DESS Ingéniérie mathématiques. Université d'EVRY 2004-2005
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Seconde session. Avril 05

Les exercices 1, 2 et 3 doivent être résolus sans documents pendant la première heure. Vous devez alors rendre votre copie correspondant à cette partie en notant sur vos brouillons la réponse de l'exercice 3. Vous pouvez rendre votre copie avant la fin de la première heure, pour passer aux exercices suivants pour lesquels vous avez droit aux documents.

Dans tous les exercices, le processus W est un mouvement Brownien issu de 0, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. On suppose que la dynamique d'un actif est, sous la probabilité risque neutre

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t)dW_t),\; S_0 = x$$

où r est une constante et σ *une fonction*, continue non réduite à une constante.

(a) Ecrire la forme de la solution S_t. Montrer que S_T a même loi que $\exp(a + b\sqrt{T}G)$ où G est une v.a. gaussienne centrée réduite, et où on précisera les valeurs de a et b.

(b) Calculer la valeur d'un call Européen de maturité T et de strike K, **avec le minimum de calculs** (Trois à quatre lignes de calcul maximum pour obtenir une forme explicite). On rappelle que, dans le cas $\sigma(t) = \sigma$, la formule de Black et Scholes est

$$C = S_0\mathcal{N}(d_1(S_0, \sigma, T)) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2(S_0, \sigma, T))$$

avec

$$d_1(x, \sigma, T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln(\frac{x}{Ke^{-rT}}) - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},\; d_2(x, \sigma, T) = d_1(x, \sigma, T) + \sigma\sqrt{T}\,.$$

2. (a) Question préliminaire Soit X et Y deux processus d'Itô continus (on ne précisera pas leur dynamique, c'est inutile pour ce qui suit). Rappeler la formule d'intégration par parties pour $d(XY)$. En déduire que

$$X_t d(\frac{1}{X_t}) + \frac{1}{X_t}dX_t + d\langle X, \frac{1}{X}\rangle_t = 0$$

(b) Soit $S_t^{(i)}, i = 1, 2$ deux processus continus strictement positifs, $\pi^i, i = 1, 2$ deux processus adaptés tels que si on note $V_t = \pi_t^1 S_t^{(1)} + \pi_t^2 S_t^{(2)}$ alors $dV_t = \pi_t^1 dS_t^{(1)} + \pi_t^2 dS_t^{(2)}$. On définit $V_t^1 = V_t/S_t^{(1)}$.

i. Calculer $d\langle V, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t$ en fonction de $d\langle S^{(1)}, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t$ et $d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t$

ii. Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2\left(S_t^{(2)}d\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(1)}}dS_t^{(2)} + d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t\right)$

iii. Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2 d\left(\frac{S_t^{(2)}}{S_t^{(1)}}\right)$.

3. Soit X solution de

$$dX_t = X_t(\alpha_t dt + \beta_t dW_t)$$

Ecrire cette solution, montrer en particulier que

$$X_t = e^{A_t}M_t$$

où M est une martingale locale et A un processus à variation bornée.

4. Soit (a, b, c, z) des constantes et

$$Z_t = e^{(a-c^2/2)t+cW_t}\left(z + b\int_0^t e^{-(a-c^2/2)s-cW_s}ds\right)$$

Quelle est l'EDS vérifiée par Z?

5. On considère le processus de dynamique

$$dS_t = S_t((r - q + h_t)dt + \sigma dW_t)$$

où $(h_t, t \geq 0)$ est un processus adapté.

(a) On se place dans le cas $h_t = 0$, $\forall t$. Montrer que $(M_t = S_t e^{-(r-q)t}, t \geq 0)$ est une martingale positive. On définit une probabilité Q par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_t}{M_0} dP|_{\mathcal{F}_t}$. Comment se transforme le MB W?

(b) Dans le cas h non nul, expliciter S_t (Utiliser l'exercice 3).

(c) On suppose que $h_t = h(S_t)$ où h est une fonction continue. On admet qu'il existe une solution de l'EDS correspondante. Montrer que

$$e^{-rT}E(e^{-\int_0^T h(S_s)ds}\Psi(S_T)) = e^{-qT}S_0 E_Q(S_T^{-1}\Psi(S_T))$$

(d) On se place maintenant dans le cas $h_t = S_t^{-p}$, avec p réel. On admet qu'il existe une solution de l'EDS. On pose $Z_t = S_t^p$.

i. Quelle est la dynamique de Z?

ii. Vérifier, en utilisant l'exercice 4 que l'on peut expliciter Z.

iii. Pour quelles fonctions f, le processus $f(Z)$ est il une martingale (locale)?

6. Sur le marché financier on trouve un actif risqué de prix $(S_t, t \geq 0)$ vérifiant $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ et un actif sans risque de prix S^0 vérifiant $dS_t^0 = S_t^0 r dt$. Soit π un processus adapté et $(X_t, t \geq 0)$ la solution de

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t X_t (dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt)\,. \qquad (1)$$

Expliciter X_T en fonction de W et de π. Calculer $E(\ln X_T)$ (en admettant que les martingales locales qui interviennent sont des martingales). Montrer que l'on peut choisir π tel que l'on maximise $E(\ln X_T)$. Expliquer quel type de problème l'on résout ainsi.

7. Soit $L_t = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(e^{-2W_t} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4}e^{-4W_s}\right)ds\right)$

(a) Question préliminaire: Calculer l'intégrale $\int_0^t e^{-2W_s} dW_s$.

(b) Montrer que L est une martingale locale (penser au résultat obtenu dans l'exercice 3). On suppose que L est une martingale (ce qui est le cas). Quelle est son espérance?

(c) On pose $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$. Quelle est la dynamique de W sous Q?

8. Soit X solution de (on admet que X existe et prend ses valeurs dans $]0, 1[$)

$$dX_t = X_t(1 - X_t)\left((\mu - X_t)dt + dW_t\right),\ X_0 = x$$

Soit $h_0(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\mu-1}$ et $h_1(x) = 2\frac{\ln(1-x) - \ln x}{2\mu - 1}$.

(a) Montrer que $h_0(X_t)$ et $h_1(X_t) - t$ sont des martingales.

(b) Soit $\tau = \inf\{t \geq 0,\ S_t \notin [a, b]\}$, avec $0 < a < b < 1$. Montrer que $P(X_\tau = a) = \frac{h_0(x) - h_0(b)}{h_0(a) - h_0(b)}$ et calculer $E(\tau)$.

La partie sans documents est notée sur 10,5, la partie avec sur 0. Faire la somme des deux notes et multiplier par 2/3 devrait etre bon pour avoir une note sur 20.

1. (3 points) On suppose que la dynamique d'un actif est, sous la probabilité risque neutre

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t)dW_t),\ S_0 = x$$

où r est une constante et σ *une fonction* continue du temps.

(a) Ecrire la forme de la solution S_t. Montrer que S_T a même loi que $\exp(a + b\sqrt{T}G)$ où G est une v.a. Gausienne centrée réduite, et où on précisera les valeurs de a et b.

(b) Calculer la valeur d'un call Européen de maturité T et de strike K, **avec le minimum de calculs**. On rappelle que, dans le cas $\sigma(t) = \sigma$, la formule de Black et Scholes est

$$C = S_0\mathcal{N}(d_1(S_0,\sigma,T)) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2(S_0,\sigma,T))$$

avec

$$d_1(x,\sigma,T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln(\frac{x}{Ke^{-rT}}) - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},\ d_2(x,\sigma,T) = d_1(x,\sigma,T) + \sigma\sqrt{T}\,.$$

L'exercice 1 a déja été posé en Janvier. Un corrigé a été distribué. Etre sévère dans la correction.
Il suffit de remarquer que

$$S_T = S_0e^{rT}\exp(-\frac{1}{2}\Sigma_T^2)e^G$$

où G est une variable gaussienne centrée de variance Σ^2 avec $\Sigma_T^2 = \int_0^T \sigma^2(s)ds$. La formule traditionnelle de BS correspond à $S_T = S_0e^{rT}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T}e^G$ où $G = \int_0^T \sigma_s dW_s$ est une variable gaussienne centrée et de variance $\sigma^2 T = \int_0^T \sigma^2 ds$. Il suffit donc de changer $\sigma^2 T$ en Σ_T^2 dans la formule de BS.

2. (6pt)

(a) Question préliminaire (1 pt) Soit X et Y deux processus d'Itô continus (on ne précisera pas leur dynamique, c'est inutile pour ce qui suit). Rappeler la formule d'intégration par parties pour $d(XY)$. En déduire que

$$X_t d(\frac{1}{X_t}) + \frac{1}{X_t}dX_t + d\langle X, \frac{1}{X}\rangle_t = 0$$

(b) Soit $S_t^{(i)}, i = 1,2$ deux processus continus strictement positifs, $\pi^i, i = 1,2$ deux processus adaptés tels que si on note $V_t = \pi^1 S_t^{(1)} + \pi^2 S_t^{(2)}$ alors $dV_t^\pi = \pi_t^1 dS_t^{(1)} + \pi_t^2 dS_t^{(2)}$. On définit $V_t^1 = V_t^\pi / S_t^{(1)}$.

i. (2pt) Calculer $d\langle V, \frac{1}{S^1}\rangle_t$ en fonction de $d\langle S^1, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t$ et $d\langle S^2, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t$

ii. (2pt) Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2\left(S_t^{(2)} d\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(1)}}dS_t^2 + d\langle S^2, \frac{1}{S^{(1)}}\rangle_t\right)$

iii. (1pt) Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2 d\frac{S_t^{(2)}}{S_t^{(1)}}$

L'exercice 2 a déja été posé en Janvier. Un corrigé a été distribué.
On écrit la formule d'intégration par parties

$$d(\frac{X_t}{Y_t}) = X_t d(\frac{1}{Y_t}) + \frac{1}{Y_t}dX_t + d\langle X, \frac{1}{Y}\rangle_t\,.$$

En particulier (on omet les indices t) ($X = Y$)

$$d(\frac{X}{X}) = d(1) = 0 = Xd(\frac{1}{X}) + \frac{1}{X}dX + d\langle X, \frac{1}{X}\rangle\,.$$

Soit $dV = \pi_1 dS^1 + \pi^2 dS^2$. On a donc

$$d\langle V, \frac{1}{S^1}\rangle = \pi_1 d\langle S^1, \frac{1}{S^1}\rangle + \pi^2 d\langle S^2, \frac{1}{S^1}\rangle\,.$$

Par suite, si $V^1 = V/S^1$, on peut écrire la suite d'égalités (on utilise $V = \pi^1 S^1 + \pi^2 S^2$)

$$\begin{aligned}
dV_t^1 &= Vd(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1}dV + d\langle V, \frac{1}{S^1}\rangle \\
&= (\pi^1 S^1 + \pi^2 S^2)d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1}\left(\pi_1 dS^1 + \pi^2 dS^2\right) + \pi_1 d\langle S^1, \frac{1}{S^1}\rangle + \pi^2 d\langle S^2, \frac{1}{S^1}\rangle \\
&= \pi_1\left(S^1 d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1}dS^1 + d\langle S^1, \frac{1}{S^1}\rangle\right) + \pi^2\left(S^2 d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1}dS^2 + d\langle S^2, \frac{1}{S^1}\rangle\right) \\
&= \pi^2 d(\frac{S^2}{S^1})
\end{aligned}$$

3. (2pt) Soit X solution de

$$dX_t = X_t(\alpha_t dt + \beta_t dW_t)$$

Ecrire cette solution, montrer en particulier que

$$X_t = e^{A_t} M_t$$

où M est une martingale locale et A un processus à variation bornée.
ce sont des calculs faits plusieurs fois en cours et Td

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \alpha_s ds\right)\exp\left(\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)$$

4. (1pt) Soit (a, b, c, z) des constantes et

$$Z_t = e^{(a-c^2/2)t + cW_t}\left(z + b\int_0^t e^{-(a-c^2/2)s - cW_s} ds\right)$$

Quelle est l'EDS vérifiée par Z?
Simple application de Itø

$$dZ_t = (aZ_t + b)dt + cZ_t dW_t$$

5. (9pt5) On considère le processus de dynamique

$$dS_t = S_t((r - q + h_t)dt + \sigma dW_t)$$

où $(h_t, t \geq 0)$ est un processus adapté.

(a) (1pt5) On se place dans le cas $h_t = 0$, $\forall t$. Montrer que $S_t e^{-(r-q)t} = M_t$ est une martingale positive. On définit une probabilité Q par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_t}{M_0} dP|_{\mathcal{F}_t}$. Comment se transforme le MB W?

(b) (1pt) Dans le cas h non nul, expliciter S_t (Utiliser l'exercice 3).

(c) (3pt) On suppose que $h_t = h(S_t)$ où h est une fonction continue. On admet qu'il existe une solution de l'EDS. Montrer que

$$e^{-rT} E(e^{-\int_0^T h(S_s)ds}\Psi(S_T)) = e^{-qT} S_0 E_Q(S_T^{-1}\Psi(S_T))$$

(d) On se place maintenant dans le cas $h_t = S_t^{-p}$. On admet qu'il existe une solution de l'EDS. On pose $Z_t = S_t^p$.

i. (1pt) Quelle est la dynamique de Z?

ii. (1pt) Vérifier, en utilisant l'exercice 4 que l'on peut expliciter Z.

iii. (2pt) Pour quelles fonctions f le processus $f(Z)$ est-il une martingale (locale)?

Dans le cas $h = 0$, on a

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{(r-q)t} M_t \,.$$

Donc $M_t = M_0 e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ est une martingale positive, d'espérance 1 et on peut l'utiliser comme densité de RN. Sous Q, le processus $\widehat{W}_t = W_t - \sigma t$ est un MB.
Dans le cas général

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\int_0^t h_s ds} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \,.$$

On en déduit $e^{-\int_0^t h_s ds} = \frac{1}{S_t} M_t e^{-(r-q)t}$. Donc

$$e^{-rT} E(e^{-\int_0^T h(S_s)ds} \Psi(S_T)) = e^{-rT} E(\frac{1}{S_T} M_T e^{-(r-q)T} \Psi(S_T)) = e^{-qT} E_Q(\frac{1}{S_T} \Psi(S_T)) \,.$$

On se place dans le cas $h_t = S_t^{-p}$ et on pose $Z_t = S_t^p$. Le calcul d Ito conduit à

$$\begin{aligned} dZ_t &= pS_t^p \sigma dW_t + (r-q)pS_t^p dt + pdt + \frac{1}{2}p(p-1)S_t^{p-2} S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= pZ_t \sigma dW_t + \left(\left[(r-q)p + \frac{1}{2}p(p-1)\sigma^2 \right] Z_t + p \right) dt \\ &= (aZ_t + b)dt + cZ_t dW_t \end{aligned}$$

Le processus $f(Z_t)$ est une martingale locale si

$$f'(z)(az+b) + \frac{1}{2} f''(z) c^2 z^2 = 0 \,.$$

On pose $g = f'$. L'équation

$$g(z)(az+b) + \frac{1}{2} g' c^2 z^2 = 0$$

a pour solution $g(z) = \alpha \exp(\frac{2b}{c^2 z}) z^{-1/c^2}$. Les fonctions f recherchées (ce que l'on appelle les fonctions d'échelle) sont les primitives de g.

6. (3pt) Sur le marché financier on trouve un actif risqué de prix $(S_t, t \geq 0)$ vérifiant $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ et un actif sans risque de prix S^0 vérifiant $dS_t^0 = S_t^0 r dt$. Soit π un processus adapté et $(X_t, t \geq 0)$ la solution de

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t X_t (dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt) \,. \tag{2}$$

Expliciter X_T en fonction de W et de π. Calculer $E(\ln X_T)$ (on admettra que les martingales locales qui interviennent sont des martingales). Montrer que l on peut choisir π tel que l'on maximise $E(\ln X_T)$. Expliquer quel type de problème l'on résout ainsi.

Il est facile de montrer que

$$X_t = X_0 e^{rt} \exp\left(\int_0^t \pi_s dW_s - \frac{1}{2}\pi_s^2 ds \right) \exp \int_0^t \pi_s \frac{\mu - r}{\sigma} ds \,.$$

Donc $\ln X_T = X_0 + rT + \int_0^t \pi_s dW_s - \frac{1}{2}\pi_s^2 ds + \int_0^t \pi_s \frac{\mu-r}{\sigma} ds$ et $E(\ln X_T) = X_0 + rT + \int_0^T E(\pi_s \frac{\mu-r}{\sigma} ds - \frac{1}{2}\pi_s^2) ds$. Il reste à trouver π qui majore $\pi_s \frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{1}{2}\pi_s^2$ ce qui donne $\pi_s = \frac{\mu-r}{\sigma}$. On résout ainsi un problème de gestion de portefeuille (dit problème de Merton)

7. (4pt) Soit $L_t = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(e^{-2W_t} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4}e^{-4W_s}\right) ds \right)$

   (a) (2pt) Question préliminaire: Calculer l'intégrale $\int_0^t e^{-2W_s} dW_s$.

(b) (1pt) Montrer que L est une martingale. Quelle est son espérance?

(c) (1pt) On pose $dQ = L_t dP$. Quelle est la dynamique de W sous Q?

On remarque que $e^{-2W_t} - 1 = -2\int_0^t e^{-2W_s} dW_s + 2\int_0^t e^{-2W_s} ds$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\left(e^{-2W_t} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4}e^{-4W_s}\right) ds \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2W_s} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2W_s} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4}e^{-4W_s}\right) ds \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2W_s} dW_s - \frac{1}{4}\int_0^t e^{-4W_s} ds
\end{aligned}
$$

et on sait que $\exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2 ds\right)$ *est une martingale locale. On peut vérifier que la condition de Novikov est satisfaite Sous* Q*, le processus* $\widehat{W} = W - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2W_s} ds$ *est un MB.*

8. (7pt) Soit X solution de (on admet que X existe)

$$dX_t = X_t(1 - X_t)\left((\mu - X_t)dt + dW_t\right), \; X_0 = x$$

Soit $h_0(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta-1}$ et $h_1(x) = 2\frac{\ln(1-x) - \ln x}{(2\mu-1)}$ et $\tau = \inf\{t \geq 0, \, S_t \notin [a, b]\}$.

(a) (3pt) Montrer que $h_0(X_t)$ et $h_1(X_t) - t$ sont des martingales.

(b) (4pt) Montrer que $P(X_\tau = a) = \frac{h_0(x) - h_0(b)}{h_0(a) - h_0(b)}$ et calculer $E(\tau)$.

La première question résulte d'une application du lemme d'Itô: $f(t, X_t)$ *est une martingale locale si '*$\mathcal{G}f(t, X_t) = 0$ *avec* $\mathcal{G}f(t, x) = \partial_t f + x(1-x)(\mu - x)\partial_x f + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\partial_{xx} f$*. Dire que* $h_0(X)$ *est une martingale locale revient à vérifier que* h_0 *est solution de* $x(1-x)(\mu-x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 h'' = 0$*. Montrer que* $h_1(X_t) - t$ *est une martingale locale revient à vérifier que* h_1 *satisfait*

$$-1 + x(1-x)(\mu - x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 h'' = 0\,.$$

En appliquant le théorème d'arêt de Doob (la fonction h_0 *est bornée sur* $[a, b]$*, la martingale locale* $h_0(X_{t\wedge\tau})$ *est uniformément intégrable)* $E(h_0(X_\tau)) = h_0(x)$ *soit*

$$h_0(x) = E(h_0(X_\tau)) = h_0(a)P(X_\tau = a) + h_0(b)P(X_\tau = b) = h_0(a)P(X_\tau = a) + h_0(b)(1 - P(X_\tau = a))\,.$$

On applique ensuite le théorème de Doob à $h_1(X_t) - t$

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= E[(h_1(a) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau = a}] + E[(h_1(b) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau = b})] \\
&= h_1(a)P(X_\tau = a) + h_1(b)(1 - P(X_\tau = a)) - E(\tau)
\end{aligned}
$$