M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2007-2008
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 07

Sans documents

RENDRE L'ENONCE avec la copie

Les questions sont indépendantes. Dans tous les exercices, B est un mouvement Brownien, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est sa filtration naturelle. Le processus S, prix d'un actif risqué, est solution de

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),\ S_0 = x \tag{1}$$

où μ et σ sont des constantes, $\sigma \neq 0$.

1. **Question de cours** Cette question est obligatoire.
   Donner plusieurs méthodes pour vérifier qu'un processus donné est un MB. Illustrer par des exemples vus en cours

2. Soit ν une constante. Montrer que le processus suivant est une martingale

   $$(e^{t\nu^2/2}\left(B_t \cos(\nu B_t) + \nu t \sin(\nu B_t)\right),\ t \geq 0)$$

3. Soit Z un processus continu strictement positif, qui admet une représentation sous la forme

   $$Z_t = Z_0 + M_t + A_t$$

   où M est une martingale et A un processus croissant. Montrer que Z est une sous martingale. (On pourra se contenter de traiter le cas où M est une martingale de la filtration Brownienne $\mathbf{F}$ et A est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.) On suppose qu'il existe une martingale (locale) N et un processus croissant C tel que $Z_t = N_t C_t$. En appliquant la formule d'intégration par parties, exprimer dC_t en fonction de dA_t, C_t et Z_t. Expliciter C_t. Montrer que tout processus Z de la forme précédente admet une décomposition multiplicative de la forme CN. Application à $dZ_t = Z_t(\sigma dB_t + \mu dt)$.

4. Soit $dL_t = L_t \theta dB_t$, $L_0 = 1$ où θ est une constante. Soit $\alpha \in I\!\!R$; montrer que

   $$L_t^\alpha / \mathbb{E}_P(L_t^\alpha)$$

   est une $\mathbb{P}$-martingale. Montrer qu'il existe $\theta \in I\!\!R$ tel que S, défini par (1), est une $\mathbb{Q}$-martingale avec $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = L_T\, d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$.

   Montrer que $X_t = L_t^{\alpha-1}/\mathbb{E}_P(L_t^\alpha)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Montrer qu'il existe un couple (x, π), $x \in I\!\!R$, π processus adapté, tel que

   $$X_t = x + \int_0^t \pi_s dS_s$$

   Déterminer (x, π). Interprétation financière.

5. Soit $dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t,\ X_0 = x$. On pose $u(t, x, \theta, \lambda) = \mathbb{E}(\exp -(\theta X_t + \lambda \int_0^t X_s ds))$. Montrer que $u(t, x, \theta, \lambda) = \exp -(A(t, \theta, \lambda)x + B(t, \theta, \lambda))$ où A et B vérifient des EDO. Comment résoudre ces EDO?

6. Soit S défini par (1), et r le taux d'intérêt. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre.
   (a) Calculer $\mathbb{E}_Q(S_T^2)$ et $\mathbb{E}_Q(S_T^2|\mathcal{F}_t)$, pour $t < T$.
   (b) Quel est le prix, à la date t d'un actif contingent qui verse S_T^2 en T? Quel est le portefeuille de couverture associé?

7. On considère un marché financier où sont négociés un actif sans risque de taux r constant, de prix S_t^0 et un actif risqué de dynamique donnée par (1). La richesse associée au portefeuille $(\pi_t^0, \pi_t; t \geq 0)$ est $V_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$.

   Le portefeuille $(1, S_t^{-1})$ est-il autofinançant ? Le portefeuille $(x - \int_0^t S_u e^{-ru} du, t)$ est-il autofinançant ? Quel est le montant en cash dont on doit disposer pour auto-financer une position longue égale à t^2 (soit trouver π_0 tel que π^0, π soit autofinançant avec $\pi_t = t^2$).

M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2007-2008
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 07

Sans documents

RENDRE L'ENONCE avec la copie

Les questions sont indépendantes. Dans tous les exercices, W est un mouvement Brownien, on note $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration. Le processus S, prix d'un actif risqué, est solution de

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ S_0 = x \tag{2}$$

où μ et σ sont des constantes, $\sigma \neq 0$.

1. **Question de cours** Cette question est obligatoire.
   Comment reconnaitre qu'un processus est une martingale (locale). Donner des exemples de martingales.

2. Soit λ une constante. Montrer que le processus
   $$e^{t\lambda^2/2}\left(\lambda t \cos(\lambda W_t) - W_t \sin(\lambda W_t)\right),\ t \geq 0$$
   est une martingale.

3. Soit Y un processus continu strictement positif, qui admet une représentation sous la forme
   $$Y_t = Y_0 + M_t - A_t$$
   où M est une martingale et A un processus croissant. Montrer que Y est une sur-martingale. On pourra se contenter de traiter le cas où M est une martingale de la filtration Brownienne $\mathbf{F}$ et A est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose qu'il existe une martingale (locale) N et un processus décroissant C tel que $Y_t = N_t C_t$. En appliquant la formule d'intégration par parties, exprimer dC_t en fonction de dA_t, C_t et Y_t. Expliciter C_t. Montrer que tout processus Y de la forme précédente admet une décomposition multiplicative de la forme CN. Application à $dY_t = S_t(\sigma dW_t + \nu dt)$.

4. Soit $dL_t = L_t \nu dW_t$, $L_0 = 1$ où ν est une constante. Soit $\beta \in I\!R$; montrer que
   $$L_t^\beta / \mathbb{E}_P(L_t^\beta)$$
   est une martingale. Montrer qu'il existe $\nu \in I\!R$ tel que S, défini par (2) est une $\mathbb{Q}$-martingale avec $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = L_T\, d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$. Montrer que $Z_t = L_t^{\beta-1}/\mathbb{E}_P(L_t^\beta)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Montrer qu'il existe un couple (z, π), $z \in I\!R$, π processus adapté, tel que
   $$Z_t = z + \int_0^t \pi_s dS_s$$
   Déterminer (z, π). Interprétation financière.

5. Soit $dX_t = \kappa(b - X_t)dt + \sigma dW_t,\ X_0 = x$. On pose $u(t, x, a, \lambda) = \mathbb{E}(\exp -(aX_t + \lambda \int_0^t X_s ds))$. Montrer que $u(t, x, a, \lambda) = \exp -(A(t, a, \lambda)x + B(t, a, \lambda))$ où A et B vérifient des EDO. Comment résoudre ces EDO?

6. Soit S vérifiant (2) et r le taux d'intérêt. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre.
   (a) Calculer $\mathbb{E}_Q(S_T^3)$ et $\mathbb{E}_Q(S_T^3|\mathcal{F}_t)$, pour $t < T$.
   (b) Quel est le prix, à la date t d'un actif contingent qui verse S_T^3 en T? Quel est le portefeuille de couverture associé?

7. On considère un marché financier où sont négociés un actif sans risque de taux r constant, de prix S_t^0 et un actif risqué de dynamique $dS_t = S_t(\sigma dW_t + \mu t)$. La richesse associée au portefeuille (π^0, π) est $V_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$. Le portefeuille $(S_t, 1)$ est-il autofinançant ?
   Le portefeuille $(x - 2\int_0^t u S_u e^{-ru} du, t^2)$ est-il autofinançant ? Quel est le montant en cash dont on doit disposer pour auto-financer une position longue égale à t (soit trouver π_0 tel que π^0, π soit autofinançant avec $\pi_t = t$).