B = (B_1, \ldots, B_m)$ *à valeurs dans* $I\!R^m$.

(c) *Un processus* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *continu* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté tel que les intégrales*

$$\int_0^t b(s,X_s)\ ds \quad et \quad \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s$$

aient un sens et tel que l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\ ds\ +\ \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

soit satisfaite pour tout t P *p.s. Autrement dit, pour tout* $i = 1, \ldots, d$ *on a*

$$X_t^i = x + \int_0^t b^i(s, X_s)\ ds\ +\ \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\, dB_s^j.$$

Le caractère aléatoire des EDS impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. On dit qu'il y a

(1) Existence d'une **solution faible** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X.

(2) Existence d'une **solution forte** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X qui soit adaptée à la filtration du Brownien.

(3) **Unicité faible** si tous les processus X solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont même loi.

(4) **Unicité trajectorielle** si, l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de $E_x(b, \sigma)$ sont indistinguables au sens où

$$P\left[\exists\, t \in \mathbb{R} \;/\; X_t \neq X'_t\right] \;=\; 0.$$

Théorème 1.2 [Théorème d'existence sous conditions lipschitziennes] *Supposons qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

(a)

$$|b_i(t,x) - b_i(t,y)| + |\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)| \;\leq\; M\,|x-y|$$

pour tout $i = 1 \ldots d$, $j = 1 \ldots m$, $t \geq 0$, $\forall x, y$

(b) $|b_i(t,x)| + |\sigma_{ij}(t,x)| \;\leq\; M(1+|x|)$ *pour tout* $i = 1 \ldots d$, $j = 1 \ldots m$, $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ (condition de croissance linéaire),

alors il existe une unique solution forte à $E_x(b, \sigma)$, *de durée de vie infinie.*

L'idée est de construire une suite X^n par

$$X_t^n = x + \int_0^t b^i(s, X_s^{n-1})\ ds\ + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{n-1})\, dB_s^j\ ,$$

et de montrer la convergence de cette suite vers une solution.

Unicité :

Soit $t > 0$ fixé et X et Y deux solutions distinctes de $E_x(b, \sigma)$. On a

$$\begin{aligned}
E\left(|X_t - Y_t|^2\right) &= E\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s)\, ds \;+\; \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\, dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left(E\left(\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|\, ds\right)^2\right. \\
&\quad \left. +E\left(\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|\, dB_s\right)^2\right) \\
&\leq 2M^2\left(t^2 \int_0^t E\left|X_s - Y_s\right|^2\, ds \;+\; \int_0^t E\left|X_s - Y_s\right|^2\, ds\right) \\
&\leq K \int_0^t E\left|X_s - Y_s\right|^2\, ds
\end{aligned}$$

$\triangle$

On peut améliorer ce théorème dans le cas unidimensionel :

Théorème 1.3 [Yamade-Watanabe II] *Soit* $d = m = 1$*. Supposons que* b *et* σ *soient à croissance linéaire, que* b *vérifie la condition de Lipschitz locale et que* $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ *pour tout* $t \geq 0$*, où* ρ *est une fonction borélienne de* $]0,\infty[$ *dans lui-même telle que*

$$\int_{|z|\leq\epsilon} \frac{dz}{\rho^2(z)} = +\infty.$$

pour tout $\epsilon > 0$*. Alors* $E_x(b,\sigma)$ *admet une unique solution forte.*

Exemple : Processus de Bessel :

$$X_t \;=\; x \;+\; 2\int_0^t \sqrt{X_s}dW_s \;+\; \delta\, t \tag{1.1}$$

sur $I\!R$, où W est un Brownien réel et $x, \delta > 0$.

2 Quelques propriétés

2.1 Propriété de Markov

Supposons que $E_x(b,\sigma)$ ait une unique solution forte $\{X_t(x),\ t \geq 0\}$. Par linéarité de l'intégrale, on voit que pour tout $s,t \geq 0$,

$$X_{s+t}(x) \;=\; X_s(x) \;+\; \int_s^{s+t} b(u, X_u(x))\, du \;+\; \int_s^{s+t} \sigma(u, X_u(x))\, dB_u.$$

On peut écrire

$$X_{s+t}(x) \;=\; X_s(x) \;+\; \int_0^t b(s+u, X_{s+u}(x))\, du \;+\; \int_0^t \sigma(s+u, X_{s+u}(x))\, dB'_u$$

et par unicité, ceci entraîne que $X_{s+t}(x) = X_t^s(X_s(x))$ pour tout $t \geq 0$, où $X_t^s(x)$ est l'unique solution de $E_x(b(s+.,.), \sigma(s+.,.))$ portée par le Brownien B'.

Pour tout $s, t \geq 0$ et toute fonction borélienne f, on déduit alors que

$$E\left[f(X_{t+s}) \,|\, \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[f(X_{t+s}) \,|\, X_s\right] \;=\; \Phi(t; s, X_s)$$

où $\Phi(t; s, x) = E\left[f(X_t^s(x))\right]$. Ceci signifie que X vérifie la **propriété de Markov inhomogène**.

Dans le cas où les coefficients b et σ ne dépendent pas du temps, X vérifie la *propriété de Markov homogène,*

$$E\left[f(X_{t+s}) \,|\, \mathcal{F}_s^B\right] \;=\; E\left[f(X_{t+s}) \,|\, X_s\right] \;=\; \Phi(t; X_s)$$

avec $\Phi(t; x) = E\left[f(X_t(x))\right]$.

Dans le cas homogène, on peut étendre la propriété aux temps d'arrêt finis :

Théorème 2.1 [Propriété de Markov forte] *Soit X l'unique solution forte de $E_x(b,\sigma)$ avec b et σ ne dépendant pas du temps. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour la filtration naturelle du Brownien porteur. Alors pour tout $t \geq 0$ et toute fonction f mesurable bornée,*

$$E\left[f(X_{T+t}) \,|\, \mathcal{F}_T^B\right] \;=\; E\left[f(X_{T+t}) \,|\, X_T\right] \;=\; \Phi(t;X_T)$$

où l'on a noté $\Phi(t;x) = E\left[f(X_t(x))\right]$.

Dans le cas inhomogène, on montre que le processus espace-temps $t \mapsto (t, X_t)$ vérifie la propriété de Markov forte, au sens où pour tout temps d'arrêt fini T et toute fonction f de deux variables,

$$E\left[f(T+t, X_{T+t}) \;\middle|\; \mathcal{F}_T^B\right] \;=\; E\left[f(T+t, X_{T+t}) \,|\, T, X_T\right] \;=\; \Phi(t;T,X_T)$$

avec la notation $\Phi(t;s,x) = E\left[f(s+t, X_t^s(x))\right]$.

L'opérateur $\mathcal{L}$ qui à $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fait correspondre

$$\mathcal{L}f : x \mapsto b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

s'appelle le **générateur infinitésimal** du processus X. Il vérifie

$$\mathcal{L}f(x) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{E_x\left[f(X_t)\right] - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Le générateur infinitésimal a aussi un sens dans le cas inhomogène : si l'on considère l'EDS

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b(s, X_s)\; ds \;+\; \int_0^t \sigma(s, X_s)\; dB_s,$$

alors on peut définir son générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}(f)(t, x) \;=\; b(t, x) f'_x(t, x) \;+\; \frac{\sigma^2(t, x)}{2} f''_{xx}(t, x).$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{L}(f)(t,x) + f'_t(t,x) = 0,$$

alors le processus $\{f(t, X_t),\ t \geq 0\}$ est une martingale locale.

EXEMPLE : Supposons que

$$dX_t \;=\; rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

et soit f une fonction de $I\!R_+ \times I\!R$ dans $I\!R$ telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) \;+\; \mathcal{L}(f)(t,x) \;=\; rf(t,x), \tag{2.1}$$

alors le processus $(e^{-rt}f(t,X_t), t \geq 0)$ est **une martingale**. En particulier, si f vérifie $\forall x\,,\; f(T,x) = h(x)$ comme condition au bord, alors

$$f(t,X_t) \;=\; e^{r(t-T)}\, E\left[h(X_T) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le cas d'un call européen sur un sous jacent

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dW_t)$$

on a

$$C(t,x) \;=\; e^{r(t-T)}\; E\left[(\widetilde{S}_T - K)^+ \;\middle|\; \widetilde{S}_t = x\right],$$

pour

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t(rdt + \sigma dW_t)\,.$$

2.2 Martingale exponentielle et condition de Novikov

Soit θ un bon processus local et Z_0 une constante. L'unique solution de l'EDS

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_s Z_s \, dB_s \tag{2.2}$$

est

$$Z_t = Z_0 \exp\left[\int_0^t \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

Le processus Z, noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est appelé **l'exponentielle de Doléans-Dade** de $\theta * B$. C'est une martingale locale positive dès que $Z_0 > 0$.

Théorème 2.2 [Condition de Novikov] *Supposons que*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)\right] \;<\; \infty$$

pour tout $t > 0$*. Alors* $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ *est une vraie martingale.*

Quand la condition de Novikov n'est pas satisfaite, $\mathcal{E}(\theta * B)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et $E\left[Z_t\right] \leq E\left[Z_s\right] \leq Z_0$ pour tout $t \geq s \geq 0$.

3 Lien avec les équations aux dérivées partielles

3.1 Problème parabolique

On considère l'opérateur $\mathcal{A}f(t,x) = f'_t(t,x) + \mathcal{L}f(t,x)$ où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X solution de l'EDS

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b(s,X_s)\;ds \;+\; \int_0^t \sigma(s,X_s)\;dB_s. \tag{3.1}$$

On cherche les solutions du problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(t,x) & = & 0 & \text{pour tout } x \in I\!R \text{ et } t \in [0,T] \\ f(T,x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in I\!R. \end{cases} \tag{3.2}$$

où g est une fonction de $I\!R$ dans $I\!R$.

Si f est une solution de (3.2) et si pour tout $u \geq t \geq 0$ on note $X_u^{x,t}$ une solution de

$$X_u^{x,t} \ = \ X_t^{x,t} \ + \ \int_t^u b(s, X_s^{x,t}) \ ds \ + \ \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t}) \ dB_s$$

avec pour condition initiale $X_t^{x,t} = x$, la formule d'Itô conduit alors à

$$f(u, X_u^{x,t}) \ = \ f(t, x) \ + \ \int_t^u f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})dB_s.$$

On en déduit que

$$g(X_T^{x,t}) \ = \ f(t, x) \ + \ \int_t^T f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t}) \, dB_s.$$

Si f'_x et σ vérifient des conditions d'intégrabilité suffisante, alors l'intégrale stochastique est une martingale.

On en déduit une importante **représentation probabiliste de la solution** de (3.2) :

$$f(t, x) \;=\; E\left[g(X_T^{x,t})\right].$$

On écrit parfois ce résultat sous la forme $f(t,x) = E_{x,t}\left[g(X_T)\right]$, où X est la solution de (3.1) prise sous la probabilité $P_{x,t}$ qui est telle que processus X prend la valeur x à l'instant t.

On peut s'intéresser à un problème un peu plus général que (3.2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}f(t,x) & = & \alpha f(t,x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0,T] \\ f(T,x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

avec $\alpha > 0$. Avec les notations précédentes, si f est solution de (3.3), la formule d'Itô entre t et T conduit à

$$e^{-\alpha T} f(T, X_T^{x,t}) \;=\; e^{-\alpha t} f(t,x) \;+\; \int_t^T e^{-\alpha s} f'_x(s, X_s^{x,t}) \sigma(s, X_s^{x,t})\, dB_s.$$

A nouveau sous des conditions d'intégrabilité suffisantes sur f'_x et σ, l'intégrale stochastique est une martingale et on en déduit la représentation probabiliste

$$f(t,x) \;=\; E_{x,t}\left[e^{\alpha(t-T)} g(X_T) \right].$$

3.2 Formule de Black & Scholes

On considère à nouveau un sous jacent de dynamique

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t)\,.$$

La solution de l'équation de Black & Scholes

$$xr\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) \;+\; \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) \;+\; \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t,x) \;=\; rC(t,x)$$

avec $C(T,x) = (x-K)^+$, est donnée par

$$C(t,x) \;=\; E\left[e^{r(t-T)}(\widetilde{S}_T^{x,t} - K)^+\right] \tag{3.4}$$

avec

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t(rdt + \sigma dW_t)\,.$$

Soit

$$\widetilde{S}_T^{x,t} = x e^{\sigma\sqrt{T-t}G+(r-\sigma^2/2)(T-t)}$$

et $G \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $t=0$, le calcul donne

$$\begin{aligned} E\left[e^{-rT}(\widetilde{S}_T^x - K)^+\right] &= e^{-rT}\left(E\left[\widetilde{S}_T^x \mathbb{1}_{\{\widetilde{S}_T^x \geq K\}}\right] - \; KP\left[\widetilde{S}_T^x \geq K\right]\right) \\ &= xe^{-rT}E\left[e^{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)}\mathbb{1}_{\left\{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)\geq \ln(K/x)\right\}}\right] \\ &\quad -Ke^{-rT}P\left[\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T) \;\geq\; \ln(K/x)\right] \end{aligned}$$

L'espérance et la probabilité se calculent alors en explicitant les intégrales qui font intervenir la densité gaussienne.

L'expression (3.4) permet également de calculer le 'Delta' de l'option : dans le cas $t = 0$, on a

$$C(0, x) \; = \; E\left[e^{-rT}(xM_T e^{rT} - K)^+)\right]$$

avec la notation $S_t = xM_t e^{rt}$. En dérivant par rapport à x sous l'espérance, on retrouve

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0, x) \; = \; E\left[M_T 1_{\{xM_T e^{rT} \geq K\}}\right] \; = \; \mathcal{N}(d_1)$$

avec la formule pour d_1 donnée au chapitre précédent.

3.3 Formule de Feynman-Kac

On s'intèresse au problème de **Sturm-Liouville** :

$$(\alpha + k)f \;=\; \frac{f''}{2} \;+\; g \tag{3.5}$$

où $\alpha > 0$, $k : I\!\!R \to I\!\!R^+$ est une fonction continue et $g : I\!\!R \to I\!\!R$ une fonction continue telle que:

$$\int_{I\!\!R} |g(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}}\, dy \;<\; +\infty$$

pour tout $x \in I\!\!R$. On a le

Théorème 3.1 [Formule de Feynman-Kac] *La fonction f définie par:*

$$f(x) \;=\; E\left[\int_0^\infty g(x+B_t)\exp\left(-\alpha t - \int_0^t k(x+B_s)ds\right) dt\right],$$

est l'unique solution bornée et $\mathcal{C}^2$ de (3.5).

Ce résultat nous donne en particulier la transformée de Laplace en temps de la variable

$$g(B_t) \exp - \int_0^t k(B_s) ds$$

pour toute fonction g, et donc par inversion la loi du couple

$$\left(B_t, \int_0^t k(B_s) ds \right).$$

La formule de Feynman-Kac permet aussi de calculer la densité de la variable aléatoire

$$A_t^+ = \int_0^t 1\!\!1_{[0,\infty[}(B_s)\,ds$$

qui représente **le temps d'occupation de** $I\!\!R^+$ par le Brownien. En effet, si on pose $k(x) = \beta 1\!\!1_{x \geq 0}$ et $g(x) = 1$, on en déduit que pour $\alpha, \beta > 0$ la fonction

$$f(x) = E\left[\int_0^\infty \exp\left(-\alpha t - \beta \int_0^t 1\!\!1_{[0,\infty)}(x + B_s)ds\right) dt\right]$$

est solution de l'EDO

$$\begin{cases} \alpha f(x) = 1 - \beta f(x) + \frac{f''(x)}{2} & \text{si } x \geq 0, \\ \alpha f(x) = 1 + \frac{f''(x)}{2} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

L'unique solution bornée et continue de cette EDO est donnée par:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} Ae^{-x\sqrt{2(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{\alpha+\beta} & \text{si } x \geq 0, \\ Be^{x\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En imposant la continuité de f et f' en zéro, on trouve

$$A \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} - \frac{1}{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad B \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} - \frac{1}{\alpha}\;.$$

On en déduit que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} E\left[e^{-\beta A_t^+}\right] dt \;=\; f(0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

et, en utilisant l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int_0^t du \frac{e^{-\beta u}}{\pi\sqrt{u(t-u)}}\right) dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}\;,$$

que la densité de A_t^+ est donnée par:

$$P\left[A_t^+ \in du\right] \;=\; \frac{\mathbb{1}_{\{u<t\}}du}{\pi\sqrt{u(t-u)}}\,.$$

La fonction de répartition de cette loi est

$$P\left[A_t^+ \le \theta\right] \;=\; \int_0^{\theta} \frac{ds}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \;=\; \int_0^{\theta/t} \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \;=\; \frac{2}{\pi}\arg\sin\sqrt{\frac{\theta}{t}}$$

et l'on donne alors à la loi de A_t^+ le nom de **loi de l'arcsinus**. On remarque enfin que

$$P\left[A_t^+ \le \theta\right] \;=\; P\left[tA_1^+ \le \theta\right],$$

ce qui montre que les variables A_t^+ et tA_1^+ ont même loi. On aurait pu aussi obtenir ce résultat directement par scaling du Brownien.