M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2005-2006
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Mars 2006

Le processus W est un mouvement Brownien issu de 0, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \le t)$ sa filtration naturelle.

Les exercices 1 et 2 doivent être résolus sans documents pendant la première heure. Vous pouvez rendre votre copie avant la fin de la première heure, pour passer aux exercices suivants pour lesquels vous avez droit aux documents.

1. Soit θ une constante et L la solution de $dL_t = L_t \theta dW_t, L_0 = 1$.
   (a) Calculer $E(L_T \ln L_T | \mathcal{F}_t)$ par les deux méthodes suivantes
      i. En utilisant le théorème de Girsanov
      ii. En calculant la dynamique du processus $(Y_t = L_t \ln L_t, t \ge 0)$
   (b) Soit α une constante. Calculer $E(L_T^\alpha | \mathcal{F}_t)$.

2. Soit X solution de
$$dX_t = \frac{a^2}{2} X_t dt + aX_t dW_t,\ X_0 = x$$
   and $Y_t = aX_t \int_0^t \frac{dB_s}{X_s}$ où B est un MB indépendant de W.
   (a) Quelle est la dynamique de Y?
   (b) Montrer que
$$dY_t = \frac{a^2}{2} Y_t dt + a\sqrt{1 + Y_t^2}\, d\beta_t$$
   où β est un MB.
   (c) Montrer qu'il existe f telle que que $Y_t = af(a\beta_t)$

****

3. On rappelle que, si $X_t = W_t + \nu t$, $M_t^X = \sup_{s \le t} X_s$ et $m_t^X = \inf_{s \le t} X_s$, pour $y \ge 0, y \ge x$
$$P(X_t \le x, M_t^X \le y) = \mathcal{N}(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu y} \mathcal{N}(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}})$$
   et pour $y \le 0, y \le x$
$$P(X_t \ge x, m_t^X \ge y) = \mathcal{N}(\frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu y} \mathcal{N}(\frac{-x + 2y + \nu t}{\sqrt{t}})\,.$$
   On note $T_y = \inf\{t \,:\, X_t = y\}$
   (a) Montrer que, pour $y \ge 0$
$$P(T_y < t) = \mathcal{N}(\frac{-y + \nu t}{\sqrt{t}}) + e^{2\nu y} \mathcal{N}(\frac{-y - \nu t}{\sqrt{t}})\,.$$
   (b) Montrer que $P(T_y > T | \mathcal{F}_t) = \Psi(T - t, X_t)$ où l'on explicitera Ψ
   (c) Soit S le processus solution de
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), S_0 = x$$
   et $T_a(S) = \inf\{t \,:\, S_t = a\}$. Calculer $P(T_a(S) > T)$ et $P(T_a > T | \mathcal{F}_t)$ pour $t < T$.

4. Modèle à volatilité stochastique d'Heston: on suppose que sous la probabilité risque neutre Q, le prix de l'actif et la volatilité ont pour dynamique

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sqrt{Y_t}dW_t) \\ dY_t &= (a - bY_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}dB_t \end{aligned}$$

On admet que les coefficients a, b, σ sont choisis de telle sorte que $\forall t,\ Y_t > 0$. Dans un premier temps, on suppose que les Browniens W et B sont indépendants. Le but est de calculer

$$C_t = E_Q(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t)$$

où $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est la filtration engendrée par le couple W, B. On admet que S_T est intégrable.

(a) On pose $X = \ln S$. Quelle est la dynamique de X?

(b) Justifier qu'il existe une fonction $C : [0,T] \times I\!R^+ \times I\!R^+ \to I\!R$ telle que $C_t = C(t, S_t, Y_t)$. Montrer que $e^{-rt}C(t, S_t, Y_t)$ est une martingale.

(c) On admet que C est de classe $C^{1,2,2}$. Ecrire l'EDP que cette fonction vérifie. Préciser les conditions au bord.

(d) Soit $\widetilde{Q}$ définie par $d\widetilde{Q}|_{\mathcal{F}_t} = (e^{-rt}S_t/S_0)\, dQ|_{\mathcal{F}_t}$. Justifier que l'on a défini un changement de probabilité.

(e) Quelles sont les dynamiques de X et de Y sous $\widetilde{Q}$? (on rappelle que $X = \ln S$)

(f) Montrer que

$$C(t, S_t, Y_t) = S_t\widehat{Q}(X_T > k|\mathcal{F}_t) - Ke^{-r(T-t)}Q(X_T > k|\mathcal{F}_t)$$

où l'on définira soigneusement $\widehat{Q}$ et k.

(g) Soit $g(t, X_t, Y_t) = E_Q(1\!\!1_{X_T > k}|\mathcal{F}_t)$. Quelle est l'EDP vérifiée par g? Préciser les conditions au bord.
Soit $f(t, X_t, Y_t) = \widehat{Q}(X_T > k|\mathcal{F}_t)$. Quelle est l'EDP vérifiée par f?Préciser les conditions au bord.

(h) Indiquer les changements à faire dans le cas où B et W sont corréllés.

5. On considère un marché financier où deux actifs sont négociés dont la dynamique est

$$dS_t^i = S_t^i\left(\mu_t^i dt + \sigma_t^i dW_t\right),\ i = 1, 2\,.$$

Pour le moment, il n'y a pas d'actif sans risque.

(a) Montrer que sous une condition (*) portant sur les coefficients, il existe une probabilité équivalente à P telle que S^2/S^1 est une Q-martingale.

(b) Expliquer, éventuellement dans un cas particulier, ce qu'il se passe si (*) n'est pas satisfaite.

(c) Soit $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ une stratégie de valeur

$$V_t^\phi = \phi_t^1 S_t^1 + \phi_t^2 S_t^2\,.$$

(ϕ_t^1 est le nombre de parts d'actif 1, et ϕ^2 le nombre de parts d'actif 2 détenues par l'investisseur) qui vérifie la condition d'autofinancement

$$dV_t^\phi = \phi_t^1 dS_t^1 + \phi_t^2 dS_t^2$$

Montrer que le processus $(V_t^\phi/S_t^1, t \geq 0)$ est une Q-martingale.

(d) Montrer que tout actif contingent $H \in \mathcal{F}_T$ peut être dupliqué. On ne cherchera pas à expliciter le portefeuille de couverture.

(e) En déduire qu'il existe une stratégie autofinancante telle que

$$V_T^\phi = 1\,.$$

(f) En déduire qu'il existe un zéro-coupon. Quel est son prix? Comment pourrait-on déterminer sa dynamique?