Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 8, n.° 3, 1992

Sur l'existence des analyses multi-résolutions en théorie des ondelettes

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

Résumé. On montre qu'une base d'ondelettes $(\psi_{j,k})$ de $L^2(\mathbb{R})$ avec une fonction mère ψ höldérienne à support compact provient nécessairement d'une analyse multi-résolution. La fonction-père φ a alors la même régularité que la fonction ψ et peut être choisie à support compact.

Introduction.

Une base d'ondelettes est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ engendrée par translations et dilatations dyadiques à partir d'une seule fonction ψ

(1) $$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\,, \qquad j,k \in \mathbb{Z}\,.$$

La fonction ψ est appelée la fonction mère de la base $(\psi_{j,k})$. On définit alors l'espace W_j comme le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par les $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et l'espace V_j comme $V_j = \oplus_{p<j} W_p$. Les espaces V_j vérifient alors

(2.1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,

(2.2) $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$, (2.3) $f(x) \in V_0$ si et seulement si $f(x-1) \in V_0$.

Lorsqu'une suite d'espaces $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ fermés dans $L^2(\mathbb{R})$ vérifie (2.1) à (2.3) et que de plus

(2.4) V_0 a une base orthonormée de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$,

cette suite est appelée une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$. A toute analyse multi-résolution on peut associer une base d'ondelettes $(\psi_{j,k})$ telle que V_j soit le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les $\psi_{p,k}$, $p < j$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction φ est appelée fonction-père de la base d'ondelettes.

La notion de fonction-père et d'analyse multi-résolution permet de construire à partir de $(\psi_{j,k})$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$ associée aux dilatations dyadiques [6] et a permis l'introduction par S. Mallat de la transformation en ondelettes rapide [7]. Enfin, elle a permis à I. Daubechies de construire des bases d'ondelettes régulières à support compact [1].

Le but de cet article est alors de démontrer que toute base d'ondelettes höldériennes à support compact provient d'une analyse multi-résolution sous-jacente, de sorte que l'approche de S. Mallat et I. Daubechies permet bien de construire toutes les bases concernées.

NOTATIONS.

$$\langle f,g\rangle = \int f(x)\bar{g}(x)\,dx\,,$$

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}\,dx\,,$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E\,, \\ 0 & \text{si } x \notin E\,. \end{cases}$$

1. Les trois transformations en ondelettes.

La *transformation en ondelettes continue* a été introduite par A. Grosmann et J. Morlet au début des années 80, *cf.* [2]. Une *ondelette* est une fonction g à valeurs réelles, de carré intégrable, non identiquement nulle et telle que

(3) $$C_g = \int_0^\infty |\hat{g}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} < +\infty\,.$$

La transformation en ondelettes est alors définie pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$f \to W_f(a,b) = \langle f, g_{(a,b)} \rangle \tag{4.1}$$

où

$$g_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, g\Big(\frac{x-b}{a}\Big) \qquad (a > 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

On a alors la formule de reconstruction

$$f = \frac{1}{C_g} \iint_{a>0, b\in\mathbb{R}} \langle f, g_{(a,b)} \rangle g_{(a,b)} \frac{da}{a^2} db \tag{4.2}$$

et la formule de Plancherel

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_g} \iint_{a>0, b\in\mathbb{R}} |\langle f, g_{(a,b)} \rangle|^2 \frac{da}{a^2} db\,. \tag{4.3}$$

L'un des intérêts principaux de cette transformation est son "invariance" par dilatation-translation. Un autre intérêt majeur est que, à a fixé, la transformation $f \to W_f(a,b)$ s'apparente à une convolution (avec la fonction $g(-x/a)/\sqrt{a}$). Enfin la transformation en ondelettes continues transforme le signal $f(x)$ en l'information redondante $W_f(a,b)$, la corrélation entre les coefficients $W_f(a,b)$ s'exprimant à l'aide d'un noyau-reproduisant.

La *transformation en ondelettes orthogonales* a été introduite par Y. Meyer en 1985, [6]. Il s'agit de donner une version discrète de la transformation de Grosmann et Morlet où la redondance soit complètement éliminée. Une *base d'ondelettes* est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $(\psi_{j,k})$, $j,k \in \mathbb{Z}$ où

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\,, \qquad j,\ k \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

avec ψ une fonction de carré intégrable à valeurs réelles. La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \to \langle f, \psi_{j,k} \rangle\,, \qquad j,\ k \in \mathbb{Z} \tag{6.1}$$

avec la formule de reconstruction

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \tag{6.2}$$

et la formule de Plancherel

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 . \tag{6.3}$$

Cette fois-ci, l'information donnée par les $\psi_{j,k}$ n'est plus redondante; le prix à payer est que cette transformation n'est plus invariante par translation.

Proposition 1. *Si $(\psi_{j,k})$ est une base d'ondelettes, alors ψ est une ondelette.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de vérifier que $\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi/\xi < \infty$. Pour cela, on note Q_j le projecteur

$$Q_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} . \tag{7}$$

Alors

$$\widehat{Q_j f}(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} [\int f(x)\psi(2^j x - k)dx] e^{-ik\xi/2^j}\right) \hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j})$$

et, par la formule sommatoire de Poisson,

$$\widehat{Q_j f}(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi 2^j)\overline{\hat{\psi}}(\frac{\xi}{2^j} + 2k\pi)\right) \hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j}) .$$

Si $\hat{f}$ est portée par $[0, 2\pi]$, alors

$$\chi_{[0,2\pi]}(\xi) \sum_{j\geq 0} \widehat{Q_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \sum_{j\geq 0} |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 .$$

Comme $\| \sum_{j\geq 0} Q_j f\|_2 \leq \|f\|_2$, on en conclut que sur $[0, 2\pi]$, $\sum_{j\geq 0} |\hat{\psi}(\xi/2^j)|^2 \leq 1$, d'où

$$\int_0^{2\pi} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} = \int_\pi^{2\pi} \sum_{j\geq 0} |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 \frac{d\xi}{\xi} \leq \log 2$$

et donc $C_\psi < +\infty$. (En fait, les équations de Y. Meyer dans [6] montrent que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 = 1$$

et donc que $C_\psi = \log 2$). La Proposition 1 est donc démontrée.

On note W_j le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les $\psi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, de sorte que Q_j est le projecteur orthogonal de L^2 sur W_j. On note $V_j = \oplus_{p<j} W_p$ et P_j le projecteur orthogonal sur V_j .

Lemme 1. *V_0 est invariant par translation entière.*

En effet, $V_0^\perp = \oplus_{j\geq 0} W_j$ et chacun des espaces W_j est invariant par translation entière (puisque, si $j \geq 0$, $\psi_{j,k}(x+1) = \psi_{j,k-2^j}(x)$).

Proposition 2.

(i) *Soit $(\psi_{j,k})_j, k \in \mathbb{Z}$ une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. On définit la transformation en ondelettes pseudo-continue par*

$$f \to \langle f, \psi_{[j,k]} \rangle \tag{8.1}$$

où

$$\psi_{[j,k]}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j(x-k)), \qquad j \leq -1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Alors on a l'inégalité

$$\sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j |\langle f, \psi_{[j,k]}\rangle|^2 \leq \|P_0 f\|_2^2 . \tag{8.2}$$

(ii) *On suppose de plus que ψ est höldérienne d'exposant ε pour un $\varepsilon > 0$ et que le module*

$$\omega(x) = \sup_{|h|\leq 1} \frac{|\psi(x+h) - \psi(x)|}{|h|^\varepsilon}$$

vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $x^k\omega(x) \in L^2$; alors on a la formule de reconstruction

$$P_0 f = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \langle f, \psi_{[j,k]}\rangle \psi_{[j,k]} \tag{8.3}$$

et la formule de Plancherel

$$\|P_0 f\|_2^2 = \sum_{j\leq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \|\langle f, \psi_{[j,k]}\rangle\|_2^2 \,. \tag{8.4}$$

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques commentaires sur cette troisième transformation en ondelettes. Cette transformation est "invariante" par translation entière: $\langle f(x+1), \psi_{[j,k]}\rangle = \langle f, \psi_{[j,k+1]}\rangle$. Elle n'est en fait définie que sur V_0, puisque sur $V_0^\perp$ elle est identiquement nulle (comme $\psi_{j,0} \in V_0$ pour $j \leq -1$, on voit que $\psi_{[j,k]} = \psi_{j,0}(x-k) \in V_0$). Lorsqu'on est dans le cadre d'une analyse multi-résolution (c'est-à-dire que V_0 a une base orthonormée de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$), alors à j fixé $\langle f, \psi_{[j,k]}\rangle$ se calcule par un filtrage numérique à partir des coefficients $\langle f, \varphi(x-k)\rangle$ (le filtre ayant pour réponse impulsionnelle $(\langle \varphi, \psi_{[j,k]}\rangle)_{k\in\mathbb{Z}}$). Lorsque $f \in V_0$, la transformation de f en ondelettes orthogonales correspond à un sous-échantillonnage de la transformation pseudo-continue pour décorréler l'information redondante fournie par cette dernière. La transformation pseudo-continue est donc l'analogue de la transformation continue lorsqu'on restreint l'analyse aux fonctions de V_0.

DÉMONSTRATION. On note τ_p la translation $\tau_p f(x) = f(x-p)$. Il est clair que

$$\|\tau_{-p}(\sum_{j=-N}^{-1} Q_j)\tau_p f\|_2 \ \leq\ \|P_0 f\|_2$$

et donc que

$$\left\|\frac{1}{2^N}\sum_{p=1}^{2^N} \tau_{-p}(\sum_{j=-N}^{-1} Q_j)\tau_p f\right\|_2 \ \leq\ \|P_0 f\|_2 \,,$$

or on a

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{2^N} \tau_{-p} Q_j \tau_p f &= \sum_{p=1}^{2^N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \tau_p f, \psi_{j,k}\rangle\, \tau_{-p}(\psi_{j,k}) \\ &= \sum_{p=1}^{2^N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{[j,2^{-j}k-p]}\rangle\, \psi_{[j,2^{-j}k-p]} \\ &= 2^{N+j}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{[j,\ell]}\rangle\, \psi_{[j,\ell]}\end{aligned}$$

si $-N \leq j \leq -1$. On obtient alors

$$\|\sum_{-N}^{-1} 2^j \sum_k \langle f, \psi_{[j,k]}\rangle \, \psi_{[j,k]}\|_2 \ \leq \ \|P_0 f\|_2$$

et, par produit scalaire avec $P_0 f$

$$\sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j |\langle f, \psi_{[j,k]}\rangle|^2 \ \leq \ \|P_0 f\|_2^2 \, .$$

On a donc prouvé le point i).

Supposons maintenant que ψ soit höldérienne avec un module d'höldérianité ω à décroissante rapide. Pour vérifier que l'on a bien

$$\|P_0 f\|_2^2 = \sum_{j\leq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j |\langle f, \psi_{[j,k]}\rangle|^2 \, ,$$

il suffit de le vérifier sur un sous-espace dense de L^2. On va donc montrer le résultat pour $f \in \mathcal{S}$ (classe de Schwartz) et $\hat{f}$ nulle au voisinage de 0.

Remarquons d'abord que, puisque ψ est höldérienne et de carré intégrable, alors ψ est bornée (et tend vers 0 à l'infini). En effet supposons que ψ ne tende pas vers 0 en $+\infty$; alors il existe $\alpha > 0$ et (x_n) telle que $x_n \to +\infty$ et $|\psi(x_n)| \geq \alpha$; par ailleurs $|\psi(x_n + h) - \psi(x_n)| \leq C|h|^\varepsilon$; d'où $|\psi(x)| \geq \alpha/2$ si $|x - x_n| \leq \gamma = (\alpha/2C)^{1/\varepsilon}$ et

$$\int |\psi|^2 dx \geq \frac{\alpha}{2} |\bigcup_n [x_n - \gamma, x_n + \gamma]| = +\infty \, .$$

D'où $\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0$. De plus, $x^k \psi \in L^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} &\|\chi_{[0,+\infty[}(x) x^k \psi\|_2 \\ &\qquad = \ \|\chi_{[0,+\infty[}(x) x^k \sum_{p=0}^{+\infty} \psi(x+p) - \psi(x+p+1)\|_2 \\ &\qquad \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \|\chi_{[0,+\infty[}(x) x^k \omega(x+p+1)\|_2 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \|\chi_{[0,+\infty[}(x)\left(\frac{x}{x+p+1}\right)^k$$

$$\cdot \frac{1}{(1+p)^2}(x+p+1)^{k+2}\omega(x+p+1)\|_2$$

$$\leq \|x^{k+2}\omega(x)\|_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(1+p)^2},$$

et de même pour $\|\chi_{]-\infty,0]}(x)x^k\psi(x)\|_2$ en écrivant $\psi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \psi(x-p) - \psi(x-p-1)$. On va alors estimer $\|\tau_p Q_j \tau_{-p} f\|_2$ pour $j \leq -1$ et $f \in \mathcal{S}$ avec $\hat{f}$ nulle au voisinage de 0. On a

$$\|\tau_p Q_j \tau_{-p} f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f(x+p), \psi(2^j x - k)\rangle|^2 2^j$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\int f(x+p)(\psi(2^j x - k) - \psi(-2^j p - k))dx|^2 2^j.$$

Or

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \leq |h|^\varepsilon \omega(x) + |h|^\varepsilon(|\psi(x+h)| + |\psi(x)|)$$

(en distinguant $|h| \leq 1$ et $|h| \geq 1$), d'où

$$\|\tau_p Q_j \tau_{-p} f\|_2^2$$

$$\leq 2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \left|\int |f(x+p)| 2^{j\varepsilon}|x+p|^\varepsilon \omega(2^j x - k)dx\right|^2$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \left|\int |f(x+p)| 2^{j\varepsilon}|x+p|^\varepsilon(|\psi(2^j x - k)|\right.$$

$$\left. + |\psi(-2^j p - k)|)dx\right|^2\Big) = 2(I_1 + I_2).$$

Le second terme de la somme se contrôle par Cauchy-Schwarz en

$$I_2 \leq 2\Big(\int |f(x+p)||x+p|^\varepsilon dx\Big) 2^{j(1+2\varepsilon)} \int |f(x+p)||x+p|^\varepsilon$$

$$\cdot \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(2^j x - k)|^2 + |\psi(-2^j p - k)|^2\Big)dx.$$

Or, si $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|\psi(\theta - k)|^2 \leq 2(|\psi(x)|^2 + \omega(x)^2) \qquad \text{si } \; x - \theta \in [k, k+1]$$

et donc

$$|\psi(\theta-k)|^2 \leq 2\int_{k+\theta}^{k+1+\theta} \big(|\psi(x)|^2 + \omega(x)^2\big)\,dx$$

et enfin

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(\theta-k)|^2 \leq 2\,(\|\psi\|_2^2 + \|\omega\|_2^2)$$

et

$$I_2 \leq 8\,(\|\psi\|_2^2 + \|\omega\|_2^2)\,2^{j(1+2\varepsilon)}\||x|^\varepsilon f\|_1^2.$$

I_1 se majore par Cauchy-Schwartz en

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \int |f(x+p)|^2|x+p|^{2\varepsilon}2^{2j\varepsilon}(|2^jx-k|+1)^{-2}\,dx \\
&\qquad \cdot \int (|2^jx-k|+1)^2\omega^2(2^jx-k)\,dx \\
&\leq 2^{2j\varepsilon}\|(1+|x|)\omega\|_2^2 \\
&\qquad \cdot \int |f(x+p)|^2|x+p|^{2\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(|2^jx-k|+1)^2}\,dx \\
&\leq 2\Big(\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}\Big)\|(1+|x|)\omega\|_2^2\ \||x|^\varepsilon f\|_2^2\ 2^{2j\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Au total, pour $j \leq -1$,

$$\|\tau_p Q_j \tau_{-p} f\|_2 \leq 2^{j\varepsilon} C\big(\||x|^\varepsilon f\|_2 + \||x|^\varepsilon f\|_1\big)$$

pour une constante C indépendante de f et de p.

On écrit alors $P_0 f = \tau_p P_0 \tau_{-p} f$ (par invariance de V_0 par translation entière) et donc

$$\begin{aligned}
P_0 f &= \frac{1}{2^N}\sum_{p=1}^{2^N}\tau_p\Big(\sum_{j=-N}^{-1} Q_j\Big)\tau_{-p}f + \frac{1}{2^N}\sum_{p=1}^{2^N}\tau_p\Big(\sum_{j=-\infty}^{-N} Q_j\Big)\tau_{-p}f \\
&= \sum_{j=-N}^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j\langle f,\psi_{[j,k]}\rangle\,\psi_{[j,k]} + R_N
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\|R_N\|_2 &\leq \frac{1}{2^N}\sum_{p=1}^{2^N}\sum_{j=-\infty}^{-N} C\,2^{j\varepsilon}\big(\||x|^\varepsilon f\|_2 + \||x|^\varepsilon f\|_1\big) \\
&\leq C'\,2^{-N\varepsilon}\big(\||x|^\varepsilon f\|_2 + \||x|^\varepsilon f\|_1\big)\,.
\end{aligned}$$

On a bien $\|R_N\|_2 \to 0$ pour $N \to +\infty$. La Proposition 2 est donc démontrée.

2. Existence de fonctions-pères.

Nous allons montrer dans cette section que, sous la seule hypothèse que les zéros de $\hat{\psi}$ sont tous d'ordre fini, la base d'ondelettes $\psi_{j,k}$ admet une fonction-père, c'est-à-dire une fonction $\varphi \in V_0$ telle que les $\varphi(x-k)$ forment une base orthonormée de V_0. Cette hypothèse est vérifiée dès que $\hat{\psi}$ est analytique, en particulier dès que ψ est à décroissance exponentielle ($e^{\varepsilon|x|}\psi \in L^2$ pour un $\varepsilon > 0$).

Théorème 1.

a) *Soit* $(\psi_{j,k})$ *une base d'ondelettes de* $L^2(\mathbb{R})$ *telle que*

i) ψ *est höldérienne d'exposant* ε *pour un* $\varepsilon > 0$ *et le module*

$$\omega(x) = \sup_{|h|\leq 1} \frac{|\psi(x) - \psi(x+h)|}{|h|^\varepsilon}$$

vérifie $\forall k \in \mathbb{N},\ x^k\omega(x) \in L^2$ *,*

ii) *les zéros de* $\hat{\psi}$ *sont tous d'ordre fini.*

Alors il existe $\varphi \in V_0$ *telle que les* $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *forment une base orthonormée de* V_0 *.*

b) φ *a la même régularité que* ψ *si* ψ *est de classe* C^k (*respectivement,* $C^{k+\varepsilon}$ *avec* $\varepsilon \in]0,1[$) *et* $\psi^{(k)}$ *est à décroissance rapide* (*respectivement, le module*

$$\omega_k(x) = \sup_{|h|\leq 1} \frac{|\psi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x+h)|}{|h|^\varepsilon}$$

est à décroissance rapide) (*c'est-à-dire que* $x^p\psi^{(k)} \in L^\infty$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ (*respectivement,* $x^p\omega_k \in L^2$)), *alors* φ *est de classe* C^k (*respectivement,* $C^{k+\varepsilon}$) *et on peut choisir* φ *avec* $\varphi^{(k)}$ *à décroissance rapide* (*respectivement, avec son* k*-ième module à décroissance rapide*).

c) *Si dans le point* b), *on remplace partout dans les hypothèses sur* ψ *la décroissance rapide par la décroissance exponentielle, le même résultat est valable pour* φ *à décroissance exponentielle.*

DÉMONSTRATION DE THÉORÈME 1.

Lemme 2. $\hat{\psi}(\xi) = \sum_{j\geq 0} \hat{\psi}(2^j\xi)\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(\xi+4k\pi)\overline{\hat{\psi}}(2^j(\xi+4k\pi))\big)$.

En effet,

$$\psi(\frac{x}{2}) = P_0\left(\psi(\frac{x}{2})\right) = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \langle \psi(\frac{x}{2}), \psi_{[j,k]}\rangle\, \psi_{[j,k]}$$

et donc, par la formule sommatoire de Poisson

$$\begin{aligned} 2\hat{\psi}(2\xi) &= \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j \int \psi(\frac{x}{2})\psi(2^j(x-k))dx\, e^{-ik\xi}\,\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j}) \\ &= \sum_{j\leq -1}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\hat{\psi}(2\xi+4k\pi)\overline{\hat{\psi}}(2^{-j}(\xi+2k\pi))\Big)\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j}). \end{aligned}$$

Cela se récrit en la formule du Lemme 2 en posant $\xi' = 2\xi$ et $j' = -1-j$.

Le lemme s'applique aussi à $\xi + 4k\pi$ et donne

$$\hat{\psi}(\xi+4k\pi) = \sum_{j\geq 0}\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi))\sum_{p\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}(\xi+4p\pi)\overline{\hat{\psi}}(2^j(\xi+4p\pi))$$

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(\xi+4k\pi)|^2 &= \sum_{j\geq 0}\overline{\hat{\psi}}(\xi+4k\pi)\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi)) \\ &\quad\cdot\sum_{p\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}(\xi+4p\pi)\overline{\hat{\psi}}(2^j(\xi+4p\pi)) \end{aligned}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+4k\pi)|^2 = \sum_{j\geq 0}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}(\xi+4k\pi)\overline{\hat{\psi}}(2^j(\xi+4k\pi))\right|^2. \tag{9.1}$$

La formule de Cauchy-Schwartz donne alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+4k\pi)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+4k\pi)|^2\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi))|^2 \tag{9.2}$$

avec égalité si et seulement si pour tout $j \geq 0$ les vecteurs $(\hat{\psi}(\xi + 4k\pi))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi)))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont liés.

Lemme 3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2$ *ne s'annule qu'en un nombre fini de points modulo* 4π .

En effet, par hypothèse, $x^k\psi \in L^2$ pour tout k. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2$ converge en tout point ξ vers une fonction C^∞ (voir [4] ou [8] pour une démonstration de ce lemme). Cette fonction est 4π-périodique. Or ses zéros sont d'ordre fini: si $\hat{\psi}(\xi) = 0$ et que ξ est un zéro d'ordre p, comme $\hat{\psi}$ est C^∞, on a

$$\hat{\psi}(\xi + \eta) \sim \frac{\hat{\psi}^{(p)}(\xi)}{p!}\,\eta^p$$

quand $\eta \to 0$ et donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + \eta + 4k\pi)|^2 \;\geq\; |\hat{\psi}(\xi + \eta)|^2 \;\geq\; \gamma(\xi)\frac{|\eta|^p}{p!}$$

pour η suffisamment petit et un $\gamma(\xi) > 0$. Les zéros sont donc isolés et donc en nombre fini modulo 4π.

La relation (9.2) donne alors que $\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi))|^2 \geq 1$ en dehors d'un nombre fini de points sur $]0, 4\pi]$. Or on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 4k\pi))|^2 d\xi &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j\geq 0}\int |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j\geq 0} 2\pi 2^{-j} = 1\end{aligned}$$

et donc $\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 4k\pi)|^2 = 1$ presque partout.

Pour presque tout ξ, les vecteurs $(\hat{\psi}(2^j(\xi + 4k\pi)))_{k\in\mathbb{Z}}$ $(j \geq 0)$ sont donc proportionnels au vecteur $(\hat{\psi}(\xi + 4k\pi))_{k\in\mathbb{Z}}$. C'est le point essentiel de la démonstration. Le reste est purement technique.

La fonction $\sum |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2$ peut s'écrire $P(\cos(\xi/2))U(\xi/2)$ où P est un polynôme, positif sur $[-1, 1]$, à coefficients réels et U une fonction C^∞, 2π-périodique strictement positive et paire: si ξ_0 est un zéro de $\sum |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2$, alors il est d'ordre pair et on peut donc factoriser un terme de la forme $|1 - e^{i(\xi-\xi_0)/2}|^{2p}$; par ailleurs si $\xi_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $-\xi_0$ est un autre zéro de $\sum |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2$ de même ordre que ξ_0 (puisque

$|\hat{\psi}(\xi)| = |\hat{\psi}(-\xi)|$, ψ étant à valeurs réelles) ; on peut donc factoriser également $|1-e^{i(\xi+\xi_0)/2}|^{2p}$. En factorisant ainsi tous les zéros on obtient

$$\sum |\hat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2 = |1 - e^{i\xi/2}|^{2p(0)}|1 + e^{i\xi/2}|^{2p(2\pi)}$$

$$\cdot \prod_{\xi_0 \in F} \left|(e^{i\xi/2} - e^{i\xi_0/2})(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi_0/2})\right|^{2p(\xi_0)} U(\frac{\xi}{2})\,.$$

On pose alors

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\psi}(2\xi)\ & \frac{1}{\sqrt{U(\xi)}(1 - e^{i\xi})^{p(0)}(1 + e^{i\xi})^{p(2\pi)}} \\ & \cdot \frac{1}{\prod_{\xi_0 \in F} \left[(e^{i\xi} - e^{i\xi_0/2})(e^{i\xi} - e^{-i\xi_0/2})\right]^{p(\xi_0)}}\,. \end{aligned}$$

$\hat{\varphi}$ est définie presque partout (en dehors d'un nombre fini de points modulo 4π) et

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \frac{|\hat{\psi}(2\xi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\xi + 4k\pi)|^2}\,.$$

Il est alors immédiat que $\sum |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ p.p.. Donc $\varphi \in L^2$ et les $\varphi(x - k)$ sont orthonormées. De plus φ est à valeurs réelles car $\overline{\hat{\varphi}(\xi)} = \hat{\varphi}(-\xi)$. Enfin les $\varphi(x - k)$ engendrent V_0, car presque partout on a

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2^{1+j}\xi) &= \frac{\sum \hat{\psi}(2^j(2\xi + 4k\pi))\overline{\hat{\psi}}(2\xi + 4k\pi)}{\sum |\hat{\psi}(2\xi + 4k\pi)|^2}\, \hat{\psi}(2\xi) \\ &= \left(\sum \hat{\psi}(2^j(2\xi + 4k\pi))\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)\right) \hat{\varphi}(\xi)\,, \qquad \text{pour } j \geq 0 \end{aligned}$$

et donc les $\varphi(x-k)$ engendrent W_j pour $j \leq -1$. Pour conclure, il reste à vérifier que $\varphi \in V_0$.

Lemme 4. *Si $g \in V_0$ est telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x^k g \in L^2$ et, pour un $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\sum |\hat{g}(\xi_0 + 2k\pi)|^2 = 0$ alors*

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{e^{i\xi} - e^{i\xi_0}} \in L^2\,,$$

$\gamma \in V_0$ *et* $\forall k \in \mathbb{N},\ x^k\gamma \in L^2$.

En effet $\sum |\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2$ est C^∞ ; on peut donc factoriser $|e^{i\xi}-e^{i\xi_0}|^2$ de

$$\sum |\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sum |\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2}{|e^{i\xi}-e^{i\xi_0}|^2} d\xi < +\infty ,$$

d'où $\gamma \in L^2$. Maintenant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x-k)e^{-i\xi_0(x-k)} = \sum \hat{g}(\xi_0+2k\pi) = 0 ,$$

on pose alors $\theta(x) = \sum_{k<0} g(x-k)e^{ik\xi_0}$. Alors $\theta(x) = -\sum_{k\geq 0} g(x-k)e^{ik\xi_0}$ et on en conclut que $\forall p \in \mathbb{N},\ x^p\theta \in L^2$. De plus, on a

$$\theta(x-1) = \sum_{k<0} g(x-k-1)e^{ik\xi_0} = e^{-i\xi_0}(g(x)+\theta(x)) ,$$

d'où

$$\hat{\theta}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{e^{i\xi_0}e^{-i\xi}-1} = -e^{i\xi}\,\hat{\gamma}(\xi) .$$

Il suffit donc de montrer que $\theta \in V_0$. Or

$$\theta_N = \sum_{-N\leq k<0} g(x-k)e^{ik\xi_0} \in V_0 ,$$

θ_N converge vers θ dans $\mathcal{D}'$ et

$$\|\theta_N\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{g}(\xi)\frac{e^{iN(\xi-\xi_0)}-1}{e^{i(\xi-\xi_0)}-1}\|_2 \leq 2\,\|\theta\|_2 .$$

On en conclut que θ_N converge vers θ dans L^2-faible et donc que θ appartient à l'adhérence faible de V_0 (convexe fermé de L^2) et donc à V_0 .

On obtient donc que γ définie par $\hat{\gamma} = \sqrt{U(\xi)}\,\hat{\varphi}$ vérifie que $\gamma \in V_0$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ x^k\gamma \in L^2$. Or $\varphi = \sum \alpha_k\gamma(x-k)$, où les α_k sont à décroissance rapide (coefficients de Fourier de la fonction C^∞ $1/\sqrt{U(\xi)}$).

La même démonstration donne le contrôle de la régularité de φ en fonction de celle de ψ, et le contrôle exponentiel de la localisation de φ en fonction de celui de ψ (les fonctions intervenant étant alors analytiques sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

Par ailleurs si $\gamma \in V_0$ alors $\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi(x-k)$ avec $(a_k) \in \ell^2$; γ a alors la même régularité que φ (et donc que ψ), puisque la suite (a_k) est bornée et que la module de continuité de φ est à décroissance rapide. Le théorème est donc démontré.

3. Ondelettes à support compact.

Théorème 2. *Soit $(\psi_{j,k})$ une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ telle que ψ est à support compact et ψ est höldérienne d'exposante pour un $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\varphi \in V_0$ à valeurs réelles telle que φ est à support compact et que les $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de V_0 .*

La fonction φ a la même régularité que ψ (φ est C^k si ψ est C^k, φ est $C^{k+\varepsilon}$ si ψ est $C^{k+\varepsilon}, \ldots$).

Au vu du théorème précédent, il s'agit seulement que V_0 admet une base orthonormée $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec φ à support compact. Or nous savons déjà qu'il admet une base $\theta(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec θ à décroissance rapide. Nous sommes donc dans le cadre d'une analyse multi-résolution (au sens de S. Mallat). Cette analyse multi-résolution contient des éléments à support compact non triviaux ($\psi(x/2) \in V_0$, est à support compact et est non identiquement nulle). Nous ferons alors appel à la propositon suivante

Proposition 3. *Si (V_j) est une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ telle que V_0 a une base $\theta(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, à valeurs réelles et telle que V_0 contienne des fonctions à support compact non nulle, alors*

i) *Il existe une unique fonction $\varphi \in V_0$ à valeurs réelles et à support compact telle que*

- $0 = \inf \operatorname{supp} \varphi$ *et* $\hat{\varphi}(0) = 1$,
- *les $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de V_0 ,*
- *toute fonction $\theta \in V_0$ à support compact s'écrit comme une combinaison linéaire finie des $\varphi(x-k)$;*

ii) *On note $N = \sup \operatorname{supp} \varphi$, $(N \in \mathbb{N}^*)$, alors les restrictions à $[0,1]$ des fonctions $\varphi(x+k)$, $0 \leq k \leq N-1$, sont linéairement indépendantes.*

Le point i) a été démontré dans [4] et le point ii) est démontré de manière très simple dans [5].

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. On considère la fonction φ définie dans la proposition ci-dessus. Alors il existe $h \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que $\langle h, \varphi(x-k)\rangle = \delta_k$. Si $f \in V_0$, on a

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, h(x-k)\rangle\, \varphi(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, P_0(h(x-k))\rangle\, \varphi(x-k)\ .$$

La base duale des $\varphi(x-k)$ est donc donnée par les $P_0(h(x-k)) = (P_0 h)(x-k)$. Or $P_0 h = h - \sum_{j\geq 0} Q_j h$. Si ψ a son support dans $[-M, M]$, $Q_j h$ a son support dans $\left[-2M/2^j, 1+2M/2^j\right]$, et donc $\operatorname{supp} P_0 h \subset [-2M, 2M+1]$. $P_0 h$ vérifie donc que les $P_0 h(x-h)$ forment une base de Riesz de V_0, que $P_0 h$ est à valeurs réelles et à support compact et que toute fonction $\theta \in V_0$ à support compact s'écrit comme une combinaison linéaire finie des $P_0 h(x-k)$ (puisque la base duale des $P_0 h(x-h)$ est la base des $\varphi(x-k)$). Par unicité de la fonction φ, on a $P_0 h = \lambda_0 \varphi(x-k_0)$; comme $\langle P_0 h, \varphi(x-k)\rangle = \delta_{k,0}$, on voit que nécessairement $k_0 = 0$; la famille $\varphi(x-k)$ est donc orthogonale; d'où

$$\|\varphi\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \ |\hat{\varphi}(0)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2k\pi)|^2$$

or $\hat{\varphi}(2k\pi) = 0$ pour $k \neq 0$ (*cf.* [4] par exemple) et donc $\|\varphi\|_2 = 1$. Les $\varphi(x-k)$ forment bien une base orthonormée de V_0 .

4. Contre-exemple et conjecture.

Pour mémoire, je rappelle l'exemple de base d'ondelettes $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ donné dans [3] et qui ne provient pas d'une analyse multi-résolution.

La fonction ψ est donnée par

$$\hat{\psi} = \chi_{[-8\pi/7, -4\pi/7]} + \chi_{[4\pi/7, 6\pi/7]} + \chi_{[24\pi/7, 32\pi/7]}\ .$$

On pose

$$E = [-8\pi/7, -4\pi/7] \cup [4\pi/7, 6\pi/7] \cup [24\pi/7, 32\pi/7]\,.$$

On a les identités

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_E(2^j\xi) = 1 \ \text{ p.p.} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_E(\xi + 2k\pi) = 1\,.$$

Il est alors immédiat que les $\psi_{j,k}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi)\chi_E(2^j\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+\frac{2k\pi}{2^j})\chi_E(2^j\xi+2k\pi)\chi_E(2^j\xi)$$

puisque

$$\chi_E(2^j\xi)\,\chi_E(2^j\xi+2k\pi)=\delta_{k,0}\,\chi_E(2^j\xi)\,,$$

on obtient donc

$$f=\sum_j\sum_k\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}\ ,$$

l'orthogonalité étant évidente, la famille $\psi_{j,k}$ est bien une base d'ondelettes.

Si V_0 avait une base orthonormée $\varphi(x-k)$, on aurait nécessairement $|\hat{\varphi}(\xi)|^2-|\hat{\varphi}(2\,\xi)|^2=|\hat{\psi}(2\,\xi)|^2$, et donc $|\hat{\varphi}(\xi)|^2=\sum_{j\geq 1}|\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$. Ce qui donne

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2=\chi_{[-4\pi/7,4\pi/7]}+\chi_{[6\pi/7,8\pi/7]}+\chi_{[12\pi/7,16\pi/7]}\ .$$

Mais alors on n'a pas $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2=1$ p.p., ce qui contredit l'orthonormalité des $\varphi(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Ce qui bloque est donc que l'on n'a pas dans ce cas

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(2^j(\xi+4k\pi))|^2=1\ \text{ p.p.},$$

ce qui était le point central dans notre démonstration.

Une conjecture naturelle, au vu de ce contre-exemple et de notre démonstration, est qu'il existe $\psi\in\mathcal{S}$ telle que les $(\psi_{j,k})$ soient une base d'ondelettes et telle que cette base ne dérive pas d'une analyse multi-résolution.

Bibliographie.

[1] Daubechies I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1988), 909-996.

[2] Grossmann, A. et Morlet J., Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 723-736.

[3] Lemarié, P.G., Analyse multi-échelles et ondelettes à support compact, in *Les Ondelettes en* 1989, P. G. Lemarié ed. Lecture Notes in Math. **1438** (1990), 26-38.

[4] Lemarié, P.G., Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. *Revista Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 157–182.

[5] Lemarié, P.G. et Malgouyres, G., Support des fonctions de base dans une analyse multi-résolution. *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991), 377 -380.

[6] Lemarié, P.G. et Meyer, Y., Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1-18.

[7] Mallat, S., A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation. *I.E.E.E. Trans. P.A.M.I.* **11** (1989), 674-697.

[8] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

Recibido: 13 de diciembre de 1.991

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset
Departement de Mathématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay, FRANCE