M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2005-2006
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 05

Le processus W est un mouvement Brownien issu de 0, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

Les exercices 1 et 2 doivent être résolus sans documents pendant la première heure. Vous pouvez rendre votre copie avant la fin de la première heure, pour passer aux exercices suivants pour lesquels vous avez droit aux documents.

1. On considère, pour $\delta > 0$ la solution $Y^{(\delta)}$ de

$$dY_t^{(\delta)} = \delta\, dt + 2\sqrt{Y_t^{(\delta)}}\, dW_t,\ Y_0^{(\delta)} = y \geq 0\,.$$

On admet que ce processus existe (et qu'il reste positif).

(a) Quelle est la dynamique du processus $X^{(\delta)} = \sqrt{Y^{(\delta)}}$.

(b) Montrer que, pour toute fonction $f \in C^2(]0,\infty[)$ le processus

$$f(X_t^{(\delta)}) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s^{(\delta)})ds,\ t \geq 0$$

est une martingale locale, où $\mathcal{A}$ est un opérateur que l'on définira.

(c) Soit $\lambda > 0$ donné. On se place dans le cas $\delta = 2$ et on note $X_t = X_t^{(2)}$. Montrer que

$$L_t = (X_t)^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{X_s^2}\right)$$

est une martingale locale.

2. Soit S le prix d'un actif financier de dynamique $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t + \varphi_t dB_t)$ où μ, σ, φ sont des processus adaptés par rapport à la filtration engendrée par les mouvements Brownien B et W, supposés indépendants. L'actif sans risque est de taux $r = 0$. Trouver toutes les martingales mesure équivalentes. Le marché est-il complet? sans arbitrage? Pourrait-on écrire différemment cette dynamique dans le cas de coefficients déterministes? dans le cas général?

****

3. Soit θ une constante et L la solution de $dL_t = L_t\theta dW_t, L_0 = 1$.

(a) Calculer $E(L_T \ln L_T|\mathcal{F}_t)$ par les deux méthodes suivantes

i. En utilisant le théorème de Girsanov

ii. En calculant la dynamique du processes $(Y_t = L_t \ln L_t, t \geq 0)$

(b) Soit α une constante. Calculer $E(L_T^\alpha|\mathcal{F}_t)$.

4. Soit

$$X_t = e^{\mu t}e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\,, \quad Y_t = e^{\nu t}e^{\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t}$$

où B et W sont des MB corrélés, μ, ν, σ, γ des constantes. Calculer $E(X_tY_t)$.

5. (tiré d'articles de Brigo. D.)Un processus X est dit processus de Vasicek si sa dynamique est de la forme $dX_t = k(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$ où k, μ, σ sont des constantes. Soit X et Y deux processus de Vasicek

$$dX_t = k(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$
$$dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \nu dB_t$$

où W et B sont des MB corrélés.

(a) Soit $U_t = \lambda X_t$. Montrer que le processus U est un processus de Vasicek.

(b) Quelle est la dynamique de X^2?

(c) Soit $Z = X + Y$. Montrer que le processus Z est un processus de Vasicek.

(d) Quelle dynamique suit le processus $\widetilde{X}_t = X_t - \mu$? En utilisant des résultats vus en TD, donner la loi de la v.a. $\int_0^t \widetilde{X}_s ds$? En déduire le calcul de $E(\exp - \int_0^T X_s ds)$ et de $E(\exp - \int_0^T (X_s + Y_s) ds)$

6. Le marché financier est celui de Black Scholes: un actif sans risque de taux constant r et un actif risqué
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$
où μ et σ sont des constantes. Soit X la richesse d'un agent qui investit dans le marché en utilisant un portefeuille autofinançant π (π est un processus adapté). On rappelle que
$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dS_t - rS_t dt)$$
On ne demande pas de démontrer ce résultat, on se contente d'utiliser cette formule.

(a) Quelle est la probabilité risque neutre? On notera Q cette probabilité. Montrer que $(X_t e^{-rt}, t \geq 0)$ est une Q-martingale locale. Dans la suite, on admettra que π est bien choisi et que $(X_t e^{-rt}, t \geq 0)$ est une Q-martingale.

(b) L agent financier souhaite obtenir une richesse terminale égale à H où H est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable donnée.

i. Donner la valeur de X_t en fonction de H.

ii. Quelle doit être la richesse initiale de l'agent?

iii. Que doit-il faire pour obtenir une richesse terminale de H?

iv. Quel est le portefeuille utilisé si H est une constante?

v. Montrer que si H est positive, la richesse de l'agent sera positive à tout instant.

vi. Ecrire la dynamique de $Z_t = \ln X_t$ et calculer $E_P(\ln(X_T))$ en fonction de π et de la richesse initiale de l'agent.

vii. Trouver π qui maximise $E_P(\ln(X_T))$.

(c) L'agent souhaite profiter de la vie et consommer. Sa richesse est alors modélisée par
$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dS_t - rS_t dt) - c_t dt$$
où c est un processus positif donné (ce sera la consommation)

i. Montrer que le processus $Y_t = X_t e^{-rt} + \int_0^t e^{-rs} c_s ds$ est une Q-martingale (locale). Dans la suite, on admettra que π est bien choisi et que $(Y_t, t \geq 0)$ est une Q-martingale.

ii. Quelle doit être la richesse initiale de l'agent qui souhaite consommer c et avoir une richesse terminale de H?

iii. Montrer que si H est positive, la richesse de l'agent sera positive à tout instant.

7. Le marché financier comporte un actif sans risque de taux constant r et un actif risqué
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

(a) Soit $M_T = \sup_{t \leq T} S_t$. En utilisant les résultats du cours sur la loi de $T_a = \inf\{t : W_t + \nu t \geq a\}$, expliciter la loi de M_T. On notera $f(\mu, \sigma, T; x)$ la densité de M_T, soit $f(\mu, \sigma, T; x)dx = P(M_T \in dx)$. Quel serait le prix d'un actif de payoff $M_T = \sup_{t \leq T} S_t$? (On ne demande pas de faire les calculs, mais de préciser clairement quels types de calculs il conviendrait de faire, en utilisant la densité $f(r, \sigma, T; x)$.

(b) Soit a une constante. Quel serait le prix d'un actif de payoff S_T^a?

(c) Un call Européen sur le sous-jacent S de strike K, de maturité T^* est négocié sur le marché (son payoff est $(S_{T^*} - K)^+$). On note C_t le prix de ce call à la date t. Soit $T < T^*$. On considére un call de maturité T sur le call C. Quels calculs serez vous amenés à faire pour évaluer ce produit? (On ne demande pas de faire les calculs, mais de préciser clairement quels types de calculs il conviendrait de faire)

Corrigé succint.

En dérivant par rapport à x

$$Q(X_t \in dx, m_t^X \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{2\nu y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{-x+2y+\nu t}{\sqrt{t}}\right)^2\right).$$

Par définition de X,

$$Q(X_t \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\nu t}{\sqrt{t}}\right)^2\right)$$

Il reste à noter que

$$2\nu y - \frac{1}{2}\left(\frac{-x+2y+\nu t}{\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\nu t}{\sqrt{t}}\right)^2 = 2\nu y - \frac{1}{2t}\left(4y^2 + 4y(-x+\nu t)\right) = -\frac{2}{t}\left(y^2 - yx\right)$$

Ex 2

$$\begin{aligned}
E_Q(e^{\lambda B_T} 1\!\!1_{\tau<T}) &= E_P(L_T e^{\lambda B_T} 1\!\!1_{\tau<T}) \\
&= E_P(e^{\lambda(W_T+(\tau\wedge T))} 1\!\!1_{\tau<T} \exp(-W_{\tau\wedge T} - \frac{1}{2}\tau\wedge T)) \\
&= E_P(e^{\lambda(W_T+\tau)} 1\!\!1_{\tau<T} \exp(-W_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \\
&= \int_0^T du f(u) E_P(e^{\lambda(W_T+u)} \exp(-W_u - \frac{1}{2}u)) \\
&= \int_0^T du f(u) e^{\lambda u - \frac{1}{2}u} E_P(e^{\lambda(W_T-W_u)} e^{(\lambda-1)W_u}) \\
&= \int_0^T du f(u) e^{\lambda u - \frac{1}{2}u} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(T-u)} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)^2 u}) \\
&= e^{\frac{1}{2}\lambda^2 T} \int_0^T du f(u)
\end{aligned}$$

Ex Brigo Il faut utiliser $E(Ae^B)$ quand A et B sont des gaussiennes correlles
Ex 5 Le plus simple est d'utiliser IP,

$$E(X_tY_t) = 1 + \int_0^t (\nu + \mu + \sigma\gamma\rho) E(X_sY_)ds$$

et de résoudre cette EDO.

Soit $dL_t = \lambda_t L_t d_t$. Calculer la dynamique de L^2. Calculer explicitement $E(L_t^2|\mathcal{F}_t)$ dans le cas λ constant.