Master 2 - MLV 2005-06
Risque de crédit. Examen Septembre

Préambule: Dans tout le problème, on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel processus et v.a. sont définis, en particulier, τ désigne une v.a. positive, $H_t = 1\!\!1_{\tau \le t}$ et $\mathbf{H} = (\mathcal{H}_t, t \ge 0)$ est la filtration naturelle de H. S'il y a plusieurs temps τ^i, on note $H_t^i = 1\!\!1_{\tau^i \le t}$ et $\mathbf{H}^i = (\mathcal{H}_t^i, t \ge 0)$. On suppose qu'une filtration $\mathbf{F}$ est donnée ainsi qu'un processus λ, positif, $\mathbf{F}$-adapté. On définit

$$\tau = \inf\{t \, : \, \Lambda_t := \int_0^t \lambda_s ds \ge \Theta\}$$

où Θ est une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de $\mathbf{F}$. On note $\mathbf{G} = \mathbf{F} \vee \mathbf{H}$.

PARTIE I: *La première partie se traite SANS documents. Après une heure, vous passez à la partie avec documents, même si vous n'avez pas fini la première partie.*
On suppose que λ est déterministe. On suppose que les divers produits financiers sont évalués sous P.

1. Montrer que τ est indépendant de $\mathbf{F}$.
2. Soit S le prix d'un actif. On suppose que S est $\mathbf{F}$-adapté et que le taux sans risque, $(r(s), s \ge 0)$ est déterministe. On note $\beta_t = \exp - \int_0^t r(s)ds$.
   (a) Quel est la valeur à la date t d'un actif contingent de payoff $\Phi = \varphi(S_T) 1\!\!1_{T<\tau}$? On note V_t ce prix.
   (b) Montrer qu'il y a une relation simple entre V_t et le prix Φ_t de $\varphi(S_T)$.
   (c) On suppose qu'un DZC (versant 1 à maturité s'il n'y a pas eu défaut et 0 sinon) de maturité T est négocié sur le marché au prix $D(t,T)$. Exprimer $D(t,T)$ en fonction de λ. Quelle est la dynamique de $D(t,T)$?
   (d) Un portefeuille auto-finançant construit sur les actifs $D(t,T), S$ et le savings account S_t^0 de dynamique $dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt$, dupliquant un actif contingent ξ, est un triplet de processus $\mathbf{G}$-adaptés, π^1, π^2, π^3 tel que, si $V_t = \pi_t^1 D(t,T) + \pi_t^2 S_t + \pi_t^3 S_t^0$

$$\begin{aligned} dV_t &= \pi_t^1 dD(t,T) + \pi_t^2 dS_t + \pi_t^3 S_t^0 r(t) dt \\ \xi &= \pi_T^1 D(T,T) + \pi_T^2 S_T + \pi_T^3 S_T^0 \end{aligned}$$

   Montrer qu'il existe un portefeuille dupliquant $\varphi(S_T) 1\!\!1_{T<\tau}$. Expliciter π^1.

PARTIE II *A présent, vous rendez votre copie et vous poursuivez avec documents. Si vous n'avez pas répondu aux questions ci dessus, vous en admettez les résultats (qui se trouvent dans le poly). Il est* **inutile** *dans ce qui suit de recopier des démonstrations figurant dans le poly. Il suffit de citer le résultat utilisé et la référence (page du poly)*

1. On travaille sous les hypothèses du préambule. On étudie dans un premier temps certaines relations entre les $\mathbf{F}$ et les $\mathbf{G}$-martingales.
   (a) Soit $\widetilde{V}$ et R deux processus $\mathbf{F}$-prévisibles. Montrer que le processus V défini par

$$V_t = \widetilde{V}_t 1\!\!1_{\{t<\tau\}} + R_\tau 1\!\!1_{\{\tau \le t\}}$$

   est une $\mathbf{G}$-martingale si et seulement si le processus

$$\widetilde{V}_t e^{-\Lambda_t} + \int_0^t R_u e^{-\Lambda_u} \lambda_u du$$

   est une $\mathbf{F}$-martingale
   (b) Soit P et R deux processus $\mathbf{G}$-prévisibles et C un processus $\mathbf{G}$-adapté à variation bornée tels que

$$\beta_t P_t + 1\!\!1_{\{\tau \le t\}} \beta_\tau R_\tau + \int_0^{t \wedge \tau} \beta_u dC_u$$

est une **G**-martingale. Soit $\widetilde{P}$ processus **F**-prévisible tel que $P_t = 1\!\!1_{\{t<\tau\}}\widetilde{P}_t$. Montrer que le processus

$$P_t^* = \alpha_t \widetilde{P}_t + \int_0^t \alpha_s dC_s + \int_0^t R_u \alpha_u \, d\Lambda_u$$

est une **F**-martingale, avec $\alpha_t = \beta_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds}$. Etablir la réciproque. Donner une interprétation financière.

2. On considère deux va indépendantes τ_i de loi exponentielle de paramètre 1, construites sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. On suppose que cet espace est muni d'une filtration **F** engendrée par un mouvement Brownien W et on suppose que τ_i sont indépendantes de $\mathcal{F}_\infty$.

   (a) Calculer les processus λ^i tels que

   $$H_t^i - \int_0^t (1 - H_s^i)\lambda_s^i ds$$

   soit une $\mathbf{F} \vee \mathbf{H}^i$ martingale.

   (b) Calculer les processus γ^i tels que

   $$M_t^i = H_t^i - \int_0^t (1 - H_s^i)\gamma_s^i ds$$

   soit une $\mathbf{G} = \mathbf{F} \vee \mathbf{H}^1 \vee \mathbf{H}^2$ martingale.

   (c) Ce choix de modèlisation se réduit-il à un cas particulier de celui utilisé dans la première partie?

   (d) On suppose qu'un actif délivrant $1\!\!1_{T<\tau_i}$ en T est disponible sur le marché au prix $D_i(t,T)$. On suppose que le marché utilise la probabilité P comme probabilité risque neutre et que le taux sans risque est constant égal à r. Quelle est la dynamique de D_i?

   (e) On se donne deux processus κ_i **F**-prévisibles et on définit

   $$d\zeta_t = \zeta_{t-}(\kappa_t^1 dM_t^1 + \kappa_t^2 dM_t^2)$$

   On définit Q par $dQ|_{\mathcal{G}_t} = \zeta_t dP|_{\mathcal{G}_t}$

   i. Sous quelles conditions Q est-elle une mesure de probabilité?

   ii. Montrer que

   $$H_t^1 - \int_0^t (1 - H_s^1)\eta_s^1 ds$$

   est une $(Q, \mathbf{G})$-martingale, avec $\eta_t^1 = 1\!\!1_{t<\tau_2} + 1\!\!1_{t\geq\tau_2}(\kappa_t^1 + 1)$.

   iii. Comment s'écrit le prix du zéro-coupon D_1 si Q est la mesure choisie pour évaluer les produits financiers?

   iv. Faire un calcul explicite si κ_i sont des constantes.