nangement de probabilité - Théorème de Girsanov

Généralités

La formule de Cameron-Martin

Les deux théorèmes de Girsanov

Théorème de représentation prévisible

Applications

Théorème fondamental de la finance: Probabilité risque neutre

Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Z une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable positive d'espérance 1. On définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}$ par $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A)$. On a, pour toute v.a. X qui est $\mathbb{Q}$-intégrable

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_P(ZX)$$

Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si Z_T est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable positive d'espérance 1, on définit $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Z_T \mathbb{1}_A)\,.$$

La probabilité $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ si la v.a. Z_T est strictement positive.

Pour tout $t < T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$ on a

$$\mathbb{Q}(A) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \,|\, \mathcal{F}_t)\mathbb{1}_A) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbb{1}_A),$$

en posant $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \,|\, \mathcal{F}_t)$ et

$$d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}\,.$$

Un processus $\{M_t,\ t \geq 0\}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale sous* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si le processus* $(Z_t M_t, t \geq 0)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale sous* $\mathbb{P}$*.*

Formule de Bayes: Soient $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ équivalentes sur $\mathcal{F}_T$ de densité de Radon-Nikodým L. Soit X une v.a. $\mathbb{Q}$-integrable et $\mathcal{F}_T$-measurable. Alors;

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_P(L_T X|\mathcal{F}_t)}{L_t}\,.$$

La formule de Cameron-Martin

Dimension finie

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$$\mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left[\mu_i X_i\right]\right] = \exp \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\right],$$

ce qui entraîne que

$$\mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right] = 1.$$

On définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2}\right)$$

et $d\mathbb{Q} = ZdP$, autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{Q}\left[A\right] \;=\; \mathbb{E}_P\left[Z\mathbb{1}_A\right] \;=\; \int_A Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

La mesure $\mathbb{Q}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à $\mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(X_1 \in dx_1, \ldots, X_n \in dx_n) &= e^{\sum_{i=1}^n \left(\mu_i x_i - \mu_i^2/2\right)} \mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \ldots, X_n \in dx_n) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\, e^{\sum_{i=1}^n \left(\mu_i x_i - \mu_i^2/2\right)} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= (2\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2}\, dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

et l'on en déduit que sous $\mathbb{Q}$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \;\sim\; \mathcal{N}(\mu, \mathrm{Id}),$$

où $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Cas Brownien

Soit W un MB et $\mathbf{F}^W$ sa filtration naturelle. Pour tout m, le processus

$$\exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right]$$

est une $\mathbf{F}^W$-martingale positive.
La mesure $\mathbb{Q}^m$ définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}_T^W\right)$ par

$$\mathbb{Q}^m\left[A\right] \;=\; \mathbb{E}_P\left[Z_T^m \mathbb{1}_A\right]$$

est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T^W$.

[Formule de Cameron-Martin] **Sous $\mathbb{Q}^m$,** le processus

$$\tilde{W}_t = W_t - mt, \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Relation d'absolue continuité

Le théorème de Cameron-Martin s'écrit

$$\mathbf{W}^{(\nu)}[F(X_t, t \le T)] = \mathbf{W}^{(0)}[e^{\nu X_T - \nu^2 T/2} F(X_t, t \le T)] \,.$$

$$\mathbb{E}[F(W_t + \nu t, t \le T)] = \mathbb{E}[e^{\nu W_T - \nu^2 T/2} F(W_t, t \le T)] \,.$$

Théorème de Girsanov

Soit W un MB et $\mathbf{F}^W$ sa filtration naturelle. Soit θ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov. Par les résultats du chapitre précédent, on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

s'écrit

$$Z_t^\theta = \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

et que Z^θ est une $\mathbf{F}^W$-martingale. On définit la mesure

$$\mathbb{Q}^\theta = Z_T^\theta \mathbb{P}$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$, qui est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T^W$.

[Théorème de Girsanov] Sous la mesure Q^{θ}, le processus

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_s \, ds, \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Applications

Calcul d'espérances

1)Calcul de

$$\mathbb{E}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right]$$

pour $t < T$ et θ fonction déterministe. On effectue un changement de probabilité

$$L_t = \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

et on calcule

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[B_t L_T\right] = \mathbb{E}_P\left[B_t L_t\right] = \mathbb{E}_Q\left[B_t\right] &= \mathbb{E}_Q\left[\tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds\right] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[\int_0^t \theta_s\, ds\right] = \int_0^t \theta_s\, ds.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\mathbb{E}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right] = \int_0^t \theta_s\, ds
$$

2) **Calcul de**

$$I = \mathbb{E}\left[\exp - \left[\alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right]\right]$$

où B est un brownien issu de a. On pose $x = a^2$ et on effectue le changement de probabilité

$$\frac{d\mathbb{P}^\beta}{d\mathbb{P}} = L_t^\beta = \exp\left[-\beta\int_0^t B_s\, dB_s - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right].$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$L_t^\beta = \exp - \left[\frac{\beta}{2}(B_t^2 - x - t) + \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right]$$

Sous P^β,

$$B_t = a + W_t - \beta\int_0^t B_s\, ds$$

avec W $\mathbb{P}^\beta$-Brownien.

Sous P^β,

$$B_t \;=\; a \;+\; W_t \;-\; \beta \int_0^t B_s\, ds$$

avec W $\mathbb{P}^\beta$-Brownien.

Donc B est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** sous $\mathbb{P}^\beta$, et B_t une v.a. gaussienne d'espérance $ae^{-\beta t}$ et de variance $\frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$.

On en déduit que

$$I \;=\; \mathbb{E}^\beta \left[L_t^{-1} \exp - \left[\alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right] \right] \;=\; \mathbb{E}^\beta \left[\exp \left[-\alpha B_t^2 + \frac{\beta}{2}(B_t^2 - x - t) \right] \right].$$

Après quelques calculs simples et longs, on obtient

$$I = (\cosh \beta t + 2\alpha \sinh \beta t/\beta)^{-1/2} \exp \left[-\frac{x\beta(1 + 2\alpha \coth \beta t/\beta)}{2(\coth \beta t + 2\alpha/\beta)} \right].$$

En faisant $a = \alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{2\lambda}$, cette formule donne la transformée de Laplace de la norme L^2 du Brownien :

$$\mathbb{E} \left[\exp -\lambda \int_0^t B_s^2 \, ds \right] = \left(\cosh \sqrt{2\lambda} t \right)^{-1/2}.$$

Temps de passage du Brownien drifté

On considère W un mouvement Brownien standard issu de 0 et

$$T_b^\mu \;=\; \inf\left\{t > 0,\; W_t + \mu t = b\right\},$$

premier temps de passage au seuil b du Brownien drifté $W_t^\mu = W_t + \mu t$, pour $\mu \in \mathbb{R}$. On définit

$$d\mathbb{P}^\mu \;=\; \exp\left[\mu W_t - \mu^2 t/2\right] d\mathbb{P}$$

sur $\mathcal{F}_t^W$.

Ceci permet de calculer la densité de T_b^μ en écrivant

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[T_b^\mu \le t\right] \;=\; \mathbf{W}^{(\mu)}\left[T_b \le t\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left[\mu W_t - \mu^2 t/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \le t\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left[\mu W_{T_b \wedge t} - \mu^2 (T_b \wedge t)/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \le t\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left[\mu W_{T_b} - \mu^2 T_b/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \le t\}}\right] \\
&= e^{\mu b}\, \mathbb{E}\left[\exp - \left[\mu^2 T_b/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \le t\}}\right] \\
&= e^{\mu b} \int_0^t e^{-\mu^2 s/2} \left(\frac{|b|\, e^{-b^2/2s}}{\sqrt{2\pi s^3}} \right) ds \\
&= \int_0^t \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp - \left[\frac{(b - \mu s)^2}{2s} \right] ds,
\end{aligned}
$$

Ceci entraîne par dérivation que

$$\mathbb{P}\left[T_b^\mu \in dt\right] \;=\; \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \left[\frac{(b-\mu t)^2}{2t}\right] dt.$$

Enfin, soit par calcul direct avec la densité, soit en utilisant une nouvelle fois la formule de Cameron-Martin, on peut calculer la transformée de Laplace de T_b^μ :

$$\mathbb{E}\left[\exp -\lambda T_b^\mu\right] \;=\; \exp\left[\mu b - |b|\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\right] .$$

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_y(X)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\nu W_{T_y} - \frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T_y(W)\right)\right) ,$$

où $\mathbf{W}^{(\nu)}(\cdot)$ est l'espérance sous $\mathbf{W}^{(\nu)}$. Le membre de droite est

$$e^{\nu y}E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(\nu^2+\lambda^2)T_y(W)\right)\right] = e^{\nu y}\exp\left(-|y|\sqrt{\nu^2+\lambda^2}\right) .$$

Donc

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T_y(X)\right]\right) = e^{\nu y}\exp\left(-|y|\sqrt{\nu^2+\lambda^2}\right) .$$

En particulier, en posant $\lambda = 0$ dans le cas $\nu y < 0$ on obtient

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y < \infty) = e^{2\nu y} ,$$

ce qui montre que la probabilité qu'un MB drifté, de drift strictement positif a une probabilité strictement plus petite que 1 d'atteindre un niveau négatif Dans le cas $\nu y \geq 0$, on a $\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y < \infty) = 1$.

Théorème de représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et $\mathbf{F}$ sa filtration naturelle, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Représentation prévisible

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, telle que $\sup_{t \leq T} E[M_t^2] < \infty$. *Il existe un unique processus prévisible H vérifiant* $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 \, ds) < \infty$, *tel que*

$$\forall t \in [0,T], \;\; M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s \, .$$

Si M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que

$$\forall t \;\; M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$

Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture.

Toutes les $(\mathcal{F}_t^B)$*-martingales locales sont continues.*

Théorème fondamental de la finance: Probabilité risque neutre

Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie d'investissement qui permet, à partir d'une mise de fonds initiale nulle, d'obtenir une richesse terminale positive, non nulle.

Dans le cas d'un marché où sont négociés **un actif sans risque**, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$$

Une **stratégie (ou portefeuille)** d'investissement est un couple (π^0, π) de processus adaptés. La **richesse** associée est $X_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$.

La stratégie est dite **auto-finançante** si $dX_t = \pi_t^0 dS_t^0 + \pi_t dS_t$.

Il en résulte que

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dS_t - rS_t dt)\,.$$

Si l'on note $X_t^a = R_t X_t$ et $S_t^a = R_t S_t$, on voit que

$$dX_t^a = \pi_t dS_t^a\,.$$

Dans un modèle de prix d'actifs financiers, on doit veiller à ce que le mocdèle ne présente pas d'opportunités d'arbitrage. Dans un marché comportant un actif sans risque, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 \; = \; S_t^0 r_t dt$$

le théorème fondamental montre que le marché est sans arbitrage si et seulement si il existe une probabilité Q équivalente à la probabilité historique -celle sous laquelle on écrit les dynamiques des prix- telle que les processus des prix actualisés (soit S_t^i/S_t^0) sont des martingales. Cette probabilité est qualifiée **de risque-neutre**. La valeur actualisée de tout portefeuille autofinançant est alors une martingale (locale) sous toute probabilité risque neutre.

Si elle est unique, la valeur d'un actif financier H, payé à la date T, est calculée comme **l'espérance sous la probabilité risque neutre du payoff actualisé**, soit $V_t = \mathbb{E}_Q(HR_T|\mathcal{F}_t)$, où $R_T = \int_0^T r_s ds$.

On parle alors de **marché complet**. On montre alors que le théorème de représentation prévible s'applique et qu'il existe π tel que $dV_t^a = \pi_t dS_t^a$.

Si la probabilité risque neutre n'est pas unique, on parle de marché incomplet. Pour une probabilité $\mathbb{Q}$, il n'existe pas, en général de π tel que $\mathbb{E}_Q(HR_T|\mathcal{F}_t) = x + \int_0^t \pi_s dS_s^a$.

Changement de numéraire

Il est parfois très utile d'exprimer les prix en valeur relative par rapport à un autre processus de prix.

Un ***numéraire*** *est un actif financier de prix strictement positif.*

Si M est un numéraire, on peut évaluer la valeur V_t d'une stratégie en terme de ce numéraire, soit V_t/M_t.

Supposons qu'il y a d actifs risqués dans le marché, dont les prix $(S_t^{(i)};\, i = 1, \cdots, d,\, t \geq 0)$ *sont des processus d'Itô, et tels que* $S^{(1)}$ *est strictement positif.*
Soit $V_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^{(i)}$ *le valeur du portefeuille* $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, \cdots, d)$.
Si $(\pi_t,\, t \geq 0)$ *est auto-financant, i.e. si* $dV_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i dS_t^{(i)}$, *et si l'on choisit* $S_t^{(1)}$ *comme numéraire, alors*

$$dV_t^1 = \sum_{i=2}^d \pi_t^i dS_t^{(i,1)}$$

où $V_t^1 = V_t/S_t^{(1)},\ S_t^{(i,1)} = S_t^{(i)}/S_t^{(1)}$.

On associe à un numéraire M le changement de probabilité suivant: Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre, telle que le processus $(M_t R_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Soit $\mathbb{Q}^M$ défini par $\mathbb{Q}^M|_{\mathcal{F}_t} = (M_t R_t)\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$.

Soit$(X_t, t \geq 0)$ *le prix d'un actif financier et* M *un numéraire. Le prix de* X*, dans le numéraire* M*, soit* $(X_t/M_t, 0 \leq t \leq T)$ *est une* $\mathbb{Q}^M$*-martingale.*

Le calcul du terme $\mathbb{E}_Q(S_T e^{-rT} 1\!\!1_{S_T \geq a})$ qui apparait dans la formule de Black et Scholes est immédiat: il suffit d'utiliser que, sous $\mathbb{Q}$ le processus $M_t = S_t e^{-rt}/S_0$ est une martingale strictement positive d'espérance 1, et de poser $d\widehat{Q} = M_t d\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(S_T e^{-rT} 1\!\!1_{S_T \geq a}) &= \mathbb{E}_{\widehat{Q}}(S_0 1\!\!1_{S_T \geq a}) \\ &= S_0 \widehat{Q}(S_T \geq a)\,. \end{aligned}$$

Il reste à exprimer la dynamique de S sous $\widehat{Q}$.

Un changement de numéraire est également très efficace pour calculer le prix d'une **option d'échange**, qui est

$$E((S_T^1 - S_T^2)^+)$$

Probabilité forward-neutre

La valeur à la date t d'un flux déterministe F reçu à la date T est

$$FP(t,T) = F\,\mathbb{E}_Q[\exp - \int_t^T r(u)\,du\,|\mathcal{F}_t].$$

Si ce flux est aléatoire, la valeur à la date t de ce flux est

$$\mathbb{E}_Q[F\ \exp - \int_t^T r(u)\,du\,|\mathcal{F}_t].$$

Par hypothèse A.O.A, le processus $R(t)P(t,T)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, son espérance est constante, égale à $P(0,T)$. Pour tout T, le processus

$$\zeta_t^T := \frac{R(t)P(t,T)}{P(0,T)}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale positive d'espérance 1.

Soit $\mathbb{Q}_T$ la mesure de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par

$$\mathbb{Q}_T(A) = E_Q(\zeta_t^T 1_A)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_t$. Lorsque T est fixé, on notera $\zeta_t = \zeta_t^T$.

La probabilité $\mathbb{Q}_T$ définie sur $\mathcal{F}_T$, par $\dfrac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} = \zeta_t^T$ est appelée ***probabilité forward-neutre*** *de maturité T.*

Avec cette notation

$$\mathbb{E}_{Q_T}(F\,|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q(F\,\frac{\zeta_T}{\zeta_t}|\mathcal{F}_t)\,.$$

Lorsque r est déterministe, $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}$.

La mesure $\mathbb{Q}_T$ est la martingale mesure associée au choix du zéro-coupon de maturité T comme numéraire.