Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 9, N.° 2, 1993

Ondelettes generalisées et fonctions d'échelle à support compact

Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset

Résumé. On montre que lorsqu'une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ de multiplicité d et de facteur de dilatation A (A entier ≥ 2) admet des fonctions d'échelle à support compact alors elle admet également des ondelettes à support compact. Inversement si $(\psi_{\varepsilon,j,k} = A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))$, $1 \leq \varepsilon \leq E$, $j, k \in \mathbb{Z}$, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ avec les fonctions mères ψ_ε continues à support compact alors elle provient d'une analyse multi-résolution de facteur de dilatation A, de multiplicité $d = E/(A-1)$ et de fonctions d'échelle à support compact et de même régularité que les ondelettes ψ_ε. Ces résultats s'étendent aux cas de fonctions à localisation exponentielle et des ondelettes biorthogonales.

Abstract. We show that to any multi-resolution analysis of $L^2(\mathbb{R})$ with multiplicity d, dilation factor A (where A is an integer ≥ 2) and with compactly supported scaling functions we may associate compactly supported wavelets. Conversely, if $(\psi_{\varepsilon,j,k} = A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))$, $1 \leq \varepsilon \leq E$, $j, k \in \mathbb{Z}$, is a Hilbertian basis of $L^2(\mathbb{R})$ with continuous compactly supported mother functions ψ_ε, then it is provided by a multi-resolution analysis with dilation factor A, multiplicity $d = E/(A-1)$ and with compactly supported scaling functions (which have the same regularity as the wavelets ψ_ε). Those results can be extended to the cases of exponentially localized functions and of biorthogonal wavelets.

Introduction.

La théorie des *bases d'ondelettes* remonte à 1985 lorsque Y. Meyer se posa et résolut dans [14] et [16] le problème de construire des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ avec

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \tag{1}$$

où ψ était régulière, localisée et oscillante. La fonction ψ était appelée la *mère* des ondelettes, puisqu'elle engendrait la base $(\psi_{j,k})$ par translations et dilatations dyadiques. Pour étendre la construction de Y. Meyer à $\mathbb{R}^n$, Y. Meyer et l'auteur introduisirent une seconde fonction φ, le *père* des ondelettes, telle que la famille

$$(\varphi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup (\psi_{j,k})_{j\geq 0,\ k\in\mathbb{Z}}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

En 1986, S. Mallat introduisit le concept *d'analyse multi-résolution* dans [15]. Une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$V_j \subset V_{j+1}\ ,\ \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}\ ,\ \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(R)\,, \tag{2.a}$$

$$f(x) \in V_j \ \text{ si et seulement si } \ f(2x) \in V_{j+1}\ , \tag{2.b}$$

$$f(x) \in V_0 \ \text{ si et seulement si } \ f(x-1) \in V_0\ , \tag{2.c}$$

$$V_0 \ \text{ a une base orthonormée de la forme } \varphi(x-k),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.d}$$

La fonction φ est alors appelée (la) *fonction d'échelle* de (V_j). Le lien avec les bases d'ondelettes est le suivant. Si $(\psi_{j,k})$ est une base d'ondelettes, on note W_j l'espace fermé de L^2 engendré par les $\psi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, et $V_j = \oplus_{p\leq j-1} W_p$. Il est clair alors que (V_j) vérifie (2.a), (2.b) et (2.c); dire que (V_j) vérifie (2.d) revient à dire qu'il existe une fonction père associée à $(\psi_{j,k})$. Inversement si (V_j) est une analyse multi-résolution de fonction d'échelle φ, on note W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. On montre alors que W_0 a une base orthonormée de la forme $\psi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$; la fonction ψ est alors la mère d'une base d'ondelettes dont φ est le père.

L'inclusion $V_0 \subset V_1$ donne une *équation à deux échelles* sur φ

(3.a) $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(2x-k)$ avec $a_k = \langle \varphi, 2\varphi(2x-k)\rangle$

ou encore, en notant $\hat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$ la transformée de Fourier de φ,

(3.b) $\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ avec $m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$.

On obtient alors, si $\hat{\varphi}$ est continue,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0)\prod_1^\infty m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

La fonction ψ se déduit de la fonction φ qui se déduit elle-même de la fonction m_0. Cette réduction a permis à I. Daubechies de construire en 1987 dans [3] des bases d'ondelettes régulières à support compact.

Toute base d'ondelettes ne provient pas d'une analyse multi-résolution, comme le montrent des contre-exemples (voir par exemple [10]; l'idée de ces contre-exemples est due à Jean-Lin Journé). Cependant si la mère ψ est Höldérienne à support compact (ou à localisation exponentielle), l'auteur a démontré récemment qu'il existait alors une fonction-père φ elle-même à support compact (ou à localisation exponentielle) *cf.* [12] et [13].

La notion d'analyse multi-résolution se généralise de plusieurs manières. Le premier exemple que nous étudierons est le passage à la dimension n. Une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que:

(4.a) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$,

(4.b) $f(x)\in V_j$ si et seulement si $f(2x)\in V_{j+1}$,

(4.c) $f(x)\in V_0$ si et seulement si $f(x-k)\in V_0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}^n$,

(4.d) V_0 a une base orthonormée de la forme $\varphi(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}^n$.

On définit de même W_j comme le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. W_0 a alors une base orthonormée de la forme

$$\psi_\varepsilon(x-k), \qquad 1\le\varepsilon\le 2^n-1;\ k\in\mathbb{Z}^n.$$

Le problème de la construction des ψ_ε est assez compliqué quand les V_j ne proviennent pas d'une analyse multi-résolution $(V_j^{(1)})$ de $L^2(\mathbb{R})$ par tensorisation $(V_j = V_j^{(1)}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}V_j^{(1)})$. En 1987, K. H. Gröchenig a montré le résultat fondamental suivant, *cf.* [7], [17]: si φ est à décroissance rapide ($\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$) on peut choisir de même les ψ_ε. Ce théorème se démontre assez simplement et une analyse un peu plus détaillée de sa démonstration permet de conclure que si φ est à localisation exponentielle on peut choisir de même les ψ_ε et que si V_0 a une base de Riesz de la forme $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, avec g à support compact il en va de même pour W_0 (avec $2^n - 1$ fonctions g_ε). Ce dernier résultat, redémontré par Micchelli et ses collaborateurs dans [9] en utilisant un théorème de géométrie algébrique, ne semble pas avoir été mis en lumière comme corollaire simple du théorème de Gröchenig ; nous consacrerons donc une annexe au théorème de Gröchenig et à ses corollaires.

Un problème qui reste ouvert et que la démonstration du théorème de Gröchenig ne permet pas de résoudre est le suivant: si φ est à support compact, peut-on choisir les ψ_ε à support compact? L'orthonormalisation de la base de Riesz $g_\varepsilon(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1$, détruit la compacité des supports des g_ε et ne donne comme information qu'une localisation exponentielle des ψ_ε.

Une autre généralisation est de changer le facteur de dilatation 2 dans (2b) par un facteur entier $A \geq 2$. Le cas $A = 3$ est brièvement discuté dans le dernier chapitre du livre d'I. Daubechies [4] qui explique les motivations d'une telle généralisation en traitement du signal. On peut aussi changer le nombre de fonctions d'échelle, *cf.* [6] et [8]: cela permet par exemple de généraliser les analyses multi-résolutions de fonctions splines à des fonctions polynômiales par morceaux plus générales ; les splines affines correspondent à une interpolation lagrangienne (avec l'interpolante $\Delta(x) = (1-|x|)^+$) tandis que les polynômes par morceaux de degré 3 et de classe C^1 permettent une interpolation hermitienne (avec les interpolantes $\alpha(x) = (1+2|x|)(1-|x|)^2\chi_{[-1,1]}$ et $\beta(x) = x(1-|x|)^2\chi_{[-1,1]}$).

Une *analyse multi-résolution généralisée* de $L^2(\mathbb{R})$ de facteur de dilatation A (A entier ≥ 2) et de multiplicité d (d entier ≥ 1) est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\text{(5.a)} \qquad V_j \subset V_{j+1}\,,\ \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}\,,\ \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R})\,,$$

$$\text{(5.b)} \qquad f(x) \in V_j \text{ si et seulement si } f(Ax) \in V_{j+1}\,,$$

(5.c) $f(x) \in V_0$ si et seulement si $f(x-1) \in V_0$,

(5.d) V_0 a une base orthonormée de la forme $\varphi_\ell(x-k)$, $1 \leq \ell \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont appelées les fonctions d'échelle de (V_j). On note encore W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. W_0 a une base orthonormée de la forme

$$\psi_\varepsilon(x-k), \qquad 1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d;\ k \in \mathbb{Z}.$$

On peut facilement adapter le théorème de Gröchenig pour montrer que si V_0 admet des fonctions d'échelle φ_ℓ à décroissance rapide W_0 admet des ondelettes ψ_ε à décroissance rapide; de même si V_0 admet des fonctions d'échelle φ_ℓ à localisation exponentielle (ou une base de Riesz $g_\ell(x-k)$, $1 \leq \ell \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$, avec g_ℓ à support compact) W_0 admet des ondelettes ψ_ε à localisation exponentielle (ou une base de Riesz $\gamma_\varepsilon(x-k)$, $1 \leq \varepsilon \leq (A-1)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec γ_ε à support compact). Nous renvoyons encore une fois à l'annexe sur le théorème de Gröchenig pour de plus amples développements.

Une fois encore, le théorème de Gröchenig ne permet pas de conclure que si V_0 admet des fonctions d'échelles φ_ℓ à support compact on peut choisir les ondelettes ψ_ε elles-mêmes à support compact. Le but de cet article est de démontrer ce résultat (par une méthode totalement différente de celle de Gröchenig). Cette méthode permettra de montrer également qu'inversement toute base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x-k)\,; 1 \leq \varepsilon \leq E\,,\ j,k \in \mathbb{Z} \text{ (avec } A \text{ entier } \geq 2)$$

où les ψ_ε sont continues à support compact provient d'une analyse multi-résolution généralisée de facteur de dilatation A et de multiplicité $d = E/(A-1)$ (de sorte que E doit être divisible par $A-1$) et de fonctions d'échelle à support compact ; de plus les fonctions d'échelle et les ondelettes ont la même régularité. Ce résultat s'étend à la localisation exponentielle.

Une dernière généralisation est l'analyse multi-résolution bi-orthogonale de A. Cohen, I. Daubechies et J. C. Feauveau, *cf.* [2] et [5]. Une analyse multi-résolution bi-orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ est la donnée de deux analyses multi-résolutions (V_j), (V_j^*) (vérifiant (2.a) à (2.d)) telles qu'elles admettent des fonctions d'échelle φ, φ^* Höldériennes et en dualité

$$\langle \varphi(x), \varphi^*(x-k)\rangle = \delta_{k,0}\ . \tag{6}$$

On définit alors W_j comme $W_j = V_{j+1} \cap (V_j^*)^\perp$ et de même $W_j^* = V_{j+1}^* \cap V_j^\perp$. Le projecteur oblique P_j de L^2 sur V_j parallèlement à $(V_j^*)^\perp$ a pour noyau

$$p_j(x,y) = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x - k)\,\bar{\varphi}^*(2^j y - k) \tag{7}$$

et vérifie $P_j \circ P_{j+1} = P_{j+1} \circ P_j = P_j$; l'opérateur $Q_j = P_{j+1} - P_j$ est donc un projecteur, c'est le projecteur sur W_j parallèlement à $(W_j^*)^\perp$; de plus W_0 admet une base de Riesz $\psi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et W_0^*, $\psi^*(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, telles que $\langle \psi, \psi^*(x-k)\rangle = \delta_{k,0}$ et

$$Q_j f = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi^*(2^j x - k)\rangle\, \psi(2^j x - k)\,.$$

Si φ et φ^* sont à localisation exponentielle (respectivement à support compact), on peut choisir ψ et ψ^* à localisation exponentielle (respectivement, à support compact). Enfin les familles $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$ et $2^{j/2}\psi^*(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$ forment un système de bases inconditionnelles de $L^2(\mathbb{R})$ qui sont bi-orthogonales

$$2^{(j+j')/2} \langle \psi(2^j x - k), \psi^*(2^{j'} x - k')\rangle = \delta_{j,j'}\ \delta_{k,k'}\ .$$

Nous montrerons qu'inversement si ψ et ψ^* sont Höldériennes, engendrent par translation-dilatations dyadiques des bases bi-orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ et sont à localisation exponentielle, alors elles proviennent d'une analyse multi-résolution bi-orthogonale avec des fonctions d'échelle duales φ, φ^* à localisation exponentielle. Lorsque ψ et ψ^* sont à support compact, φ et φ^* peuvent de même être choisies à support compact.

Le plan de l'article est alors le suivant:

1. Enoncé des résultats : ondelettes et fonctions d'échelles à support compact.
2. Projecteurs $\mathbb{Z}$-invariants, indices et bases hilbertiennes.
3. Le cas de la localisation exponentielle.
4. Ondelettes bi-orthogonales à localisation exponentielle.
5. Ondelettes bi-orthogonales à support compact.
6. Annexe: le Théorème de Gröchenig, ses corollaires et ses variantes.

NOTATIONS.

- On note L^2_{comp} l'espace des fonctions de L^2 à support compact. Si $\omega \in L^2{}_{\text{comp}}$ on note $\delta(\omega)$ le diamètre du support de ω, $\delta(\omega) = \sup\{|x-y| : x, y \in \operatorname{supp}\omega\}$.
- Pour $\alpha \geq 0$, on note C^α l'espace des fonctions de classe C^α: si α est entier, $f \in C^\alpha$ si f est α fois continûment dérivable et si ses dérivées sont bornées; si $\alpha = N + \rho$, N entier, $0 < \rho < 1$, $f \in C^\alpha$ si $f \in C^N$ et si
$$|||f^{(N)}|||_\rho < +\infty\,, \quad \text{où} \quad |||g|||_\rho = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\rho}$$
(module de continuité Höldérienne d'exposant ρ).
- De même on notera E_α l'espace des fonctions régulières (de classe α) à localisation exponentielle (ainsi que leurs dérivées): la définition précise de E_α est donnée au début de la Section 3.
- La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f est définie par
$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\,.$$

1. Enoncé des résultats: Ondelettes et fonctions d'échelle à support compact.

Le but de cet article est de montrer le théorème suivant

Théorème 1. *Soit A un entier ≥ 2. Alors*

i) *Si $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse multi-résolution de facteur de dilatation A et de multiplicité d à fonctions d'échelle φ_ℓ $(1 \leq \ell \leq d)$ à support compact alors le complémentaire orthogonal W_0 de V_0 dans V_1 admet une base orthonormée de la forme*
$$(\psi_\varepsilon(x-k))_{1\leq\varepsilon\leq(A-1)d;\ k\in\mathbb{Z}}$$
où les ψ_ε sont à support compact. En particulier les fonctions
$$A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d\,;\ j, k \in \mathbb{Z}\,,$$
forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

On a de plus

$$\delta(\psi_\varepsilon) \le \max_{1\le \ell\le d} \delta(\varphi_\ell) \qquad \textit{pour } \ 1 \le \varepsilon \le (A-1)d$$

et si les φ_ℓ sont de classe C^α pour un réel $\alpha \ge 0$ alors ψ_ε est également de classe C^α.

ii) *Inversement, si*

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1\le\varepsilon\le E;\ k\in\mathbb{Z}}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ avec les ψ_ε à support compact et continues, les $\psi_\varepsilon(x-k)$, $1\le\varepsilon\le E$, $k\in\mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne d'un espace W_0 associé à une analyse multi-résolution (V_j) de facteur de dilatation A, de multiplicité $d = E/(A-1)$ (en particulier E est un multiple de $A-1$) et de fonctions d'échelle φ_ℓ $(1\le\ell\le d)$ à support compact et continues. De plus, on a

$$\delta(\varphi_\ell) \le \max_{1\le\varepsilon\le E} \delta(\psi_\varepsilon)$$

et si les ψ_ε sont de classe C^α alors les φ_ℓ sont de classe C^α.

La démonstration repose sur l'analyse des projecteurs orthogonaux Q_0 sur W_0 pour le point i) et P_0 sur V_0 pour le point ii). Ces projecteurs admettent des noyaux

$$q_0(x,y) = -\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_\ell(x-k)\,\bar\varphi_\ell(y-k) + A\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_\ell(Ax-k)\,\bar\varphi(Ay-k)$$

et

$$p_0(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{\varepsilon=1}^{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}} A^j\,\psi_\varepsilon(A^j x-k)\,\bar\psi_\varepsilon(A^j y-k)$$

qui vérifient la propriété fondamentale suivante:

$$q_0(x,y) = 0\,, \qquad \text{si } |x-y| \ge \max_\ell \delta(\varphi_\ell)$$

et

$$p_0(x,y) = 0 \qquad \text{si } |x-y| \ge \max_\varepsilon \delta(\psi_\varepsilon)\,.$$

C'est évident pour q_0 ; pour p_0 , il faut remarquer que $P_0 = \sum_{j=-\infty}^{-1} Q_j$ (en définissant $V_0 = \oplus_{j\leq -1} W_j$, W_j comme le sous-espace engendré par $A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k)$, $(1 \leq \varepsilon \leq E,\ k \in \mathbb{Z})$, et Q_j le projecteur orthogonal sur W_j) mais que également $P_0 = I - \sum_{j=0}^{+\infty} Q_j$; or pour $j \geq 0$, $q_j(x,y)$ est nul pour $|x-y| \geq (1/A^j)\max_\varepsilon \delta(\psi_\varepsilon)$ et donc pour $|x-y| \geq \max_\varepsilon \delta(\psi_\varepsilon)$. Par ailleurs W_0 est invariant par translations entières dans le cas i) (puisque $W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$ et que V_1 et V_0 sont invariants par translations entières) et V_0 est invariant par translations entières dans le cas ii) puisque $V_0^\perp = \oplus_{j\geq 0} W_j$ et que pour $j \geq 0$, W_j est invariant par translation entière.

On est donc amené à étudier les espaces invariants par translation entière dont le noyau du projecteur s'annule loin de la diagonale.

Théorème 2. *Soit $V \subset L^2(\mathbb{R})$ un sous-espace fermé et P son projecteur orthogonal (de noyau-distribution $p(x,y)$). On suppose que*

j) *$f(x) \in V$ si et seulement si $f(x-1) \in V$,*

jj) *$p(x,y) = 0$ si $|x-y| \geq M$.*

On suppose de plus l'hypothèse suivante

jjj) *Pour tout $a < b$, l'espace $V_{a,b} = \{\omega \in V : \operatorname{supp}\omega \subset [a,b]\}$ est de dimension finie.*

Alors (si $V \neq \{0\}$) ,

k) *Il existe $\omega \in V$ avec ω à support compact, $\delta(\omega) \leq M$, les $\omega(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ orthornomées.*

kk) *V admet une base orthonormée de la forme*

$$\omega_i(x-k)\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,;\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

avec ω_i à support compact et $\delta(\omega_i) \leq M$.

Le nombre N ne dépend que de V et pas du choix des fonctions de base ω_i . Il sera appelé l'indice de V sur $\mathbb{Z}$ et sera noté $N = \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} V$.

Le Théorème 2 sera démontré dans la section suivante ainsi que la proposition ci-dessous qui donne un critère pour que la condition jjj) soit vérifiée.

Proposition 1. *Soit V un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions j) et jj) du Théorème 2. Alors V satisfait également la condition* iii) *si le noyau $p(x,y)$ est une fonction continue.*

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du Théorème 1.

• pour le point i): W_0 vérifie de manière évidente la condition jjj) puisque $W_{0,a,b}$ est contenu dans l'espace engendré par les $\varphi_\ell(Ax-k)$ ($1 \leq \ell \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$) tels que $\operatorname{supp} \varphi_\ell(Ax-k) \cap [a,b] \neq \emptyset$; ces fonctions sont en nombre fini et donc $W_{0,a,b}$ est de dimension finie. Le Théorème 2 nous indique donc que W_0 admet une base orthonormée à support compact

$$\psi_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} W_0 \ ; \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Par ailleurs $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} V_1 = \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} V_0 + \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} W_0$ puisque $V_1 = V_0 \oplus W_0$ (la somme étant orthogonale); $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} V_0 = d$ par hypothèse et $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} V_1 = Ad$ (en prenant comme base les $\sqrt{A}\,\varphi_\ell(A(x-k)-r)$, $0 \leq r \leq A-1$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \ell \leq d$) et donc $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} W_0 = (A-1)d$. Enfin tout élément à support compact de V_1 se décompose comme une combinaison linéaire finie des $\varphi_\ell(Ax-k)$ et a donc la même régularité que les fonctions φ_ℓ.

• pour le point ii): on vérifie que V_0 satisfait jjj) en montrant que p_0 vérifie la condition décrite dans la Proposition 1. En effet on a

$$p_0(x,y) = \sum_{j \leq -1} \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A^j\, \psi_\varepsilon(A^j x - k)\, \bar{\psi}_\varepsilon(A^j y - k)\,.$$

Or on vérifie facilement que $\psi_\varepsilon(X-k)\bar{\psi}_\varepsilon(Y-k)$ est nul pour X, Y fixés sauf pour un nombre fini d'indices (ε, k) et que ce nombre se majore indépendamment de X et Y par le nombre $M_0 = E(1+\max_\varepsilon \delta(\psi_\varepsilon))$. Si les ψ_ε sont de classe C^α, $\alpha = N+\rho$, alors: pour $0 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} p_0\right| &\leq \sum_{j \leq -1} A^{j(1+n)} M_0 \sup_\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_\infty \, \|\psi_\varepsilon^{(N)}\|_\infty \\ &= \frac{1}{A^{n+1}-1}\, M_0 \sup_\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_\infty \, \|\psi_\varepsilon^{(N)}\|_\infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^N}{\partial x^N} p_0(x,y) - \frac{\partial^N}{\partial x^N} p_0(x+h,y)\right| \\ &\qquad\qquad \leq \sum_{j \leq -1} A^{j(1+N+\rho)}\, |h|^\rho\, M_0 \sup_\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_\infty \, |||\psi_\varepsilon^{(N)}|||_\rho\end{aligned}$$

$$= \Big(\frac{1}{A^{1+\alpha}-1}\, M_0 \sup_\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_\infty \, |||\psi_\varepsilon^{(N)}|||_\rho\Big) |h|^\rho.$$

En particulier si les ψ_ε sont continues alors p_0 est continue. Grâce à la Proposition 1 et au Théorème 2, on en déduit que V_0 admet une base orthonormée à support compact $\varphi_\ell(x-k)$, $1 \leq \ell \leq \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} V_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme on a à nouveau $\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} V_1 = \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} V_0 + \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} W_0$, on a $\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}} V_0 = E/(A-1)$, ce qui implique que E est divisible par $A-1$. Enfin la régularité des fonctions φ_ℓ provient de ce que

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi_\ell = \frac{d^n}{dx^n}\Big(\int p_0(x,y)\varphi_\ell(y)\,dy\Big) = \int \frac{\partial^n}{\partial x^n} p_0(x,y)\varphi_\ell(y)\,dy$$

de sorte que φ_ℓ est bien de classe C^α.

Le Théorème 1 est donc démontré (modulo la Proposition 1 et le Théorème 2).

2. Projecteurs $\mathbb{Z}$-invariants, indices et bases hilbertiennes.

Dans cette section nous démontrons le Théorème 2 et la Proposition 1.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. Soit $(f_n)_{1\leq n\leq N}$ une famille orthonormée de $V_{[a,b]}$. Alors si $\theta \in L^2$, $\sum_n |\langle\theta, f_n\rangle|^2$ est la norme du projeté de θ sur $\mathrm{Vect}_n(f_n) \subset V$ et donc

$$\sum_n |\langle\theta, f_n\rangle|^2 \leq \|P\theta\|^2 = \langle P\theta, \theta\rangle = \iint p(x,y)\theta(y)\bar{\theta}(x)\,dx dy\,.$$

On prend $\theta_\varepsilon = \theta\left((x-x_0)/\varepsilon\right)/\varepsilon$ et on fait tendre ε vers 0. Les f_n sont continues puisque

$$f_n(x) = \int_a^b p(x,y) f_n(y)\,dy\,.$$

On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{N} |f_n(x_0)|^2 \leq p(x_0, x_0) \tag{8.a}$$

et

$$N = \int_a^b \sum |f_n(x_0)|^2 dx_0 \leq \int_a^b p(x_0, x_0)\, dx_0 \; . \tag{8.b}$$

Comme $p(x,y)$ est continue, $\int_a^b p(x_0, x_0)\, dx_0 < +\infty$ et donc $\dim V_{[a,b]} < +\infty$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. On va commencer par démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\omega_\varepsilon \in V$ satisfaisant ω_ε à support compact, $\delta(\omega_\varepsilon) \leq M + \varepsilon$, les $\omega_\varepsilon(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ orthonormées et $\operatorname{supp} \omega_\varepsilon \subset [0, M+1]$. En effet, si $V \neq \{0\}$ il existe au moins une fonction $\Omega \in V$ à support compact non nulle (car d'après jj) les éléments de V à support compact sont denses dans V). On peut supposer que $\alpha = \inf \operatorname{supp} \Omega \in [0,1[$ quitte à translater Ω par un entier. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ avec $\alpha + \varepsilon \leq 1$. On définit

$$H_\varepsilon = \Big\{ f \in V : \ \operatorname{supp} f \subset [\alpha, +\infty[\, , \ \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} |f|^2\, dx = 1 \Big\}$$

et

$$K_\varepsilon = \{ f \in H_\varepsilon : \ \operatorname{supp} f \subset [\alpha, \alpha + 2M + \varepsilon] \} \, .$$

H_ε est non vide puisque à une constante multiplicative près $\Omega \in H_\varepsilon$. On pose alors $\theta = \inf_{g \in H_\varepsilon} \|g\|_2$; on va montrer que cet infimum est atteint en une fonction ω_0 et que la fonction $\omega_\varepsilon = \omega_0 / \|\omega_0\|_2$ convient.

Pour cela, on décompose $g \in H_\varepsilon$ en

$$g = P(g\, \chi_{[\alpha, \alpha+M+\varepsilon]}) + P(g\, \chi_{[\alpha+M+\varepsilon, +\infty[}) = g_1 + g_2 \; .$$

La fonction g_2 est à support dans $[\alpha + \varepsilon, +\infty[$, de sorte que $g_1 = g - g_2$ vérifie $g_1 \in H_\varepsilon$, Par ailleurs

$$\operatorname{supp} g_1 \subset [\alpha, +\infty[\cap [\alpha - M, \alpha + 2M + \varepsilon]$$

de sorte que $g_1 \in K_\varepsilon$. Enfin

$$\|g_1\|_2 \leq \|g\, \chi_{[\alpha, \alpha+M+\varepsilon]}\|_2 \leq \|g\|_2$$

et il n'y a égalité entre $\|g_1\|_2$ et $\|g\|_2$ que si $\operatorname{supp} g \subset [\alpha, \alpha + M + \varepsilon]$. On en conclut que $\theta = \inf_{g \in K_\varepsilon} \|g\|_2$. Soit $g_0 \in K_\varepsilon$ fixé; on a

$$\theta = \inf \{ \|g\|_2 : \ g \in K_\varepsilon \, , \|g\|_2 \leq \|g_0\|_2 \} \, .$$

Or l'ensemble $\{g \in K_\varepsilon : \ \|g\|_2 \leq \|g_0\|_2\}$ est compact puisque c'est un fermé borné de $V_{\alpha,\alpha+2M+\varepsilon}$ qui est de dimension finie. L'infimum est donc atteint en une fonction ω_0 ; en particulier

$$\|\omega_0\|_2 \leq \|P(\omega_0 \chi_{[\alpha,\alpha+M+\varepsilon]})\|_2$$

et donc $\operatorname{supp}\omega_0 \subset [\alpha, \alpha+M+\varepsilon]$ et $\delta(\omega_0) \leq M+\varepsilon$. Par ailleurs si $k \geq 1$, $\omega_0(x-k)$ est à support dans $[\alpha+1, +\infty[$ et donc $\omega_0 + \lambda\omega_0(x-k) \in H_\varepsilon$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$; on obtient donc $\|\omega_0\|_2 \leq \|\omega_0 + \lambda\,\omega_0(x-k)\|_2$, ce qui entraîne $\langle \omega_0, \omega_0(x-k)\rangle = 0$ pour $k \geq 1$ et donc pour $k \neq 0$ puisque $\langle \omega_0\,, \omega_0(x+k)\rangle = \langle \omega_0(x-k)\,, \omega_0\rangle$. Enfin $\|\omega_0\|_2 \neq 0$ puisque $\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} |\omega_0|^2 dx = 1$. La fonction $\omega_\varepsilon = \omega_0\,/\|\omega_0\|_2$ vérifie donc bien les propriétés annoncées.

Or $\|\omega_\varepsilon\|_2 = 1$ et $\omega_\varepsilon \in V_{0,M+1}$ qui est de dimension finie; on peut donc extraire une sous-suite ω_{ε_k} (avec $\varepsilon_k \to 0$) convergente dans $V_{0,M+1}$ vers une fonction ω. Il est clair que ω est dans V, à support dans $[\alpha, \alpha+M]$ (et donc $\delta(\omega) \leq M$) et que

$$\langle \omega, \omega(x-k)\rangle = \lim_{\varepsilon_j \to 0} \langle \omega_{\varepsilon_j}\,, \omega_{\varepsilon_j}(x-k)\rangle = \delta_{k,0}\,.$$

On a donc démontré le premier point du Théorème 2.

L'existence de la base $\omega_i(x-k)$, $1 \leq i \leq N$, $k \in \mathbb{Z}$, se démontre alors facilement par récurrence sur $\dim V_{0,M+1}$. En effet, une fois trouvée la fonction ω décrite par le premier point du théorème, on note W l'espace engendré par les $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et $V' = V \cap W^\perp$. Alors V' vérifie les mêmes conditions que V : le projecteur P' de L^2 sur V' s'écrit $P'f = \int p'(x,y)f(y)\,dy$ avec

$$p'(x,y) = p(x,y) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega(x-k)\,\bar{\omega}(y-k)\,,$$

on a bien $f \in V'$ si et seulement si $f(x-1) \in V'$ et $p'(x,y) = 0$ si $|x-y| \geq M$. De plus, on a $\dim V'_{a,b} \leq \dim V_{a,b}$ puisque $V' \subset V$. Enfin $\dim V'_{0,M+1} \leq \dim V_{0,M+1} - 1$ puisque $V'_{0,M+1} \subset V_{0,M+1}$, $\omega \in V_{0,M+1}$, $\omega \perp V'_{0,M+1}$. Si $\dim V_{0,M+1} = 1$, on voit que $V'_{0,M+1} = \{0\}$ mais cela implique que $V' = \{0\}$ (sinon on pourrait trouver d'après le point k) une fonction $\omega' \in V'_{0,M+1}$ avec $\|\omega'\|_2 = 1$) et donc $V = W$. La récurrence est alors immédiate.

Il ne reste plus à vérifier que le fait que l'indice ne dépend pas du choix de la base. Cela est bien connu et assez évident. Par exemple on note Π l'opérateur défini sur $V_{\mathrm{comp}} = \{f \in V : f$ est à support compact$\}$ par $\Pi f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k)$; alors si $\omega_i(x-k)$, $1 \leq i \leq N$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de V avec les ω_i à support compact, les $\Pi\omega_i$, $1 \leq i \leq N$, sont une base orthonormée de $\Pi V_{\mathrm{comp}} \subset L^2([0,1])$; on voit donc que N ne dépend pas du choix des ω_i puisque $N = \dim \Pi V_{\mathrm{comp}}$.

Le Théorème 2 est donc démontré.

3. Le cas de la localisation exponentielle.

Pour décrire la localisation exponentielle, nous introduisons les espaces E_α , $\alpha \geq 0$, comme suit

i) $f \in E_0$ s'il existe $C, D > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq C \ {}^{-D|x|},$$

ii) $f \in E_\rho$, $0 < \rho < 1$, si $f \in E_0$ et s'il existe $C', D' > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in [-1,1], \quad |f(x) - f(x+h)| \leq C' e^{-D'|x|} |h|^\rho ,$$

iii) $f \in E_{N+\rho}$, $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq \rho < 1$, si $f, f', \ldots, f^{(N)} \in E_0$ et si $f^{(N)} \in E_\rho$.

Pour $f \in E_0$, on note $\Pi f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k)$. On a la propriété fondamentale suivante: si la famille $f_i(x-k)$, $1 \leq i \leq$, $k \in \mathbb{Z}$, est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $f_i \in E_0$ alors la famille Πf_i, $1 \leq i \leq L$, est orthonormée dans $L^2([0,1])$: en effet

$$\int_0^1 \Pi f_i \, \overline{\Pi f_j} \; dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i \, \overline{\Pi f_j} \; dx = \sum_k \langle f_i, f_j(x-k) \rangle .$$

Le Théorème 2 et la Proposition 1 se transcrivent alors en

Théorème 2-bis. *Soit $V \subset L^2(\mathbb{R})$ un sous-espace fermé tel que $f(x) \in V$ si et seulement si $f(x-1) \in V$. Alors*

i) *Si $V \cap E_0 \neq \{0\}$, V contient une fonction $\omega \in E_0$ telle que la famille $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit orthonormée.*

ii) *Si $V \neq \{0\}$ et si*

(9.1) $\quad$ *$E_0 \cap V$ est dense dans V*

(9.2) $\Pi(E_0 \cap V)$ *est de dimension finie*

alors V *admet une base orthonormée de la forme*

$$\omega_i(x-k), \qquad 1 \le i \le \dim \Pi(E_0 \cap V)\,;\ k \in \mathbb{Z},$$

avec $\omega_i \in E_0$.

De plus toutes les bases de la forme $\Omega_i(x-k)$, $1 \le i \le L$, $k \in \mathbb{Z}$, *ont le même nombre de fonctions de base* Ω_i : $L = \dim \Pi(E_0 \cap V)$.

iii) *Les conditions* (9.1) *et* (9.2) *sont en particulier vérifiées lorsque le noyau* $p(x,y)$ *du projecteur orthogonal* P *de* L^2 *sur* V *est une fonction continue qui vérifie pour deux constantes* $C, D > 0$

$$|p(x,y)| \le C\, e^{-D|x-y|} \tag{10}$$

La démonstration du Théorème 2-bis est élémentaire et reprend les idées de [11] et [13]. On choisit $\omega_0 \neq 0$, $\omega_0 \in E_0 \cap V$ et on note W le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. On va montrer que W admet une base orthonormée $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\omega \in E_0$. Pour cela, on considère la fonction

$$F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \omega_0(x), \omega_0(x-k)\rangle z^k\,,$$

c'est le développement de Laurent d'une fonction holomorphe au voisinage du cercle-unité $|z| = 1$. De plus, ses zéros sur le cercle-unité sont de multiplicité paire puisque

$$F(e^{-i\xi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\omega}_0(\xi + 2k\pi)|^2 \ge 0$$

d'après la formule sommatoire de Poisson. $F(z)$ se factorise donc en $M(z)^2 G(z)$ où G ne s'annule pas sur $|z| = 1$ et où $M(z)$ est un polynôme dont toutes les racines sont de module 1.

On définit alors $\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\omega}_0(\xi)/M(e^{-i\xi})$. On va montrer que $\gamma \in W \cap E_0$ et que les $\gamma(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de W. Pour cela, on utilise le lemme suivant

Lemme 1. *Si* $h \in W \cap E_0$ *et si* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi_0 + 2k\pi)|^2 = 0$ *alors la fonction* η *définie par*

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{\hat{h}(\xi)}{e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}}$$

est dans $W \cap E_0$.

En effet on montre facilement que si h est à décroissance rapide alors la série $\sum |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2$ converge en tout point vers une fonction C^∞. Si cette fonction s'annule en ξ_0 , alors on peut factoriser $|e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}|^2$ de cette fonction et on trouve un quotient C^∞. Cela montre que $\eta \in L^2$ puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\eta}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{\sum |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2}{|e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}|^2}\, d\xi\,.$$

Par ailleurs, la formule sommatoire de Poisson donne que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi_0} h(x-k) = 0\,.$$

La fonction

$$\tilde{\eta}(x) = \sum_{k\leq -1} e^{i(k+1)\xi_0}\, h(x-k)$$

est alors dans E_0 : la décroissance exponentielle est clairement vérifiée pour $x \to +\infty$; pour $x \to -\infty$, il suffit de remarquer qu'on a également

$$\tilde{\eta}(x) = -\sum_{k\geq 0} e^{i(k+1)\xi_0}\, h(x-k)\,.$$

En particulier $\tilde{\eta} \in L^2$; comme de plus on a clairement

$$\tilde{\eta}(x) = -e^{i\xi_0} h(x) + e^{i\xi_0} \tilde{\eta}(x-1)\,,$$

on voit que $\tilde{\eta} = \eta$ et donc $\eta \in E_0$. De plus

$$-\sum_0^N e^{i(k+1)\xi_0} h(x-k) = \eta_N(x) \longrightarrow \eta$$

dans $\mathcal{D}'$ et

$$\|\eta_N\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{\eta}(1 - e^{-i(N+1)(\xi-\xi_0)})\|_2 \leq 2\, \|\eta\|_2$$

de sorte que $\eta_N \to \eta$ dans L^2-faible et donc $\eta \in W$. Le lemme est donc démontré.

En itérant la construction du lemme $\deg M$ fois, on voit que $\gamma \in E_0 \cap W$. Par ailleurs les $\gamma(x-k)$ engendrent W (puisque ω_0 est combinaison linéaire finie des $\gamma(x-k)$) et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi+2k\pi)|^2 = c_0 e^{i(\deg M)\xi} G(e^{-i\xi})$$

avec $|c_0| = 1$, de sorte que les $\gamma(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de W. La fonction

$$U(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \gamma(x), \gamma(x-k)\rangle z^k$$

est holomorphe au voisinage de $|z| = 1$ et est strictement positive sur $|z| = 1$ (puisque $\sum |\hat{\gamma}(\xi+2k\pi)|^2$ ne s'annule pas), de sorte que $U(z)^{-1/2}$ est définie et holomorphe au voisinage de $|z| = 1$; on a alors $U(z)^{-1/2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ avec α_k à décroissance exponentielle. Il suffit alors de définir ω comme $\hat{\omega} = U(e^{-i\xi})^{-1/2}\hat{\gamma}$, ou encore $\omega = \sum \alpha_k \gamma(x-k)$, pour obtenir une base orthonormée $\omega(x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) de W avec $\omega \in E_0$. Le point i) est donc démontré.

Le point ii) est alors évident et se démontre par récurrence sur $\dim \Pi(E_0 \cap V)$. Il suffit pour cela, si $V \neq \{0\}$, de choisir $\omega \in V \cap E_0$ telle que les $\omega(x-k)$ soient orthonormées, de définir W l'espace engendré par les $\omega(x-k)$ et $V_0 = V \cap W^\perp$. Le projecteur orthogonal Q sur W est donné par $Qf = \sum \langle f, \omega(x-k)\rangle \omega(x-k)$ et on vérifie immédiatement que $Qf \in E_0$ lorsque $f \in E_0$, de sorte que $V_0 \cap E_0$ est dense dans V_0 (puisque $V_0 = (I-Q)V$). De plus on a

$$\Pi(V \cap E_0) = \Pi(W \cap E_0) \oplus \Pi(V_0 \cap E_0)$$

(la somme directe étant orthogonale) de sorte que $\dim \Pi(V_0 \cap E_0) = \dim \Pi(V \cap E_0) - 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à V_0 et exhiber (si $(V_0 \neq \{0\})$ une base orthonormée de V_0 de la forme

$$\omega_i(x-k), \qquad 1 \leq i \leq \dim \Pi(V_0 \cap E_0),\ k \in \mathbb{Z},$$

avec $\omega_i \in E_0 \cap V_0$: il suffit de rajouter les fonctions $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, pour obtenir une base orthonormée de V.

Que toutes les bases orthonormées de V de la forme $\omega_i(x-k)$, $1 \leq i \leq N$, $k \in \mathbb{Z}$, (avec $\omega_i \in E_0$) aient le même nombre de fonctions de base ω_i est immédiat car les $\Pi\omega_i$, $1 \leq i \leq N$, forment alors une base orthonormée de $\Pi(E_0 \cap V)$. Le point ii) du théorème est donc démontré.

Pour démontrer le point iii), on introduit l'opérateur ΠP défini par: si $f \in L^2([0,1])$

$$\Pi P f(x) = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y) f(y)\, dy\,.$$

Si $f \in \Pi(E_0 \cap V)$, il est immédiat que $(\Pi P)f = f$:

$$\begin{aligned}\Pi P(f) = (\Pi P)(\sum F(x-k)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) \sum F(y-k)\, dy \\ &= \sum F(x-k) = f\,.\end{aligned}$$

Or la fonction $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)$ est continue. Si $(f_n)_{1\leq n\leq N}$ est orthonormée dans $\Pi(E_0 \cap V)$, on trouve comme pour la Proposition 1,

$$\sum |f_n(x_0)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x_0-k, x_0)$$

et

$$\dim \pi(E_0 \cap V) \leq \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x_0-k, x_0)\, dx_0\,. \tag{11}$$

Par ailleurs il est évident d'après (10) que $P(E_0) \subset E_0$ et donc que $E_0 \cap V$ est dense dans E_0. Le Théorème 2-bis est donc démontré.

Du Théorème 2-bis on déduit directement

Théorème 1-bis. *Soit A un entier ≥ 2. Alors*

i) *Si $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse multi-résolution de facteur de dilatation A, de multiplicité d et de fonctions d'échelle φ_ℓ ($1 \leq \ell \leq d$) avec $\varphi_\ell \in E_0$ alors le complémentaire orthogonal W_0 de V_0 dans V_1 admet une base orthonormée de la forme*

$$\psi_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d\,;\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

avec $\psi_\varepsilon \in E_0$. *De plus, si les* φ_ℓ *sont de classe* E_α *pour un* $\alpha \geq 0$ *alors les* ψ_ε *sont également de classe* E_α .

ii) *Inversement si*

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1\leq\varepsilon\leq E;\ k\in\mathbb{Z}}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ *avec les* ψ_ε *continues de classe* E_0 , *les*

$$\psi_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq E\,;\ k\in\mathbb{Z})$$

forment une base hilbertienne d'un espace W_0 *d'une analyse multi-résolution* (V_j) *de facteur de dilatation* A, *de multiplicité* $d = E/(A-1)$ *et de fonctions d'échelle* φ_ℓ $(1 \leq \ell \leq d)$ *de classe* E_0 . *De plus si les* ψ_ε *sont de classe* E_α *il en va de même pour les* φ_ℓ .

Le point i) est immédiat puisque, si P_0 désigne le projecteur orthogonal sur V_0 , $P_0(E_0) \subset E_0$ de sorte que $E_0 \cap W_0 = (I - P_0)(E_0 \cap V_1)$ est dense dans W_0 ; par ailleurs $\dim \Pi(E_0 \cap W_0) = (A-1)d$ car on a

$$\Pi(E_0 \cap V_1) = \Pi(E_0 \cap V_0) \oplus \Pi(E_0 \cap W_0)\,.$$

Enfin le fait que les ψ_ε soient de classe. E_α est immédiat: on vérifie immédiatement que $E_0 \cap V_1 \subset E_\alpha$ en décomposant les fonctions de $E_0 \cap V_1$ sur la base $(\sqrt{A}\,\varphi_\ell(Ax-k))_{\ell,k}$.

Pour le point ii), il s'agit d'estimer la taille et la régularité du noyau du projecteur

$$P_0 = \sum_{j\leq -1} Q_j = I - \sum_{j\geq 0} Q_j\,.$$

On commence par remarquer que si $0 < D' < D$ alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-D|X-k|} e^{-D|Y-k|} \leq C(D,D')\, e^{-D'|X-Y|}\,. \tag{12}$$

On obtient donc, lorsque $|x-y| \leq 2$ et $|h| \leq 1$ (et $0 \leq p \leq N$, $\alpha = N+\rho$)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^p p_0}{\partial x^p}(x,y)\right| &\leq C \sum_{j\leq -1} A^{j(1+p)}\, e^{-D'|x-y|A^j} \\ &\leq C \sum_{j\leq -1} A^{j(1+p)} \leq C'\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial^N p_0}{\partial x^N}(x,y) - \frac{\partial^N p_0}{\partial x^N}\right| \leq C \sum_{j\leq -1} A^{j(1+N+\rho)}|h|^\rho e^{-D'|x-y|A^j}$$
$$\leq C'|h|^\rho.$$

Lorsque $|x-y| \geq 2$, on obtient

$$\left|\frac{\partial^p p_0}{\partial x^p}(x,y)\right| \leq C \sum_{j\geq 0} A^{j(1+p)}\, e^{-D' A^j |x-y|}$$
$$\leq C\, e^{-D''|x-y|} \sum_{j\geq 0} A^{j(1+p)}\, e^{-(D'-D'')A^j}$$
$$\leq C'\, e^{-D''|x-y|},$$

$(D'' < D')$, et enfin ($|x-y| \geq 2$, $|h| \leq 1$ et donc $|x+h-y| \geq |x-y|/2$)

$$\left|\frac{\partial^N p_0}{\partial x^N}(x,y) \ - \frac{\partial^N p_0}{\partial x^N}(x+h,y)\right|$$
$$\leq C \sum_{j\geq 0, A^j|h|\leq 1} |h|^\rho A^{j(1+N+\rho)}\, e^{-A^j|x-y|D'}$$
$$+ 2\,C \sum_{A^j|h|>1} A^{j(1+N)}\, e^{-A^j|x-y|D'/2}$$
$$\leq 2\,C \sum_{j\geq 0} |h|^\rho A^{j(1+N+\rho)}\, e^{-A^j|x-y|D'/2}$$
$$\leq 2\,C|h|^\rho e^{-|x-y|D''/2} \sum_{j\geq 0} A^{j(1+N+\rho)}\, e^{-(D'-D'')A^j}$$
$$\leq C'\, |h|^\rho e^{-D''|x-y|/2}.$$

On est alors dans les conditions du Théorème 2-bis. De plus si $f \in E_0$, on obtient immédiatement que $P_0 f \in E_\alpha$ à cause des estimations sur $p_0(x,y)$. Le Théorème 1-bis est donc démontré.

Pour conclure cette section, nous allons traiter le cas où les espaces considérés contiennent un sous-espace dense de fonctions à support compact.

Théorème 2-ter. *Soit $V \subset L^2(\mathbb{R})$ un sous-espace fermé tel que $f(x) \in V$ si et seulement si $f(x-1) \in V$. Alors*

i) *Si* $V \cap L^2_{\text{comp}} \neq \{0\}$, *V contient une fonction* $\omega \in L^2_{\text{comp}}$ *telle que la famille* $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *soit une base de Riesz de l'espace* W *qu'elle engendre. De plus si* $V \cap L^2_{\text{comp}}$ *est dense dans* V, *alors* $V \cap W^\perp \cap L^2_{\text{comp}}$ *est dense dans* $V \cap W^\perp$.

ii) *Si* $V \neq \{0\}$. *si* $V \cap L^2_{\text{comp}}$ *est dense dans* V *et si* $\dim \Pi(L^2_{\text{comp}} \cap V) < +\infty$ *alors* V *admet une base de Riesz de la forme*

$$\omega_i(x-k), \qquad 1 \leq i \leq \dim \Pi(L^2_{\text{comp}} \cap V).$$

De plus on peut choisir les ω_i *tels que* $\langle \omega_i(x), \omega_j(x-k)\rangle = 0$ *si* $i \neq j$ *(quel que soit* $k \in \mathbb{Z}$*).*

La démonstration du Théorème 2-ter suit l'organisation générale de celle du Théorème 2-bis. L'existence de la fonction ω du point i) se fait à nouveau à l'aide du Lemme 1, puisque lorsque $h \in L^2_{\text{comp}}$ et $\sum |\hat{h}(\xi_0 + 2k\pi)|^2 = 0$ alors il est immédiat que $\eta \in L^2_{\text{comp}}$ (où $\hat{\eta} = \hat{h}/(e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0})$). Une fois ω construite, on note Ω la fonction duale de ω

$$\hat{\Omega} = \frac{\hat{\omega}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\omega}(\xi + 2k\pi)|^2}$$

de sorte que le projecteur orthogonal Q sur W est donné par

$$Qf = \sum \langle f, \Omega(x-k)\rangle \omega(x-k)\,;$$

on pose

$$M(\xi) = \sum |\hat{\omega}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_k \langle \omega, \omega(x-k)\rangle e^{-ik\xi}$$

et $\hat{F} = M(\xi)\hat{f}$ si $f \in L^2_{\text{comp}}$ alors $F \in L^2_{\text{comp}}$ et $QF \in L^2_{\text{comp}}$ (car $QF = \sum \langle f, \omega(x-k)\rangle \omega(x-k)$) de sorte que, si $f \in L^2_{\text{comp}} \cap V$, alors $(I-Q)f = g$ vérifie $\hat{g} = \hat{G}/M(\xi)$ avec $G = (I-Q)F \in L^2_{\text{comp}} \cap V \cap W^\perp$; comme $M(\xi)$ ne s'annule pas, g est dans l'adhérence des combinaisons linéaires des $G(x-k)$ et donc, si $L^2_{\text{comp}} \cap V$ est dense dans V, $L^2_{\text{comp}} \cap V \cap W^\perp$ est bien dense dans $V \cap W^\perp$.

Téorème 1-ter. *Soit A un entier* ≥ 2. *Alors si* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *est une analyse multi-résolution de facteur de dilatation A et de multiplicité d et si* V_0 *admet une base de Riesz de la forme*

$$\varphi_\ell(x-k), \qquad 1 \leq \ell \leq d,\ k \in \mathbb{Z},$$

avec φ_ℓ à support compact, alors W_0 (le complémentaire orthogonal de V_0 dans V_1) admet une base de Riesz de la forme

$$\psi_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \le \varepsilon \le (A-1)d\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

avec ψ_ε à support compact.

La réciproque est également vraie (mais présente peu d'intérêt): si W_0 a une base de Riesz de la forme $(\psi_\varepsilon(x-k))_{\varepsilon,k}$ avec les ψ_ε à support compact alors V_0 a une base de Riesz $(\varphi_\ell(x-k))_{\ell,k}$ avec les φ_ℓ à support compact.

Nous terminerons en remarquant que le processus d'orthogonalisation préservant la compacité des supports qui a été utilisé pour démontrer le Théorème 2-ter a d'abord été introduit dans le contexte de la théorie des ondelettes par Micchelli [9], Chui [1] et leurs collaborateurs.

4. Ondelettes bi-orthogonales à localisation exponentielle.

Le cas bi-orthogonal est essentiellement similaire au cas orthogonal dans le cas des fonctions à localisation exponentielle.

Pour comprendre le cas bi-orthogonal, nous nous ramenons une fois encore à l'étude des projecteurs $\mathbb{Z}$-invariants

Proposition 2. a) *Soient V, V^* deux sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que*

i) *$f \in V$ si et seulement si $f(x-1) \in V$,*
$f \in V^*$ si et seulement si $f(x-1) \in V^*$,

ii) *$E_0 \cap V$ est dense dans V, $E_0 \cap V^*$ est dense dans V^*,*

iii) $\dim \Pi(E_0 \cap V) < +\infty$,

iv) *$L^2 = V \oplus (V^*)^\perp$ (somme directe non orthogonale).*

Alors il existe des fonctions φ_ℓ, $1 \le \ell \le \dim \Pi(E_0 \cap V)$, et φ_ℓ^*, $1 \le \ell \le \dim \Pi(E_0 \cap V)$, telles que

j) *$\varphi_\ell \in E_0 \cap V$ et $\varphi_\ell^* \in E_0 \cap V^*$,*

jj) *$(\varphi_\ell(x-k))_{\ell,k}$ est une base de Riesz de V et $(\varphi_\ell^*(x-k))_{\ell,k}$ est une base de Riesz de V^*.*

jjj) $\langle \varphi_\ell(x-k), \varphi_{\ell'}^*(x-k')\rangle = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{k,k'}$

de sorte que le projecteur P de L^2 sur V parallèlement à $(V^*)^\perp$ s'écrit

$$Pf = \sum_{\ell=1}^{\dim \Pi(E_0 \cap V)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_\ell^*(x-k)\rangle\, \varphi_\ell(x-k)\,. \tag{13}$$

b) *Si $P : L^2 \to L^2$ est un opérateur continu tel que*

k) $P \circ P = P$ *(P est un projecteur),*

et tel que $Pf = \int p(x,y) f(y)\,dy$ où, pour des constantes $C, D > 0$ et $\beta \in]0,1]$

kk) $p(x,y) = p(x-1, y-1)$ *($\mathbb{Z}$ invariance),*

kkk) $|p(x,y)| \leq C\, e^{-D|x-y|}$,

kv) *Pour $|h| \leq 1$, $|p(x,y) - p(x+h,y)| \leq C\,|h|^\beta e^{-D|x-y|}$,*

alors les espaces $V = \operatorname{Im} P$ et $V^* = (\operatorname{Ker} P)^\perp$ vérifient les hypothèses (i) *à* (iv).

La preuve de cette proposition est très simple. L'hypothèse iv) est équivalente à ce que le projecteur orthogonal $P_\perp$ de L^2 sur V soit un isomorphisme de V^* sur V: il est évidemment continu et l'hypothèse iv) implique qu'il est bijectif; il est donc bicontinu par le Théorème de Banach. Par ailleurs on sait que V_0 admet une base orthonormée de la forme

$$\varphi_\ell(x-k)\,, \qquad 1 \leq \ell \leq \dim \Pi(E_0 \cap V)\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

avec $\varphi_\ell \in E_0$.

On fixe alors $\omega^* \in V^* \cap E_0$ tel que les $\omega^*(x-k)$ soient orthonormées, et on note W^* l'espace engendré par les $\omega^*(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. On note $\Omega = P_\perp \omega^*$; la famille $(\Omega(x-k))$ est une famille de Riesz, puisque

$$\|\sum a_k\, \Omega(x-k)\|_2 \approx \|\sum a_k \omega^*(x-k)\|_2 = (\sum_k |a_k|^2)^{1/2}.$$

Cela implique que $\sum |\hat{\Omega}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'annule pas; or on a

$$\sum |\hat{\Omega}(\xi+2k\pi)|^2 = \sum_{\ell=1}^{\dim \pi(\varepsilon_0 \cap V)} |\sum_k \hat{\omega}^*(\xi+2k\pi)\, \bar{\hat{\varphi}}_\ell(\xi+2k\pi)|^2\,;$$

on pose

$$\alpha_\ell(\xi) = \sum_k \hat{\omega}^*(\xi+2k\pi)\, \bar{\hat{\varphi}}_\ell(\xi+2k\pi) \qquad \text{et} \qquad \alpha(\xi) = \sum_\ell |\alpha_\ell(\xi)|^2\ ;$$

encore une fois, elles s'écrivent $\alpha_\ell(\xi) = F_\ell(e^{-i\xi})$ et $\alpha(\xi) = F(e^{-i\xi})$ où les fonctions $F_\ell(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes au voisinage de $|z| = 1$ et $F(z)$ est strictement positive sur $|z| = 1$; on peut alors poser

$$\hat{\omega}(\xi) = \sum_\ell \frac{\bar{\alpha}_\ell(\xi)}{\alpha(\xi)} \hat{\varphi}_\ell(\xi)$$

et on a $\omega \in E_0 \cap V$ et $\langle \omega(x), \omega^*(x-k) \rangle = \delta_{0,k}$. La famille $(\omega(x-k))$ est alors une famille de Riesz

$$\left(\sum |\hat{\omega}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_\ell \frac{|\bar{\alpha}_\ell(\xi)|^2}{\alpha(\xi)^2} = \frac{1}{\alpha(\xi)} \right)$$

et engendre un sous-espace W de V.

On pose alors $X = V \cap (W^*)^\perp$ et $X^* = V^* \cap W^\perp$. On a alors

α) $V = W \oplus X$ et $V^* = W^* \oplus X^*$; en effet on note Q le projecteur sur W parallèlement à $(W^*)^\perp$:

$$Qf = \sum_k \langle f, \omega^*(x-k) \rangle \, \omega(x-k)\,;$$

alors si $f \in V$, $Qf \in W$ et $(I-Q)f \in X$; de même si $f \in V^*$, on a $Q^*f \in W^*$ et $(I-Q^*)f \in X^*$.

β) $L^2 = X \oplus (X^*)^\perp$: en effet si $R = (I-Q)P$, on a $R \circ R = R$ car $QP = PQ = Q$ ($PQ = Q$ car $W \subset V$; $QP = Q$ car $Q^* = P^*Q^*$ puisque $W^* \subset V^*$) et R est donc un projecteur; on a $R|_X = I$ et $RL^2 \subset X$ d'où $\operatorname{Im} R = X$; de même $\operatorname{Im} R^* = X^*$ et donc $\operatorname{Ker} R = (X^*)^\perp$.

γ) X et X^* sont évidemment invariants par translation entière puisque V, V^*, W et W^* le sont (et donc aussi $W^\perp$ et $(W^*)^\perp$).

δ) $E_0 \cap X$ est dense dans X car $X = (I-Q)V$ et $(I-Q)E_0 \subset E_0$; de même $E_0 \cap X^*$ est dense dans X^*.

ε) enfin $\dim \Pi(E_0 \cap X) = \dim \Pi(E_0 \cap V) - 1$ car si $\Omega_\ell(x-k)$, $1 \leq \ell \leq \dim \Pi(E_0 \cap X)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de X alors $\Pi\Omega_\ell$, $1 \leq \ell \leq \dim \Pi(E_0 \cap X)$, augmentée de $\Pi\omega$ est une base de $\Pi(E_0 \cap V)$.

En itérant cette construction, on arrive à $X = \{0\}$ et alors $X^* = \{0\}$ de sorte qu'on a exhibé des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$, $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_L^*$ ($L = \dim\Pi(E_0 \cap V)$) qui vérifient j) à jjj). Le point a) est donc démontré.

Le point b) est immédiat. La seule chose à vérifier est que $\dim \Pi(E_0 \cap V)$ est finie. ($E_0 \cap V$ est dense dans V car $V = PL^2$ et $PE_0 \subset E_0$). Mais pour cela il suffit de définir

$$\Pi P f = \int_0^1 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)\Big) f(y)dy$$

et de remarquer que ΠP est compacte sur $L^2([0,1])$ (estimations de taille et de régularité du noyau) et que $\Pi P(\Pi(E_0 \cap V)) = \Pi(E_0 \cap V)$. En effet la fonction $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)$ vérifie les estimations suivantes

$$\text{(14.1)} \qquad \text{Il existe } C > 0 \text{ tel que } \forall x, y, \quad |\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)| \le C$$

$$\text{(14.2)} \qquad \begin{array}{c} \text{Il existe } C > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ tel que } \forall x, y,\ \forall h \in [-1,1] \\ |\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x+h-k,y)| \le C\,|h|^\beta . \end{array}$$

Si g_n est une suite bornée de fonctions de $L^2([0,1])$, les fonctions $\Pi P(g_n)$ sont uniformément bornées et uniformément Höldériennes sur $[0,1]$; le Théorème d'Ascoli permet de conclure que $(\Pi P(g_n))$ admet une sous-suite uniformément convergente sur $[0,1]$, et donc convergente dans $L^2([0,1])$. ΠP est bien compact et donc $\dim \Pi P(E_0 \cap V) < +\infty$.

De la Proposition 2, on déduit alors facilement le théorème

Théorème 3. a) *Soit V_j, V_j^* deux analyses multi-résolutions de $L^2(\mathbb{R})$ de même facteur de dilatation A telles que $E_0 \cap V_0$ soit dense dans V_0, $E_0 \cap V_0^*$ soit dense dans V_0^* et $L^2 = V_0 \oplus (V_0^*)^\perp$. Alors elles ont la même multiplicité d et elles admettent des fonctions φ_ℓ, $1 \le \ell \le d$, et φ_ℓ^*, $1 \le \ell \le d$, telles que*

- $\varphi_\ell \in E_0 \cap V_0$, $\varphi_\ell^* \in E_0 \cap V_0^*$,
- *Les $\varphi_\ell(x-k)$, $1 \le \ell \le d$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de V_0, et les $\varphi_\ell^*(x-k)$, $1 \le \ell \le d$, $k \in \mathbb{Z}$ une base de Riesz de V_0^* ,*
- $\langle \varphi_\ell(x-k), \varphi_{\ell'}^*(x-k') \rangle = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{k,k'}$.

(fonctions d'échelle duales).

On définit $W_0 = V_1 \cap (V_0^*)^\perp$ *et* $W_0^* = V_1^* \cap V_0^\perp$. *Alors*

$$L^2 = W_0 \oplus (W_0^*)^\perp$$

et il existe des bases de Riesz duales de W_0 *et* W_0^* *de la forme*

$$\psi_\varepsilon(x-k), \qquad 1 \le \varepsilon \le (A-1)d;\ k \in \mathbb{Z},$$

et

$$\psi_\varepsilon^*(x-k), \qquad 1 \le \varepsilon \le (A-1)d;\ k \in \mathbb{Z},$$

avec ψ_ε, $\psi_\varepsilon^* \in E_0$.

Si de plus les φ_ℓ *et les* φ_ℓ^* *sont de classe* E_α *pour un* $\alpha > 0$ *alors les familles*

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1 \le \varepsilon \le (A-1)d;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

et

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon^*(A^j x - k))_{1 \le \varepsilon \le (A-1)d\,;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

forment des bases inconditionnelles bi-orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$.

b) *Inversement si les fonctions* ψ_e *et* ψ_ε^* *sont de classe* E_α *et si les familles*

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1 \le \varepsilon \le E;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

et

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon^*(A^j x - k)_{1 \le \varepsilon \le E\,;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

forment des bases inconditionnelles bi-orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ *alors elles proviennent d'analyses multi-résolutions bi-orthogonales de facteur de dilatation* A, *de multiplicité* $d = E/(A-1)$ *et à fonctions d'échelle duales* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$, $\varphi_1^*, \dots, \varphi_d^*$ *de classe* E_α .

Le Théorème 3 a une démonstration exactement analogue à celle des divers théorèmes 1. Dans le sens des fonctions d'échelle aux ondelettes, on se borne à vérifier que $L^2 = W_0 \oplus (W_0^*)^\perp$ (car les projecteurs obliques P_0 sur V_0 parallèlement à $(V_0^*)^\perp$ et P_1 sur V_1 parallèlement à $(V_1^*)^\perp$ vérifient $P_1 P_0 = P_0$ ($V_0 \subset V_1$) et $P_0 P_1 = P_0$ ($V_0^* \subset V_1^*$), de sorte que $Q_0 = P_1 - P_0$ est un projecteur; or $W_0 = \operatorname{Im} Q_0$ et $(W_0^*)^\perp = \operatorname{Ker} Q_0$), que W_0 et W_0^* sont $\mathbb{Z}$-invariants (puisque c'est le cas de V_0, V_0^*, V_1 et V_1^*), que $E_0 \cap W_0$ est dense dans W_0 et $E_0 \cap W_0^*$ dans W_0^* (car $P_0 E_0 \subset E_0$ et $P_1 E_0 \subset E_0$) et enfin que $\dim \Pi(E_0 \cap W_0) \le \dim \Pi(E_0 \cap V_0) < +\infty$; la Proposition 2 permet alors de conclure à l'existence des ψ_ε, ψ_ε^*. Pour la propriété de base inconditionnelle, on remarque que si P_j est le projecteur sur V_j parallèlement à $(V_j^*)^\perp$ alors les P_j sont équicontinus (car $P_j = D_j P_0 D_j^{-1}$ où $D_j f(x) = f(2^j x)$) et donc, par densité de $\cup V_j$, que pour $f \in L^2$ on a $P_j f \to f$ dans L^2 quand $j \to +\infty$; cela force alors P_j à vérifier $P_j 1 = 1$ (condition de Strang et Fix), ou encore les φ_ℓ, φ_ℓ^* à vérifier

$$1 = \sum_{\ell=1}^{d} \left(\int \bar{\varphi}_\ell^* \, dx \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell(x-k) = \sum_{\ell=1}^{d} \left(\int \bar{\varphi}_\ell \, dx \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell^*(x-k)$$

(cela sera démontré dans le Lemme 2 ci-après) et donc les ψ_ε à vérifier $\int \psi_\varepsilon \, dx = \int \psi_\varepsilon \cdot 1 \, dx = 0$ puisque $\langle \psi_\varepsilon, \varphi_\ell^*(x-k) \rangle = 0$, et de même $\int \psi_\varepsilon^* \, dx = 0$. Si maintenant on a de plus $\psi_\varepsilon \in E_\alpha$ alors on a (*cf.* Lemme 3)

$$\Big\| \sum_\varepsilon \sum_j \sum_k A^{j/2} \, \alpha_{j,k,\varepsilon} \, \psi_\varepsilon(A^j x - k) \Big\|_2 \leq C \Big(\sum_{\varepsilon,j,k} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^2 \Big)^{1/2}$$

et de même pour les ψ_ε^* ; enfin on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon,j,k} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^2 \\ &= \langle \sum_{\varepsilon,j,k} A^{j/2} \, \alpha_{j,k,\varepsilon} \, \psi_\varepsilon(A^j x - k), \sum_{\varepsilon,j,k} A^{j/2} \, \alpha_{j,k,\varepsilon} \, \psi_\varepsilon^*(A^j x - k) \rangle \\ &\leq \Big\| \sum_\varepsilon \sum_j \sum_k A^{j/2} \, \alpha_{j,k,\varepsilon} \, \psi_\varepsilon(A^j x - k) \Big\|_2 \, C \big(\sum_{\varepsilon,j,k} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^2 \big)^{1/2} \end{aligned}$$

et donc

$$\Big(\sum_{\varepsilon,j,k} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^2 \Big)^{1/2} \leq C \Big\| \sum_\varepsilon \sum_j \sum_k A^{j/2} \, \alpha_{j,k,\varepsilon} \, \psi_\varepsilon(A^j x - k) \Big\|_2 .$$

La famille $(A^{j/2} \psi_\varepsilon(A^j x - k))_{\varepsilon,j,k}$ est donc de Riesz dans L^2 ; de plus elle est totale (car $\cap V_j^* = \{0\}$; or si $f \in \cap W_j^\perp$, alors $Q_j^* f = 0$ et donc $P_k^* f = P_\ell^* f$ pour tous k, ℓ ; si $\ell \to +\infty$ on trouve $P_k^* f = f$; si $k \to -\infty$ on trouve $f \in \cap V_j^*$ et donc $f = 0$); c'est donc une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans le sens des ondelettes aux fonctions d'échelle, on note W_j l'espace engendré par les $\psi_{\varepsilon,j,k}$ ($1 \le \varepsilon \le E$, $k \in \mathbb{Z}$), W_j^* celui engendré par les $\psi^*_{\varepsilon,j,k}$ et Q_j le projecteur

$$Q_j f = \sum_{\varepsilon} \sum_{k} \langle f, \psi^*_{\varepsilon,j,k} \rangle \, \psi_{\varepsilon,j,k}$$

(où $\psi_{\varepsilon,j,k} = A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k)$ et $\psi^*_{\varepsilon,j,k} = A^{j/2}\psi^*_\varepsilon(A^j x - k)$). Alors $Q_j Q_k = 0$ si $j \neq k$ et $Q_j Q_j = Q_j$. On désigne par P_0 l'opérateur $P_0 = \sum_{j \le -1} Q_j$; alors P_0 est continu (car $(\psi_{\varepsilon,j,k})$ et $(\psi^*_{\varepsilon,j,k})$ sont des bases inconditionnelles de L^2) ; de plus P_0 est un projecteur, d'après les propriétés des Q_j citées plus haut et $P_0[f(x-1)] = [P_0 f](x-1)$ car $P_0 = I - \sum_{j \ge 0} Q_j$ et les Q_j sont $\mathbb{Z}$-invariants pour $j \ge 0$. Le noyau $p(x,y)$ de P_0 vérifie les estimations kkk) et kv) de la Proposition 2, par un calcul similaire à celui effectué pour démontrer le Théorème-1bis. On peut alors conclure et le Théorème 3 est démontré.

Il reste cependant à vérifier les lemmes 2 et 3 (qui sont classiques).

Lemme 2. *Si (V_j), (V_j^*) sont deux analyses multi-résolution bi-orthogonales alors $P_0 1 = 1$.*

En effet on a

$$\begin{aligned} P_j f &= \mu(2^j x) f(x) \\ &\quad + \sum_\ell \sum_k A^j \int \bar{\varphi}^*_\ell(A^j y - k)\big(f(y) - f(x)\big)\, dy \ \ \varphi_\ell(A^j x - k) \end{aligned}$$

où

$$\mu = P_0 1 = \sum_\ell \sum_k \Big(\int \bar{\varphi}^*_\ell \, dy \Big) \varphi_\ell(x-k) \, .$$

Le second terme tend vers 0 dans L^2, car les opérateurs

$$T_j f = P_j f - \mu(2^j x) f$$

sont équicontinus sur L^2 et lorsque $f \in C_0^\infty$ il est immédiat que $T_j f \to 0$: $\|T_j f\|_\infty \le C A^{-j}$ d'une part, et d'autre part lorsque

$$|x| \ge 2 \max_{y \in \operatorname{supp} f} |y| = x_0$$

on a

$$|f(x)| \leq C A^j e^{-D A^j |x|},$$

et donc

$$\int_{|x| \geq x_0} |T_j f|^2 dx \leq \int_{|x| \geq A^j x_0} C\, e^{-2D|x|}\, dx \to 0$$

car $x_0 > 0$ (si $f \neq 0$). Comme $P_j f \to f$, on obtient $\mu(2^j x) f \to f$. On teste cela sur $f = 1_{[0,1]}$

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{j \to +\infty} \int_0^1 |1 - \mu(2^j x)|^2 dx &= \lim_{j \to +\infty} \frac{1}{2^j} \int_0^{2^j} |1 - \mu(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |1 - \mu(x)|^2 dx \end{aligned}$$

puisque $\mu(x-1) = \mu(x)$; cela implique que $1 = \mu(x)$.

Lemme 3. *Si $\theta \in E_\alpha$ et $\int \theta\, dx = 0$ alors on a*

$$\Big\| \sum_j \sum_k \lambda_{j,k} A^{j/2} \theta(A^j x - k) \Big\|_2 \leq C \big(\sum_j \sum_k |\lambda_{j,k}|^2 \big)^{1/2}.$$

En effet, on calcule la matrice de Gram des $\theta_{j,k} = A^{j/2} \theta(A^j x - k)$: si $j \geq \ell$ on écrit

$$\langle \theta_{j,k}, \theta_{\ell,p} \rangle = \int A^{(j+\ell)/2} \theta(A^j x - k) \big(\theta(A^\ell x - p) - \theta(A^\ell \frac{k}{A^j} - p) \big)\, dx$$

et donc

$$|\langle \theta_{j,k}, \theta_{\ell,p} \rangle| \leq C\, A^{(j+\ell)/2} \int e^{-D|A^j x - k|} |\theta(A^\ell x - p) - \theta(A^\ell \frac{k}{A^j} - p)|\, dx .$$

On obtient

$$\begin{aligned} &|\langle \theta_{j,k}, \theta_{\ell,p} \rangle| \\ &\leq C\, A^{(\ell-j)/2} \int e^{-D|x|} |\theta(A^{\ell-j} x + A^{\ell-j} k - p) - \theta(A^{\ell-j} k - p)|\, dx . \end{aligned}$$

• Si $|A^{\ell-j} x| \leq 1$ ou si $|A^{\ell-j} x + A^{\ell-j} k - p| \geq |A^{\ell-j} k - p|/2$ on obtient

$$|\theta(A^{\ell-j} x + A^{\ell-j} k - p) - \theta(A^{\ell-j} k - p)| \leq (A^{\ell-j})^\alpha |x|^\alpha e^{-D|A^{\ell-j} k - p|/2} ;$$

• Si $|A^{\ell-j}x| \geq 1$ et $|A^{\ell-j}x| \geq |A^{\ell-j}k-p|/2$, on obtient

$$e^{-D|x|} \leq (A^{\ell-j})^{\alpha}|x|^{\alpha}e^{-D|x|/2}e^{-D|A^{\ell-j}k-p|/4}$$

et au total

$$(14) \qquad |\langle\theta_{j,k},\theta_{\ell,p}\rangle| \leq C\,A^{(\ell-j)(1/2+\alpha)}e^{-D|A^{\ell-j}k-p|/4} \qquad \text{pour } j \geq \ell\,.$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} A^{(\ell-j)/2}|\langle\theta_{j,k},\theta_{\ell,p}\rangle| &\leq C\Big(\sum_{j\geq\ell}\sum_{k} A^{(\ell-j)(\alpha+1)}e^{-D|A^{\ell-j}k-p|/4} \\ &\qquad + \sum_{j<\ell}\sum_{k} A^{(j-\ell)\alpha}e^{-D|A^{j-\ell}p-k|/4}\Big) \\ &\leq C'\Big(\sum_{j\geq\ell} A^{(\ell-j)(\alpha+1)}A^{j-\ell} + \sum_{j<\ell} A^{(j-\ell)\alpha}\Big) \\ &\leq C''\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}|\sum_{j,k}\sum_{\ell,p} a_{j,k}\,b_{j,p}\langle\theta_{j,k},\theta_{\ell,p}\rangle| &\leq \Big(\sum_{j,k}\sum_{\ell,p}|a_{j,k}|^2\,|\langle\theta_{j,k},\theta_{\ell,p}\rangle|A^{(j-\ell)/2}\Big)^{1/2} \\ &\qquad \cdot\Big(\sum_{j,k}\sum_{\ell,p}|b_{\ell,p}|^2\,|\langle\theta_{j,k},\theta_{\ell,p}\rangle|^2 A^{(\ell-j)/2}\Big)^{1/2} \\ &\leq C'\Big(\sum_{j,k}|a_{j,k}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\ell,p}|b_{\ell,p}|^2\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

et le Lemme 3 est démontré.

5. Ondelettes bi-orthogonales à support compact.

Nous allons traiter de même le cas des bases bi-orthogonales d'ondelettes à support compact.

Proposition 2-bis.

a) *Soit* $P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *un opérateur continu tel que*

i) $P \circ P = P$ (*P est un projecteur*) *et tel que* $Pf = \int p(x,y)f(y)\,dy$ *où,*

ii) $p(x,y) = p(x-1, y-1)$ ($\mathbb{Z}$*-invariance*),

iii) $p(x,y) = 0$ *si* $|x-y| \geq M$ (*où* M *est une constante* ≥ 0).

Alors si $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P < +\infty$ *il existe des fonctions* φ_ℓ *et* φ_ℓ^*, $1 \leq \ell \leq \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P$, *telles que*

j) $\varphi_\ell \in \operatorname{Im} P$, $\varphi_\ell^* \in (\operatorname{Ker} P)^\perp$ *et* φ_ℓ, φ_ℓ^* *sont à support compact,*

jj) $(\varphi_\ell(x-k))_{\ell,k}$ *est une base de Riesz de* $\operatorname{Im} P$ *et* $(\varphi_\ell^*(x-k))_{\ell,k}$ *est une base de Riesz de* $(\operatorname{Ker} P)^\perp$,

jjj) $\langle \varphi_\ell(x-k), \varphi_{\ell'}^*(x-k') \rangle = \delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{k,k'}$,

de sorte que le projecteur P *se décompose en*

$$Pf = \sum_{\ell=1}^{\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_\ell^*(x-k) \rangle \varphi_\ell(x-k). \tag{15}$$

b) *Si* P *vérifie* i), ii), iii) *et si de plus, pour deux constantes* $C > 0$ *et* $\beta \in]0,1]$, *on a*

$$|p(x,y) - p(x+h,y)| \leq C\,|h|^\beta \tag{16}$$

alors $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P < +\infty$.

Si $P \neq 0$, il existe $\omega \in \operatorname{Im} P \cap L^2_{\text{comp}}$ avec $\omega \neq 0$. On appelle W le sous-espace de L^2 engendré par les $\omega(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. La démonstration du Théorème 2 ter nous a montré que W admettait une base de Riesz de la forme $\omega_0(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\omega_0 \in L^2_{\text{comp}}$, et donc que $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} W = 1$. Pour $f \in W \cap L^2_{\text{comp}}$, on note

$$P_f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, f(x-k) \rangle z^k$$

(de sorte que $P_f(e^{-i\xi})$ est le polynôme trigonométrique que nous avons déjà utilisé à plusieurs reprises) et on note φ un élément de $W \cap L^2_{\text{comp}}$ tel que P_φ soit non nul ($\varphi \neq 0$) et de degré minimum. Alors $P_\varphi(z)$ ne s'annule pas sur le cercle-unité car nous avons vu que si $P_\varphi(e^{-i\xi_0}) = 0$ et si $\hat{\psi} = \hat{\varphi}/(e^{-i\xi} - e^{-\xi_0})$ alors $\psi \in W \cap L^2_{\text{comp}}$ et

$$P_\varphi(e^{-i\xi}) = |e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}|^2 P_\psi(e^{-i\xi}),$$

ce qui contredit la minimalité de P_φ.

Pour $\gamma \in C_0^\infty$ on pose

$$Q_\gamma(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \gamma, \varphi(x-k)\rangle z^k .$$

Alors l'ensemble des $Q_\gamma(e^{-i\xi})$ est un idéal de l'anneau des polynômes trigonométriques: si Q est un polynôme trigonométrique $\sum a_k e^{-ik\xi}$ et si $\eta = \sum a_k \gamma(x-k)$ alors $Q_\eta = QQ_\gamma$. Soit P_0 le générateur de cet idéal. Alors $P_0(z)$ ne s'annule pas sur le cercle-unité, puisque $Q_\varphi = P_\varphi$ ne s'y annule pas. Si P_0 s'annulait en un point z_0, alors nécessairement $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) z_0^k$ serait nul dans $\mathcal{D}'$. La fonction

$$\theta = \sum_{k\geq 0} z_0^k\, \varphi(x-k) = -\sum_{k<0} z_0^k\, \varphi(x-k)$$

serait alors à support compact; de plus $\theta \in W$ car la première série converge dans L^2 si $|z_0| < 1$, et la seconde si $|z_0| > 1$. Enfin on a $\theta - z_0\theta(x-1) = \varphi$ et donc

$$P_\varphi(e^{-i\xi}) = P_\theta(e^{-i\xi})\, |1 - z_0 e^{-i\xi}|^2 ,$$

ce qui contredit la minimalité de P_φ. On obtient donc que P_0 ne s'annule pas, et donc $P_0 = 1$.

On fixe alors γ_0 tel que $P_{\gamma_0} = 1$ et $\varphi^* = P^*(\gamma_0)$. Alors $\varphi^* \in (\operatorname{Ker} P')^\perp \cap L^2_{\text{comp}}$ et

$$\langle \varphi^*, \varphi(x-k)\rangle = \langle \gamma_0\,, \varphi(x-k)\rangle = \delta_{0,k} .$$

On pose alors

$$\tilde{P} f = Pf - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi^*(x-k)\rangle\, \varphi(x-k) .$$

$\tilde{P}$ est un projecteur et $\operatorname{Im}\tilde{P} = \operatorname{Im} P \cap \{\varphi^*(x-k)\}^\perp$, de sorte que $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im}\tilde{P} = \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P - 1$ et que $\operatorname{Im} P = \{\varphi(x-k)\} \oplus \operatorname{Im}\tilde{P}$. Le noyau de $\tilde{P}$ est encore $\mathbb{Z}$-invariant et proprement supporté. En itérant la construction, on obtient les bases φ_ℓ, φ_ℓ^*.

Le point b) de la Proposition 2-bis est un cas particulier de la Proposition 2 et la Proposition 2-bis est donc démontrée.

On a alors le théorème

Théorème 3-bis.

a) *Soit V_j, V_j^* deux analyses multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ de même facteur de dilatation A et de même multiplicité d. On suppose que de plus elles admettent des fonctions φ_ℓ, φ_ℓ^*, $1 \leq \ell \leq d$, telles que*

- *φ_ℓ et φ_ℓ^* sont à support compact,*
- *les $\varphi_\ell(x-k)$, $1 \leq \ell \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de V_0 et les $\varphi_\ell^*(x-k)$, $1 \leq \ell \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de V_0^*,*
- *$\langle \varphi_\ell(x-k), \varphi_{\ell'}^*(x-k') \rangle = \delta_{\ell,\ell'}\, \delta_{k,k'}$.*

On définit $W_0 = V_1 \cap (V_0^*)^\perp$ et $W_0^* = V_1^* \cap V_0^\perp$. Alors il existe des bases de Riesz duales de W_0 et W_0^* de la forme

$$\psi_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d\,;\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

et

$$\psi_\varepsilon^*(x-k)\,, \qquad 1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d\,;\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

avec ψ_ε, ψ_ε^* à support compact.

Si de plus les φ_ℓ et les φ_ℓ^* sont de classe C^α pour un $\alpha > 0$ alors les familles

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

et

$$(A^{j/2}\psi_\varepsilon^*(A^j x - k))_{1 \leq \varepsilon \leq (A-1)d;\ j,k \in \mathbb{Z}}$$

forment des bases inconditionnelles bi-orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$.

b) *Inversement si les fonctions ψ_ε et ψ_ε^* sont à support compact et de classe C^α pour un $\alpha > 0$ et si les familles $(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k)))$ et $(A^{j/2}\psi_\varepsilon^*(A^j x - k))$ $(1 \leq \varepsilon \leq E;\, j,k \in \mathbb{Z})$ forment des bases inconditionnelles bi-orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ alors elles proviennent d'analyses multi-résolutions bi-orthogonales de facteur de dilatation A, de multiplicité $d = E/(A-1)$ et à fonctions d'échelle duales $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_d^*$ à support compact et de classe C^α.*

Ce théorème se montre de manière analogue aux théorèmes 1 et 3.

6. Annexe: Le Théorème de Gröchenig, corollaires et variantes.

Le Théorème de Gröchenig concerne les analyses multi-résolutions multi-dimensionnelles. Plus précisément, on considère une suite (V_j) de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que

(5.1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$,

(5.2) $f \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,

(5.3) V_0 a une base orthonormée de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, où φ est à décroissance rapide ($\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha\varphi \in L^2$).

On note W_0 le complémentaire orthogonal de V_0 dans V_1 et on veut montrer que W_0 admet une base orthonormée de la forme $\psi_\varepsilon(x-k)$, $1 \le \varepsilon \le 2^n - 1$, $k \in \mathbb{Z}^n$, où les ψ_ε sont à décroissance rapide. Pour cela, on note $r_1, \ldots, r_{2^n}$ des représentants de $\mathbb{Z}^n/2\,\mathbb{Z}^n$, de sorte qu'on dispose d'une base orthonormée de V_1 constituée des $\omega_j(x-k)$, $1 \le j \le 2^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$, où $\omega_j = 2^{n/2}\varphi(2x - r_j)$. Comme $\varphi \in V_1$, φ se décompose sur les $\omega_j(x-k)$ et on a

$$\hat{\varphi} = \sum_{j=1}^{2^n} \omega_j(\xi)\,\hat{\varphi}_j(\xi)$$

où les ω_j sont C^∞ et $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodique. Or les familles $(f(x-k))$, $(g(x-k))$, $k \in \mathbb{Z}^n$, sont orthonormées pour $f, g \in V_1$, ($\hat{f} = \sum f_j(\xi)\hat{\varphi}_j(\xi)$, $\hat{g} = \sum g_j(\xi)\hat{\varphi}_j(\xi)$) si et seulement si on a: $\sum_j |f_j(\xi)|^2 = 1$, $\sum_j |g_j(\xi)|^2 = 1$, $\sum_j f_j(\xi)\bar{g}_j(\xi) = 0$ (puisque

$$\int f(x-k)\bar{g}(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} \sum_j f_j(\xi)\bar{g}_j(\xi)\,e^{-ik\xi}\,d\xi).$$

Il s'agit donc de compléter de manière unitaire une matrice carrée de taille 2^n dont on connaît la première colonne ; les coefficients de la matrice doivent être des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodiques, ou encore des fonctions C^∞ sur $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1 = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. Le Théorème de Gröchenig est alors le suivant

Théorème 4. *Si $m : \mathbb{T}^n \to S^{2q-1} = \{z \in \mathbb{C}^q :\ \|z\|^2 = 1\}$ est C^∞, et si $n < 2q-1$, alors il existe une application: $M : \mathbb{T}^n \to U(q)$ de classe C^∞ telle que le premier vecteur colonne de M soit m.*

En effet, puisque m est C^∞ et que $n < 2q-1$, $m(\mathbb{T}^n)$ est de mesure nulle sur S^{2q-1} et donc n'est pas surjective. On peut toujours supposer que $(0,\dots,0,1)$ n'est pas atteint. Alors le déterminant de la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} m_1 & \alpha & & 0 \\ \vdots & 0 & & \alpha \\ m_q & -\bar{m}_1 & \dots & -\bar{m}_{q-1} \end{pmatrix}$$

vaut

$$\begin{aligned} -\alpha^{q-1} m_q + (-1)^{q-1}\alpha^{q-2}(|m_1|^2 + \cdots + |m_{q-1}|^2 \\ = (-1)^{q-1}\alpha^{q-2}(1 - |m_q|^2 + (-1)^q \alpha\, m_q) \end{aligned}$$

et est donc nul pour $(-1)^{q-1}\alpha \in]0,\varepsilon[$, ε assez petit; en effet si ξ_ε est tel que

$$1 - |m_q(\xi_\varepsilon)|^2 - \varepsilon\, m_q(\xi_\varepsilon) = 0,$$

alors $|m_q(\xi_\varepsilon)| \to 1$ pour $\varepsilon \to 0$ et $m_q(\xi_\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ d'où $m_q(\xi_\varepsilon) \to 1$, ce qui est impossible. Il suffit ensuite d'orthonormaliser les vecteurs colonnes de M_α pour obtenir M. Le Théorème 4 est donc démontré.

Si la fonction φ est à localisation exponentielle, les fonctions m_j ont leurs coefficients de Fourier à décroissance exponentielle et il en va de même pour M_α. Cette propriété reste stable sous l'orthonormalisation de Gram-Schmidt des colonnes de M_α (la vitesse de décroissance exponentielle pouvant être modifiée), et on trouve des ondelettes ψ_ε à localisation exponentielle.

Si V_0 admet une base de Riesz de la forme $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, avec g à support compact, on exprime les vecteurs de V_1 dans la base $2^{n/2}g(2(x-k)-r_j)$. En particulier, si $(\gamma(x-k))$ est une base de Riesz de V_0 où γ s'exprime à l'aide d'un nombre fini des $2^{n/2}g_j(x-k)$ (on peut prendre par exemple

$$\hat{\gamma} = \prod_{j=1}^{2^n} A\left(\frac{\xi}{2} + r_j\pi\right)\hat{g}(\xi)$$

avec

$$A(\xi) = \sum \langle g(x), g(x-k)\rangle e^{-ik\xi} = \sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2\,;$$

A ne s'annule jamais, il en va donc de même du produit $\prod_{j=1}^{2^n} A(\xi/2 + r_j\pi)$ qui est $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodique, de sorte que les $\gamma(x-k)$ forment bien une base de Riesz de V_0 ; enfin si

$$\prod_{j=2}^{2^n} A\left(\frac{\xi}{2} + r_j\pi\right) \hat{g}(\xi) = \hat{\Gamma}(\xi)$$

et si $r_1 = 0$, on a

$$\gamma = \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle \Gamma, g_{j,k}\rangle \, g_{j,k}$$

avec

$$g_{j,k} = 2^{n/2} g(2(x-k) - r_j)\,;$$

Γ est à support compact et la somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls), on doit compléter dans $GL(2^n, \mathbb{C})$ une matrice dont le premier vecteur colonne est à coefficients polynômes trigonométriques. La matrice M_α est alors elle-même à coefficients polynômes trigonométriques. On a donc complété $\gamma(x-k)$ à l'aide de fonctions $\gamma_\varepsilon(x-k)$, $1 \le \varepsilon \le 2^n - 1$, $k \in \mathbb{Z}^n$, avec γ_ε à support compact pour former une base de Riesz de V_1. Le procédé d'orthonormalisation décrit dans [1] et [9] permet alors d'obtenir une base de Riesz de W_0 de la forme

$$\Gamma_\varepsilon(x-k)\,, \qquad 1 \le \varepsilon \le 2^n - 1,\ k \in \mathbb{Z}^n\,,$$

avec Γ_ε à support compact.

Le Théorème de Gröchenig s'applique également immédiatement au cas des analyses multi-résolutions de $L^2(\mathbb{R})$ de facteur de dilatation A et de multiplicité d. On est alors amené à compléter une application m de $\mathbb{T}^1$ dans $(S^{2Ad-1})^d$ telle que les vecteurs $m_1, \ldots, m_d$ soient orthogonaux deux à deux dans $\mathbb{C}^{Ad}$ en une application M de $\mathbb{T}^1$ dans $U(Ad)$; c'est exactement le cas de figure du Théorème de Gröchenig. On complète d'abord l'application m_1 en une application M_1. Mais alors les applications $m_2, \ldots, m_d$ (prenant des valeurs orthogonales à m_1) s'expriment à l'aide des vecteurs colonnes de M_1 orthogonaux à m_1 ; on est alors ramené à une application à valeurs dans $(S^{2Ad-3})^{d-1}$, et ainsi de suite.

Le Théorème de Gröchenig permet alors de passer des fonctions d'échelle aux ondelettes dans le cas des fonctions d'échelle à décroissance rapide, ou à localisation exponentielle (Théorème 1-bis, Théorème 3) et dans le cas où V_0 admet une base de Riesz à support compact (Théorème 1-ter). Mais il ne permet pas de traiter le cas des fonctions d'échelle à support compact (Théorème 1) ni de passer des ondelettes aux fonctions d'échelle.

Conclusion.

Nous avons développé une méthode alternative au Théorème de Gröchenig pour l'étude des bases de V_0 et W_0 dans le cadre des analyses multi-résolutions uni-dimensionnelles. Cette méthode, basée sur l'étude des projecteurs associés, a permis de traiter le cas des fonctions d'échelle à support compact et le passage des ondelettes aux fonctions d'échelle. Mais elle ne paraît pas transposable aux dimensions supérieures, que ce soit pour l'idée de la propriété de minimisation utilisée dans la démonstration du Théorème 2 ou que ce soit pour le lemme "d'expulsion des zéros" (Lemme 1).

REMARQUE. Y. Meyer m'a signalé un argument plus simple pour prouver la compacité des projecteurs périodisés ΠP (de noyau $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)$) intervenant tout au long de cet article. En fait, le projecteur ΠP est compact parce qu'il est un opérateur de Hilbert-Schmidt:

$$\int_0^1 \int_0^1 |\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)|^2 dx\, dy < +\infty .$$

Cela permet d'éliminer presque toute hypothèse de régularité sur les ondelettes ψ_ε.

Par exemple si $\left(A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x-k)\right)$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ $(1\le\varepsilon\le E,\ j,k\in\mathbb{Z})$ avec ψ_ε à support compact et $\psi_\varepsilon\in L^{2+\beta}$ pour un $\beta>0$, alors l'opérateur ΠP est de Hilbert-Schmidt: si les ψ_ε sont à support compact contenu dans $[-M,M]$, le noyau

$$p(x,y)=\sum_{j\le -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\varepsilon=1}^{E} A^j\bar{\psi}_\varepsilon(A^j y-k)\psi_\varepsilon(A^j x-k)$$

est nul si $|x-y|\ge 2M$ et on a donc

$$\int_0^1 \int_0^1 |\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k,y)|^2 dx\, dy$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 (2M+1) \sum_{k\in\mathbb{Z}} |p(x-k,y)|^2 dx\, dy$$
$$\leq (2M+1) \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} |p(x,y)|^2 dy\,.$$

Mais

$$\Big\| A^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_\varepsilon(A^j x - k)\, \bar{\psi}_\varepsilon(A^j y - k) \Big\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} A^{j/2}\, \|\psi_\varepsilon(A^j y - k)\|_{L^2([0,1])}$$
$$\leq A^{j/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\psi_\varepsilon(A^j y - k)\|_{L^{2+\beta}([0,1])}$$
$$\leq (2M+1)\, A^{j\,\beta/(2(2+\beta))}\, \|\psi_\varepsilon\|_{2+\beta}$$

et $\sum_{j\leq -1} A^{j\beta/(2(2+\beta))} < +\infty$. On procède de même dans le cas des bases bi-orthogonales.

Bibliographie.

[1] Chui, C. K., Stockler, J., Ward, J. D., Compactly supported box spline wavelets. Preprint, 1991.

[2] Cohen, A., Daubechies, I., Feauveau, J. C., Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485-560.

[3] Daubechies, I., Orthonormal bases of wavelets with compact support. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

[4] Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets.* SIAM Books, 1992.

[5] Feauveau, J. C., Analyses multirésolution par ondelettes non orthogonales et bases de filtres numériques. Thèse Université Paris Sud, 1990.

[6] Goodman, T. N. T., Lee, S. L., Tang, W. S., Wavelets in wandering subspaces. A paraître aux *Trans. Amer. Math. Soc.*

[7] Gröchenig, K. H., Analyse multiéchelle et bases d'ondelettes. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1987), 13-17.

[8] Hervé, L., Méthodes d'opérateurs quasi-compacts en analyse multirésolution, applications à la construction de bases d'ondelettes et à l'interpolation. Thèse Université Rennes I, 1992.

[9] Jia, R. Q., Micchelli, C. A., Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets, II: Powers of two, in *Curves and surfaces,* P. J. Laurent, A. le Méhauté and L. L. Schumaker (eds.), Academic Press, 1991.

[10] Lemarié, P. G., Analyses multi-résolution et ondelettes à support compact, in *Les ondelettes en* 1989, P. G. Lemarié (ed.), Lectures notes in Math. **1438** (1990).

[11] Lemarié, P. G., Fonctions à support compact dans les analyses multirésolution. *Revista Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 157-182.

[12] Lemarié-Rieusset, P. G., Existence de fonctions-pères pour les ondelettes à support compact. *C. R. Acad. Sci. Paris* **314** (1992), 17-19.

[13] Lemarié-Rieusset, P. G., Sur l'existence des analyses multi-résolution en théorie des ondelettes. *Revista Mat. Iberoamericana* **8** (1992), 457-474.

[14] Lemarié, P. G., Meyer, Y., Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1-18.

[15] Mallat, S., Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L^2. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-88.

[16] Meyer, Y., Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Sém. Bourbaki*, 1985-1986, n° 662.

[17] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

Recibido: 10 de abril de 1.992

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset
Département de Matématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay, FRANCE