EXERCICES DE PROBABILITES
M2IF Evry

Monique Jeanblanc
Université d'EVRY

July 4, 2007

Les solutions doivent être retournées à Evry avant le 4 septembre, par courrier postal au nom Monique Jeanblanc-Etienne Chevalier. Vous pouvez aussi envoyer un fichier pdf à l'adresse
monique.jeanblanc@univ-evry.fr

Si vous ne rendez pas ces exercices, votre inscription ne sera pas validée.

Les outils qui seront présentés dans le cours de calcul stochastique seront utilisés dans tous les cours de Finance. Il est donc indispensable que vous ayez une maitrise des outils probabilistes de base. Ces devoirs de vacances constituent donc un test. Il est important que vous sachiez les résoudre. Si ce n'est pas le cas, mettez vos connaissances à jour, en particulier en lisant le chapitre 1 du cours disponible sur
http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc/cours/M2_cours.pdf
et en résolvant les exercices correspondant à ce chapitre, que vous trouverez (énoncés et corigés) sur
http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc/cours/M2-exo.pdf
Le chapitre 1 du polycopié ne sera pas repris en cours, il constitue les prérequis en probabilités.

Certains exercices sont en anglais, il m'a paru superflu de les traduire. N'oubliez pas que non-positive (resp. non-increasing) signifie négatif (resp. décroissant).

Les solutions de ce devoir qui seront rédigées avec un traitement de texte type Tex, Latex seront appréciées. Vous aurez obligatoirement durant l'année scolaire à vous familiariser avec de tels traitements de texte, prenez de l'avance! Ne pas utiliser Word, cela constituerait une perte de temps.

1. Un exercice sur les lois exponentielles et de Poisson

   (a) Let X and Y be two independent exponential random variables. Prove that
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y \in A | X > Y) &= \mathbb{P}(X \in A) \\ \mathbb{P}(X - Y \in A | X < Y) &= \mathbb{P}(-Y \in A) \end{aligned}$$

   (b) If X has a Poisson law with parameter $\theta > 0$, prove that
   (i) for any $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[s^X] = e^{\theta(s-1)}$.
   (ii) $\mathbb{E}[X] = \theta$, $\mathrm{var}\,(X) = \theta$.
   (iii) for any $u \in \mathbb{R}$, $E(e^{iuX}) = \exp(\theta(e^{iu} - 1))$
   (iv) for any $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \exp(\theta(e^{\alpha} - 1))$

   (c) Let X_n be the sum of n independent exponential r.v's of parameter λ. Compute the law of X_n and $\mathbb{E}(e^{-\mu X_n}))$

   (d) Let X be a random variable with a Poisson law with parameter θ and $(U_i)_{i \geq 1}$ a sequence of i.i.d. Bernoulli random variables, with parameter p, and independent of X. Prove that $X_1 = \sum_{k=1}^{X} U_k$ and $X_2 = X - X_1$ are independent random variables, with a Poisson law of parameters $p\theta$ and $(1-p)\theta$.

   (e) Let T_i be a family of independent exponential random variables with parameter λ and, for any $t > 0$
   $$N_t = \inf\{n \geq 1 \, : \, \sum_{i=1}^{n} T_i > t\}$$
   Prove that N_t has a Poisson distribution.

(f) Let τ be an exponential random variable with parameter λ. Show that $\mathbb{1}_{\tau\leq t} - \lambda(t\wedge\tau)$ is a martingale

2. Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
   (a) Montrer que $(S_n - nE(X_1), n \geq 1)$ est une martingale
   (b) Calculer la fonction caractéristique de S_n.
   (c) Soit N une v.a. de loi de Poisson, indépendante des X_i.
      i. Calculer $E(S_N)$.
      ii. Calculer la fonction caractéristique de S_N.
   (d) On suppose que les X_i sont de loi de Bernoulli $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
      i. Quelle est la loi de S_n?
      ii. Soit $\tau = \inf\{n\,:\, S_n = 0\}$. Quelle est la loi de τ?

3. Lois gaussiennes. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   (a) Montrer que $E(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta+\sigma^2\theta^2/2} E(f(X + \theta\sigma^2))$ pour f continue bornée.
   (b) Montrer que, si f est "régulière" $E(f(X)(X - m)) = \sigma^2 E(f'(X))$.
   (c) Montrer que $E(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)$. En déduire les moments de e^X, les moments de X et $E(Xe^{\lambda X})$. On admettra que si Y est une v.a. telle que $E(e^{\lambda Y}) = \exp(\lambda a + \frac{1}{2}\lambda^2 b^2)$ pour tout λ, Y est une v.a. gaussienne. Quelles seront l'espérance et la variance de Y? Donner une justification de ce résultat.
   (d) Soit $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. Calculer, dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$ la valeur de $E(\mathbb{1}_{X\leq b}\exp(\lambda X))$ en fonction de $(\mathcal{N}, \lambda, b)$.
   (e) Soit b un nombre réel. On note $(x)^+$ la partie positive de x, soit $x^+ = \sup(x, 0)$. Calculer, en terme de fonction de répartition de la loi gaussienne la quantité $C(a) = E((ae^X - b)^+)$. Calculer la dérivée de $C(a)$.
   (f) Calculer $E(\exp\{\lambda X^2 + \mu X\})$ pour $1 - 2\lambda\sigma^2 \geq 0$.

4. Ces exercices sont destinés à l'étude de quelques martingales.
   Let X be a stochastic process. We denote by $\mathbf{F}^X$ its natural filtration. The process is said to have independent increments if, for any pair (s, t) of positive numbers $X_{t+s} - X_t$ is independent of $\mathcal{F}_t^X$. Prove the following results
   (a) If $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, then the process $X_t - \mathbb{E}(X_t)$ is a martingale.
   (b) For any u, the process $Z_t(u) := \frac{e^{iuX_t}}{\mathbb{E}(e^{iuX_t})}$ is a martingale.
   (c) If $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) < \infty$, the process $\frac{e^{\lambda X_t}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})}$ is a martingale

   The process is said to have stationary increments if, for any pair (s, t) of positive numbers $X_{t+s} - X_t$ has the same law as X_s. Prove that, for any $n \geq 1$, $E(e^{itX_1}) = \varphi^n(t)$ where φ is a characteristic function(depending on n).

5. Cet exercice est destiné à vous familiariser avec des calculs d'espérance en utilisant les propriétés d'indépendance. On rappelle que
   (1) si (X, Y) sont indépendantes, $E(f(X, Y)) = E(\Phi(X))$ avec $\Phi(x) = E(f(x, Y))$ (sous réserve que $f(X, Y)$ soit intégrable)
   (2) si (X, Y) sont indépendantes, $E(f(X, Y)|Y) = \Psi(Y)$ avec $\Psi(y) = E(f(X, y))$ (sous réserve que $f(X, Y)$ soit intégrable)
   (a) Vérifier que les résultat ci dessus sont vrais si X et Y sont indépendantes et f un produit de deux fonctions. Comment démontrer le résultat en toute généralité?
   (b) Soient N et N' deux v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendantes.
      i. Montrer, en utilisant (1), que $E(\exp\frac{a^2}{2}N^2) = E(\exp aNN')$.

ii. Soit A une variable aléatoire $\mathcal{F}$ mesurable et Θ une variable aléatoire à valeurs positives, indépendante de $\mathcal{F}$. Calculer $\mathbb{P}(A < \Theta|\mathcal{F})$

6. Cet exercice va être utilisé dans les cours de mesures de risque.
   Soit X une v.a. de fonction de répartition F strictement croissante continue. On se donne $\alpha \in [0,1]$. Le quantile au niveau α est la quantité $q(\alpha)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq q(\alpha)) = \alpha$.

   (a) Justifier l'existence de $q(\alpha)$. Faire un dessin de la densit pour représenter ce quantile graphiquement. Que se passe t-il si F n'est pas strictement croissante?

   (b) Calculer le quantile d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$ en fonction de m, σ et l'inverse de la fonction de répartition

   (c) Montrer que $\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q(u)du = E(X|X > q(\alpha))$

7. Cet exercice est destiné à vous familiariser avec les copules.
   Soit F la fonction de répartition du n-uple de v.a. $X = (X_1, \cdots, X_n)$ et F_i la fonction de répartition de X_i (on dira que F_i est la i-ième marginales de F). La copule du n-uple de v.a. $(X_1, \cdots, X_n)$ (on dira aussi la copule de F) est la fonction C définie sur $[0,1]^n$ par

$$F(x_1, \cdots, x_n) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n))$$

   (a) Soit $n = 1$. Quel est la copule de X_1.

   (b) Montrer que $C(1, \cdots, 1, u_i, 1, , 1) = u_i$

   (c) Montrer que C est croissante par rapport à chacun de ses arguments

   (d) On suppose que les X_i sont indépendantes. Quel est la copule de X.

   (e) Montrer que pour tout $a, b \in [0,1]^n$ avec $a \leq b$ (i.e., $a_i \leq b_i$, $\forall i$)

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_n} C(u_{1,i_1}, \ldots, u_{n,i_n}) \geq 0\,,$$

   où $u_{j,1} = a_j$, $u_{j,2} = b_j$.

   (f) Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré de covariance ρ. Quel est la copule de X

   (g) Soit F la fonction de répartition sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} - e^{-x_2})^{-1}$$

   Quelles sont les marginales de F? Quel est la copule de F?

   (h) Soit C la copule de (X_1, X_2) et h_i deux fonctions strictement croissantes. Déterminer la copule de $(h_1(X_1), h_2(X_2))$.

8. Soit λ une fonction déterministe à valeurs positives et Θ une v.a. positive. On note $\tau = \inf\{t : \int_0^t \lambda(s)ds \geq \Theta\}$

   (a) Calculer la loi de τ si Θ a une loi exponentielle, et si Θ a une loi uniforme. Dans la suite Θ a une loi exponentielle de paramètre 1.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(\tau \leq T|\tau < t)$, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau \leq T}|\tau)$ et $\mathbb{P}(\tau \leq T|\tau > t)$

   (c) Montrer que $\mathbb{1}_{\tau \leq t} - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda(s)ds$ est une martingale

   (d) Soient $\tau_i = \inf\{t : \int_0^t \lambda(s)ds \geq \Theta_i\}$

      i. Calculer la loi du couple τ_1, τ_2 dans le cas où les Θ_i sont indépendantes.

      ii. Calculer la loi du couple τ_1, τ_2 si la loi jointe des Θ_i est donnée par $G(\theta_1, \theta_2) = P(\Theta_1 > \theta_1, \Theta_2 > \theta_2)$

      iii. Calculer $P(\tau_1 > \theta_1|\theta_2)$ si la loi jointe des Θ_i est donnée par $G(\theta_1, \theta_2) = P(\Theta_1 > \theta_1, \Theta_2 > \theta_2)$

   (e) Soient $\tau_i = \inf\{t : \int_0^t \lambda_i(s)ds \geq \Theta\}$. On suppose $\lambda_1 > \lambda_2$. Calculer la loi du couple τ_1, τ_2.

(f) On suppose que λ est un processus $\mathbf{F}$ adapté et que Θ est indépendant de $\mathcal{F}_\infty$. Calculer, en utilisant un des exercices ci-dessus la loi de τ et $P(\tau < T|\mathcal{F}_t)$

(g) Let q_i be a non-increasing function taking values in $[0,1]$. The random times $\tau_i, i = 1, \cdots, n)$ are defined as the first time that $q_i(t)$ reaches a uniformly distributed threshold U_i on $[0; 1]$, i.e. $\tau_i = \inf\{t : q_i(t) < U_i\}$. Prove that $q_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i > t)$.
Let $Y_1, \cdots, Y_n$ and Y be independent random variables and $X_i = \rho_i Y + \sqrt{1-\rho_i^2} Y_i$. The default thresholds are defined by $U_i = 1 - F_i(X_i)$ where F_i is the cumulative distribution function of X_i. Prove that

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t|Y) = F^{Y_i}\left(\frac{F_i^{-1}(1-q_i(t)) - \rho_i Y}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)$$

Consider the particular case where

$$X_i = \rho_i Y + \sqrt{1-\rho_i^2} Y_i,$$

where Y, $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, are independent, standard Gaussian variables under the probability measure $\mathbb{P}$. Prove that

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t_i, \forall i \leq n) = \int \prod_i \mathcal{N}\left(\frac{\mathcal{N}^{-1}(F_i(t_i)) - \rho_i y}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) f(y) dy\,.$$

where f is the density of Y.

9. **Martingales**

Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable (telle que M_t^2 soit d'espérance finie, pour tout t). Montrer que

(a) $E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2$ pour $t > s$.

(b) $E((M_t - M_s)^2) = E(M_t^2) - E(M_s^2)$ pour $t > s$.

(c) La fonction Φ définie par $\Phi(t) = E(M_t^2)$ est croissante.

10. **Espérance conditionelle**. Soit $A \notin \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{F}$ et X une v.a. intégrable. On note $\mathcal{H}$ la tribu engendrée par $\mathcal{G}$ et A. On admettra que les v.a. Z qui sont $\mathcal{H}$-mesurables s'écrivent $Z = Y_1 \mathbb{1}_A + Y_2 \mathbb{1}_{A^c}$, où les v.a. Y_i sont $\mathcal{G}$-mesurables. Montrer que

$$E(X|\mathcal{H}) = \frac{E(X\mathbb{1}_A|\mathcal{G})}{E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})} \mathbb{1}_A + \frac{E(X\mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{G})}{E(\mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{G})} \mathbb{1}_{A^c}$$

11. **Changement de probabilité** Ce thème sera central en vue d'application à la finance. On donne ici quelques définitions et propriétés (admises) dans un cas simple et on propose des exercices.

Deux probabilités P et Q définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes si elles ont mêmes ensembles négligeables, c'est à dire si

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0.$$

On admet le résultat: Si P et Q sont équivalentes, il existe une variable Y, strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance 1 sous P appelée densité de Radon-Nikodym telle que $dQ = Y dP$ ou encore $Q(A) = \int_A Y dP$. On écrit également cette relation sous la forme $\dfrac{dQ}{dP} = Y$. Réciproquement, si Y est une v.a. strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance 1 sous P, la relation $E_Q(Z) = E_P(ZY)$ définit une probabilité Q équivalente à P. Elle est facile à mémoriser par la règle de calcul formel suivante:

$$E_Q(Z) = \int Z dQ = \int Z \frac{dQ}{dP} dP = \int ZY dP = E_P(ZY)$$

On a aussi $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{1}{Y}$.

Si Y est seulement positive, on a $P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$ et on dit que Q est absolument continue par rapport à P.

(a) Montrer que si P est une probabilité et Z une v.a., telle que l'égalité $dQ = ZdP$ (soit $Q(A) = E_P(Z\mathbb{1}_A)$) définit une probabilité, alors $E_P(Z) = 1$ et $P(Z < 0) = 0$.

(b) Soit U une variable de Bernoulli sous P définie par

$$P(U = 0) = 1 - p, \quad P(U = 1) = p.$$

Soit Y la variable définie par $Y = \lambda U + \mu(1 - U)$. Dans quels cas cette variable est elle d'espérance 1? Soit $dQ = Y dP$, Calculer $Q(U = 1)$. Quelle est la loi de U sous Q?

(c) Soit X est une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sous P et soit $Y = \exp\{h(X - m) - \frac{1}{2}h^2\sigma^2\}$. Soit $dQ = Y dP$. Calculer $E_Q\{\exp(\lambda X)\}) = E_P\{Y \exp(\lambda X)\}$. En déduire la loi de X sous Q.

(d) Soit X est un vecteur gaussien sous P et U une variable telle que le vecteur (X, U) soit gaussien. On pose $dQ = Y dP$ avec $Y = \exp(U - E_P(U) - \dfrac{1}{2}\text{Var}_P U)$. Montrer que X est gaussien sous Q, de même covariance que sous P.

(e) Soit P une probabilité et Q une probabilité équivalente à P définie par $dQ = LdP$. Montrer que l'on peut exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable sous Q en fonction de l'espérance conditionnelle sous P :

$$E_Q(X \,|\mathcal{G}) = \frac{E_P(LX \,|\mathcal{G})}{E_P(L \,|\mathcal{G})}.$$

12. Soit X et Y deux va, f et g deux fonctions (bornées) On note $\psi(x, s) = \mathbb{1}_{f(x)>s}$ et $\varphi(y, t) = \mathbb{1}_{g(y)>t}$. Montrer que si f est croissante, $x \to \psi(s, x)$ est croissante. Montrer que

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \text{Cov}(\psi(X, s), \varphi(X, t)) ds dt$$

Montrer que $\text{Cov}(\psi(X, s), \varphi(X, t)) \geq 0$. On dit qu'un vecteur X est associé si

$$\text{Cov(f(X), g(X))} \geq 0$$

pour tout couple de fonctions croissante en chaque composante.

13. **Espérance conditionnelle.** L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,)$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire

a. $\mathcal{G}$-mesurable

b. telle que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,)Y] = \mathbb{E}(XY)$ pour toute variable Y, $\mathcal{G}$-mesurable bornée.

Démontrer les propriétés suivantes:

(a) Linéarité. Soit a et b deux constantes. $\mathbb{E}(aX + bY \,|\mathcal{G}\,) = a\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,) + b\mathbb{E}(Y \,|\mathcal{G}\,)$.

(b) Croissance. Soit X et Y deux v. a. telles que $X \leq Y$. Alors $\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,) \leq \mathbb{E}(Y \,|\mathcal{G}\,)$.

(c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,)] = \mathbb{E}(X)$.

(d) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,) = X$.

(e) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(XY \,|\mathcal{G}\,) = Y\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,)$.

(f) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,) = \mathbb{E}(X)$.

(g) Si $\mathcal{G}$ est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de Ω), $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

(h) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}(X \,|\mathcal{H}\,) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\mathcal{H}) \,|\mathcal{G}\,) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\mathcal{G}\,) \,|\mathcal{H}\,)$.

(i) Si (X, Y) sont indépendantes, et ϕ une fonction borélienne bornée, $\mathbb{E}(\phi(X, Y)|Y) = [\mathbb{E}(\phi(X, y))]_{y=Y}$.