M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2006-2007
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 06

Vous devez répondre aux questions 1, 2, 3 et 4 sans documents durant la première heure. Ensuite, vous passez à la suite, avec documents.

Les questions sont indépendantes. On note W un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. DANS CETTE QUESTION, des réponses fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisé.

   Donner toutes les caractérisations du MB que vous connaissez

2. Montrer que $(e^{\lambda^2 t/2} \sin \lambda W_t,\, t \geq 0)$ est une martingale (locale).

3. Résoudre (rapidement, inutile de donner les démonstrations) les trois équations suivantes, avec les conditions initiales $X_0 = 1$

$$dX_t = \sigma dW_t, \quad \frac{dX_t}{X_t} = \sigma dW_t, \quad d(\ln X_t) = \sigma dW_t$$

4. Soit $(\lambda_t, t \geq 0)$ un processus positif $\mathbf{F}^W$-adapté et $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$. Soit U une variable aléatoire positive de fonction de répartition F, indépendante de $\mathcal{F}_\infty$. On définit τ par $\tau = \inf\{t : \Lambda_t \geq U\}$. Exprimer $P(\tau \leq s|\mathcal{F}_t)$ pour $s < t$ en fonction de F et de Λ.

****

5. Soit

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(-Y_t dt + \sigma dW_t),\ S_0 = x & (1)\\ dY_t &= b(Y_t)dt + g(Y_t)dB_t,\ Y_0 = y & (2) \end{aligned}$$

   où B et W sont deux mouvements Browniens de corrélation ρ. On note $\mathbf{F}$ la filtration engendrée par le couple W, B et par $\mathbf{F}^B$ celle engendrée par B. On suppose que (2) a une solution. On pose $\widehat{Y}_t = \int_0^t Y_s ds$.

   (a) Montrer que $(S_t \exp \widehat{Y}_t,\, t \geq 0)$ est une martingale. Calculer explicitement cette martingale. Ecrire la solution de (1) en fonction de $\widehat{Y}$ et de W.

   (b) Soit Q définie par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec

$$dL_t = \sigma L_t dW_t,\ L_0 = 1$$

   Expliciter L_T en fonction de W_T. Justifier que Q est une mesure de probabilité. En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer S_T en fonction de L_T et de $\widehat{Y}_T$. Montrer que $E(S_T|\mathcal{F}_t)$ s'écrit comme $S_t E_Q(\exp - \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t)$. Préciser la dynamique de S et celle Y sous Q, dans le cas où B et W sont indépendants, puis dans le cas général.

   (c) Justifier qu'il existe une fonction φ telle que $E(\exp \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t^B) = \varphi(t, Y_t)$. Montrer que $\exp(\widehat{Y}_t)\, \varphi(t, Y_t)$ est une P-martingale. On admettra que φ est régulière (soit $C^{1,2}$). Quelle est l'EDP vérifiée par φ?

   (d) On se place dans le cas $b(y) = b$ et $g(y) = \nu$ où b et ν sont des constantes. Donner les dynamiques de Y^{-1} et de $Z_t = e^{Y_t} \int_0^t e^{-Y_s} ds$. Justifier que Z est markovien. Montrer, par un calcul direct que $E(Z_t|\mathcal{F}_s^B) = f(t, s)Z_s + g(t, s)$ où f et g sont des fonctions déterministes que l'on explicitera comme des espérances.

   (e) Résoudre l'équation

$$dS_t = S_t(-Y_t dt + \sigma(t)dW_t),\ S_0 = x$$

   où σ est une fonction déterministe. Montrer que $E(S_T|\mathcal{F}_t)$ s'écrit comme $S_t E_{\widehat{Q}}(\exp - \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t)$ pour une probabilité $\widehat{Q}$ que l'on précisera.

6. Soit $dX_t = (a + bX_t)dt + \sqrt{\sigma + \theta X_t} dW_t$. On admet que les coefficients a, b, σ, θ sont tels que cette équation a une solution.

   (a) Calculer $E(X_t)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (b) Ecrire l'EDS vérifiée par le processus $(X_t^n, t \geq 0)$ pour n entier.

   (c) Calculer $E(X_t^2)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (d) Justifier que, pour $t < T$ et λ réel, $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2} X_T} | F_t^W) = \psi(t, X_t)$ pour une fonction ψ que l'on supposera de classe $C^{1,2}$. Montrer que le calcul de $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2} X_T})$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord. On ne demande pas la résolution de l'EDP.

   (e) Montrer que le calcul de $E(\exp(-\frac{\lambda^2}{2} X_T - \mu \int_0^T X_s ds))$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord.

7. Soit $\lambda_t = W_t^2$ et $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$. Soit U une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ (soit $P(U > u) = \theta e^{-\theta u}$), indépendante de $\mathcal{F}_\infty$. On définit τ par $\tau = \inf\{t : \Lambda_t \geq U\}$. On note $\Phi(\lambda, \mu)$ la transformée de Laplace du couple $W_T, \int_0^T W_s^2 ds$ pour un MB issu de 0 et $\Phi(x; \lambda, \mu)$ la transformée de Laplace du couple $W_T, \int_0^T W_s^2 ds$ pour un MB partant de x. (La TL d'un couple (X, Y) est $E(\exp(\lambda X + \mu Y))$ On note $\mathbf{G}$ la filtration $\mathbf{F}^W \vee \mathbf{H}$ (notations du cours).

   (a) Exprimer $P(\tau \leq s | \mathcal{F}_t)$ pour $s < t$ en fonction de Λ.

   (b) Exprimer $E(f(W_T) \mathbb{1}_{T<\tau} | \mathcal{G}_t)$ en terme de Λ.

   (c) Montrer que l on peut calculer $E(e^{W_T} \mathbb{1}_{T<\tau})$ et $E(e^{W_T} \mathbb{1}_{T<\tau} | \mathcal{G}_t)$ en fonction de Φ.

M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2006-2007
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 06

Vous devez répondre aux questions 1, 2, 3 et 4 sans documents durant la première heure. Ensuite, vous passez à la suite, avec documents.

Les questions sont indépendantes. On note B un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. DANS CETTE QUESTION, des réponses fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisé.

   Donner toutes les martingales construites à partir d'un MB que vous connaissez (au moins deux martingales non triviales)

2. Montrer que $(e^{\lambda^2 t/2} \cos \lambda B_t,\, t \geq 0)$ est une martingale (locale)

3. Résoudre (rapidement, inutile de donner les démonstrations) les trois équations suivantes, avec les conditions initiales $X_0 = 1$

$$dX_t = \lambda dB_t, \quad \frac{dX_t}{X_t} = \lambda dB_t, \quad d(\ln X_t) = \lambda dB_t$$

4. Soit $(\gamma_t, t \geq 0)$ un processus positif $\mathbf{F}^B$ adapté et $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$. Soit Θ une variable aléatoire positive de loi de fonction de survie $G(x) = P(\Theta > x)$, indépendante de $\mathcal{F}_\infty$. On définit τ par $\tau = \inf\{t : \Gamma_t \geq \Theta\}$. Exprimer $P(\tau \leq s|\mathcal{F}_t)$ pour $s < t$ en fonction de Γ.

****

5. Soit

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(-Y_t dt + \sigma dW_t),\ S_0 = x && (3)\\ dY_t &= b(Y_t)dt + g(Y_t)dB_t,\ Y_0 = y && (4) \end{aligned}$$

   où B et W sont deux mouvements Browniens de corrélation ρ. On note $\mathbf{F}$ la filtration engendrée par le couple W, B et par $\mathbf{F}^B$ celle engendrée par B. On suppose que (4) a une solution. On pose $\widehat{Y}_t = \int_0^t Y_s ds$.

   (a) Montrer que $(S_t \exp \widehat{Y}_t,\, t \geq 0)$ est une martingale. Calculer explicitement cette martingale. Ecrire la solution de (3) en fonction de $\widehat{Y}$ et de W.

   (b) Soit Q définie par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec

$$dL_t = \sigma L_t dW_t,\ L_0 = 1$$

   Expliciter L_T en fonction de W_T. Justifier que Q est une mesure de probabilité. En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer S_T en fonction de L_T et de $\widehat{Y}_T$. Montrer que $E(S_T|\mathcal{F}_t)$ s'écrit comme $S_t E_Q(\exp - \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t)$. Préciser la dynamique de S et celle Y sous Q, dans le cas où B et W sont indépendants, puis dans le cas général.

   (c) Justifier qu'il existe une fonction φ telle que $E(\exp \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t^B) = \varphi(t, Y_t)$. Montrer que $\exp(\widehat{Y}_t)\, \varphi(t, Y_t)$ est une P-martingale. On admettra que φ est régulière (soit $C^{1,2}$). Quelle est l'EDP vérifiée par φ?

   (d) On se place dans le cas $b(y) = b$ et $g(y) = \nu$ où b et ν sont des constantes. Donner les dynamiques de Y^{-1} et de $Z_t = e^{Y_t} \int_0^t e^{-Y_s} ds$. Justifier que Z est markovien. Montrer, par un calcul direct que $E(Z_t|\mathcal{F}_s^B) = f(t,s)Z_s + g(t,s)$ où f et g sont des fonctions déterministes que l'on explicitera comme des espérances.

   (e) Résoudre l'équation

$$dS_t = S_t(-Y_t dt + \sigma(t)dW_t),\ S_0 = x$$

   où σ est une fonction déterministe. Montrer que $E(S_T|\mathcal{F}_t)$ s'écrit comme $S_t E_{\widehat{Q}}(\exp - \int_t^T Y_s ds|\mathcal{F}_t)$ pour une probabilité $\widehat{Q}$ que l'on précisera.

6. Soit $dX_t = (a + bX_t)dt + \sqrt{\sigma + \theta X_t}dW_t$. On admet que les coefficients a, b, σ, θ sont tels que cette équation a une solution.

   (a) Calculer $E(X_t)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (b) Ecrire l'EDS vérifiée par le processus $(X_t^n, t \geq 0)$ pour n entier.

   (c) Calculer $E(X_t^2)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (d) Justifier que, pour $t < T$ et λ réel, $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2}X_T}|F_t^W) = \psi(t, X_t)$ pour une fonction ψ que l'on supposera de classe $C^{1,2}$. Montrer que le calcul de $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2}X_T})$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord. On ne demande pas la résolution de l'EDP.

   (e) Montrer que le calcul de $E(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}X_T - \mu\int_0^T X_s ds))$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord.

7. Soit $\lambda_t = B_t^2$ et $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$. Soit U une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ (soit $P(U > u) = \theta e^{-\theta u}$), indépendante de $\mathcal{F}_\infty$. On définit τ par $\tau = \inf\{t : \Lambda_t \geq U\}$. On note $\Phi(\lambda, \mu)$ la transformée de Laplace du couple $B_T, \int_0^T B_s^2 ds$ pour un MB issu de 0 et $\Phi(x; \lambda, \mu)$ la transformée de Laplace du couple $B_T, \int_0^T B_s^2 ds$ pour un MB partant de x. (La TL d'un couple (X, Y) est $E(\exp(\lambda X + \mu Y))$ On note $\mathbf{G}$ la filtration $\mathbf{F}^B \vee \mathbf{H}$ (notations du cours).

   (a) Exprimer $P(\tau \leq s|\mathcal{F}_t)$ pour $s < t$ en fonction de Λ.

   (b) Exprimer $E(f(B_T)\mathbb{1}_{T<\tau}|\mathcal{G}_t)$ en terme de Λ.

   (c) Montrer que l on peut calculer $E(e^{B_T}\mathbb{1}_{T<\tau})$ et $E(e^{B_T}\mathbb{1}_{T<\tau}|\mathcal{G}_t)$ en fonction de Φ.

M2 Ingéniérie financière, GRA. Université d'EVRY 2006-2007
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 06

Vous devez répondre aux questions 1, 2, et 3 sans documents durant la première heure. Ensuite, vous passez à la suite, avec documents.

Les questions sont indépendantes. On note W un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. DANS CETTE QUESTION, des réponses fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisé.

   Donner toutes les caractérisations du MB que vous connaissez. Donner toutes les martingales construites à partir d'un MB que vous connaissez (au moins deux martingales non triviales)

2. Donner la dynamique de $Y_t = e^{\lambda^2 t/2} \ln(W_t^2 + 1)$.

3. Résoudre (rapidement, inutile de donner les démonstrations) l'équation suivante :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sqrt{2} dW_t,\ X_0 = 2$$

****

4. Soit Z défini par $dZ_t = h(Z_t)dt + dW_t$ et $Y_t = e^{2Z_t}$. Montrer que $dY_t = f(Y_t)dt + g(Y_t)dW_t$ où f et g sont des fonctions que l'on déterminera.

5. Soit

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(-Y_t dt + \sigma dW_t),\ S_0 = x & (5) \\ dY_t &= b(Y_t)dt + g(Y_t)dB_t,\ Y_0 = y & (6) \end{aligned}$$

   où B et W sont deux mouvements Browniens indépendants. On note $\mathbf{F}$ la filtration engendrée par le couple W, B et par $\mathbf{F}^B$ celle engendrée par B. On suppose que (6) a une solution. On pose $\widehat{Y}_t = \int_0^t Y_s ds$.

   (a) Montrer que $(S_t \exp \widehat{Y}_t,\ t \geq 0)$ est une martingale. Exprimer cette martingale en fonction de W. Ecrire la solution de (5) en fonction de $\widehat{Y}$ et de W..

   (b) Soit Q définie par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec

$$dL_t = \sigma L_t dW_t,\ L_0 = 1$$

   Expliciter L_T en fonction de W_T. Justifier que Q est une mesure de probabilité. En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer S_T en fonction de L_T et de $\widehat{Y}_T$. Préciser la dynamique de S et celle Y sous Q.

   (c) Justifier qu'il existe une fonction φ telle que $E(\exp \int_t^T Y_s ds | \mathcal{F}_t^B) = \varphi(t, Y_t)$. Montrer que $\exp(\widehat{Y}_t)\, \varphi(t, Y_t)$ est une P-martingale. On admettra que φ est régulière (soit $C^{1,2}$). Quelle est l'EDP vérifiée par φ?

6. Soit $dX_t = (a + bX_t)dt + \sqrt{\sigma + \theta X_t} dW_t$. On admet que les coefficients a, b, σ, θ sont tels que cette équation a une solution.

   (a) Calculer $E(X_t)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (b) Ecrire l'EDS vérifiée par X_t^2 et calculer $E(X_t^2)$. On admettra que les martingales locales qui apparaîtront dans le calcul sont des martingales.

   (c) Justifier que $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2} X_T} | F_t^W) = \psi(t, X_t)$ pour une fonction ψ que l'on supposera de classe $C^{1,2}$. Montrer que le calcul de $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2} X_T})$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord. On ne demande pas la résolution de l'EDP.