DESS Ingéniérie mathématiques. Université d'EVRY 2004-2005
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Janvier 05

Les exercices 1, 2 et 3 doivent être résolus sans documents pendant la première heure. Vous pouvez rendre votre copie avant la fin de la première heure, pour passer aux exercices suivants pour lesquels vous avez droit aux documents.

Le processus W est un mouvement Brownien issu de 0, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. On suppose que la dynamique d'un actif est, sous la probabilité risque neutre

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t)dW_t),\ S_0 = x$$

   où r est une constante et σ *une fonction* continue du temps.

   (a) Ecrire la forme de la solution S_t. Montrer que $\ln(S_T)$ est une v.a. dont on explicitera la loi.

   (b) Calculer la valeur d'un call Européen de maturité T et de strike K, avec le minimum de calculs. On rappelle que, dans le cas $\sigma(t) = \sigma$, la formule de Black et Scholes est

$$C = S_0\mathcal{N}(d_1(S_0, \sigma, T)) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2(S_0, \sigma, T))$$

   avec

$$d_1(x, \sigma, T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{x}{Ke^{-rT}}\right) - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},\ d_2(x, \sigma, T) = d_1(x, \sigma, T) + \sigma\sqrt{T}\,.$$

2. Calculer $E(S_T)$ lorsque $dS_t = S_t(dt + tdW_t),\ S_0 = 1\,.$

3. Soit

$$dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\mu_i dt + \sigma_i dW_t^{(i)}),\ S_0^{(i)} = x_i,\ i = 1, 2$$

   où $W^{(i)}, i = 1, 2$ sont des mouvements Browniens de corrélation ρ et $(\mu_i, \sigma_i, i = 1, 2)$ des constantes.

   (a) On suppose que $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ sont indépendants (soit $\rho = 0$). Ecrire l'EDS vérifiée par le produit $S^{(1)}S^{(2)}$ et le quotient $S^{(1)}/S^{(2)}$. **Conserver le calcul de la dynamique de $S^{(1)}/S^{(2)}$ pour l' exercice 5.**

   (b) Dans le cas général, calculer l'EDS vérifiée par le produit $S^{(1)}S^{(2)}$.

****

4. Soit F et φ deux fonctions continues (bornées) données, S un processus de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(t)dW_t),\ S_0 = x > 0$$

   où σ est une fonction déterministe, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par

$$f(t, x) = E(F(S_T) + \int_t^T \varphi(s, S_s)ds | S_t = x)$$

   (a) Justifier rapidement que $f(t, S_t) = E(F(S_T) + \int_t^T \varphi(s, S_s)ds|\mathcal{F}_t)\,.$

   (b) Montrer que $M_t = f(t, S_t) + \int_0^t \varphi(s, S_s)ds$ est une martingale.

   (c) En appliquant la formule d'Itô en déduire une EDP vérifié par f.

(d) Le théorème de représentation prévisible prouve l'existence d'une constante m_0 et d'un processus adapté $\widehat{m}$ tels que

$$M_t = m_0 + \int_0^t \widehat{m}_s dW_s \,.$$

Montrer que $\widehat{m}$ s'explicite en fonction des dérivées de f.

5. Soit

$$dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\mu_i dt + \sigma_i(t) dW_t^{(i)}),\ S_0^{(i)} = x_i, i = 1,2$$

où $(W^{(1)}, W^{(2)})$ sont des mouvement Browniens indépendants.

(a) On note S le quotient $S = S^{(2)}/S^{(1)}$. Montrer rapidement qu'il existe une probabilité Q équivalente à P, telle que $(S_t, t \geq 0)$ soit une Q-martingale.

(b) Soit $\pi = (\pi^1, \pi^2)$ un portefeuille autofinancant : si on note $V_t^\pi = \pi_t^1 S_t^{(1)} + \pi_t^2 S_t^{(2)}$ le processus V^π vérifie $dV_t^\pi = \pi_t^1 dS_t^{(1)} + \pi_t^2 dS_t^{(2)}$. On définit $V_t^1 = V_t^\pi / S_t^{(1)}$. Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2 dS_t$.

(c) Comment pouvez vous calculer la valeur d'un actif contingent de pay-off $h(S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$?

6. Soit

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$$

où μ et σ^2 (le carré de σ) sont des fonctions affines : $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x\,; \sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$. On souhaite montrer que pour toute fonction affine $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x$, pour tout θ, il existe deux fonctions α et β telles que,

$$E\left(e^{\theta S_T} \exp\left(-\int_t^T \psi(S_s)ds\right) | \mathcal{F}_t\right) = e^{\alpha(t)+\beta(t)S_t} \,.$$

(a) Montrer qu'il suffit d'établir l'existence de deux fonctions α et β telles que le processus

$$e^{\alpha(t)+\beta(t)S_t} \exp\left(-\int_0^t \psi(S_s)ds\right)$$

est une martingale avec $\alpha(T) = 0, \beta(T) = \theta$.

(b) Montrer que la détermination de α et β conduit à la résolution d'une équation de Ricatti (type d'équation différentielle non linéaire) et d'une équation différentielle linéaire. On ne demande pas la résolution de ces équations.

(c) Généraliser le résultat au cas où $dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t + dX_t$ où $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson.

7. Sur le marché financier on trouve un actif risqué de prix $(S_t, t \geq 0)$ vérifiant $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ et un actif sans risque de prix S^0 vérifiant $dS_t^0 = S_t^0 r dt$. On se donne un processus $(c_t, t \geq 0)$ à valeurs positives adapté et un processus $(\pi_t, t \geq 0)$ de carré intégrable $\mathcal{F}_t$- adapté. Soit $(X_t, t \geq 0)$ la solution de

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma}dt) - c_t dt \,. \tag{1}$$

(a) Déterminer la probabilité risque neutre Q associé au marché financier. Le processus X est-il un processus de prix?

(b) Montrer que, sous Q, le processus $X_t e^{-rt} + \int_0^t e^{-rs} c_s ds$ est une martingale.

(c) Montrer que $X_t e^{-rt} = E_Q(X_T e^{-rT} + \int_t^T e^{-rs} c_s ds | \mathcal{F}_t)$. Ecrire cette relation sous P.

8. Soit $0 < s < T$ et $m \in \mathbb{R}$. Vérifier que la solution de

$$dX_t = \frac{(s-T)X_t + mT}{(s-T)t + T^2} dt + dW_t, X_0 = 0$$

est

$$X_t = \frac{m}{T} t + [(s-T)t + T^2] \int_0^t \frac{dW_u}{(s-T)u + T^2}$$