STUDIA MATHEMATICA 109 (3) (1994)

Remarques sur la formule sommatoire de Poisson

par

JEAN-PIERRE KAHANE et
PIERRE-GILLES LEMARIÉ-RIEUSSET (Paris)

Dedicated to the memory of Stanisław Hartman

Abstract. It is well known that the condition "$f \in L^1$ and $\hat{f} \in L^1$" is not sufficient to ensure the validity of the Poisson summation formula $\sum f(k) = \sum \hat{f}(k)$. We discuss here a stronger condition "$x^a f \in L^p$ and $\xi^b \hat{f} \in L^q$" and see for which values of a and b the condition is sufficient.

I. Généralités sur la formule sommatoire de Poisson. Nous définissons la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f intégrable sur la droite réelle avec la normalisation suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi}\, dx . \tag{1}$$

La *formule sommatoire de Poisson* s'écrit alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) . \tag{2}$$

Nous allons discuter dans cet article un critère simple de validité de cette formule.

En effet, sous la seule hypothèse "$f \in L^1$", la formule (2) ne peut avoir de sens, puisqu'elle fait appel à des valeurs ponctuelles de f. L'hypothèse "$f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$" (assurant que f et $\hat{f}$ sont continues) ne suffit pas plus à assurer la validité de (2) : on trouve dans un exercice de Bourbaki [1] un exemple où les deux séries $\sum f(n)$ et $\sum \hat{f}(n)$ sont divergentes quoique f et $\hat{f}$ soient intégrables, tandis que Y. Katznelson ([2], [3]) a donné un exemple pour lequel $\sum f(n)$ et $\sum \hat{f}(n)$ sont convergentes mais de sommes distinctes. Nous discuterons l'exemple de Katznelson dans la section II.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 42A38.

Une des clés pour traiter la formule (2) est de considérer la 1-périodisée $\widetilde{f}$ de f,

$$\widetilde{f}(x) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}, \tag{3}$$

où l'égalité $\equiv$ est la définition de $\widetilde{f}$ (la série $\sum f(x+n)$ converge presque partout et définit une fonction 1-périodique) tandis que l'égalité $\sim$ exprime que $\hat{f}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de la fonction périodique $\widetilde{f}$. Un critère de validité pour la formule (2) peut classiquement se chercher de la manière suivante.

Étape 1 : étudier la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ sur $[-1/2, 1/2]$ (convergence en 0; continuité de $\widetilde{f}$ en 0).

Étape 2 : étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}$ vers $\widetilde{f}(x)$ (en $x = 0$).

Une première approche est de forcer la convergence et la continuité de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ en imposant la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n,n+1]} |f(x)|$ (une condition introduite par Wiener [4]). On a le résultat facile suivant :

PROPOSITION 1. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n,n+1]} |f(x)| < \infty. \tag{4}$$

Alors on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \hat{f}(n). \tag{5}$$

Preuve. Par (4), $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge uniformément sur $[-1/2, 1/2]$ vers une fonction $\widetilde{f}$ continue. (5) est alors immédiat par le théorème de Fejér. ■

Pour pouvoir remplacer la $(C,1)$-sommabilité de $\sum \hat{f}(n)$ dans (5) par la convergence de la série, la continuité de $\widetilde{f}$ ne suffit pas. Une condition suffisante classique est que $\widetilde{f}$ satisfasse la condition de Dini à l'origine; cela est certainement le cas si $\widetilde{f}$ est höldérienne. D'où le critère suivant :

PROPOSITION 2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour un $\varepsilon \in \,]0,1]$ on ait*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n,n+1]} |x|^{\varepsilon} |f(x)| < \infty, \tag{6}$$

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\varepsilon}} < \infty. \tag{7}$$

Alors $\sum f(n)$ est (absolument) convergente, $\sum \hat{f}(n)$ est simplement convergente (au sens de l'existence de la limite de $\sum_{n=-M}^{N} \hat{f}(n)$ quand M et N tendent vers l'infini) et les deux sommes sont égales : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$.

Preuve. Il suffit de vérifier que $\widetilde{f}$ est höldérienne d'exposant $\alpha = \varepsilon^2/(\varepsilon+1)$. Pour cela, notons C_0 et C_1 les premiers membres de (6) et (7). Soit $x \in [0,1]$ et $h \in [-1/2, 1/2]$, $h \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|f(x+n) - f(x+n+h)| \le C_1 |h|^{\varepsilon}$$

et, si $|n| \ge 2$,

$$\begin{aligned} &|f(x+n) - f(x+n+h)| \\ &\quad \le (|n| - \tfrac{3}{2})^{-\varepsilon} (|x+n|^{\varepsilon} |f(x+n)| + |x+n+h|^{\varepsilon} |f(x+n+h)|), \end{aligned}$$

d'où pour tout $N \ge 2$, en distinguant le cas $|n| \le N-1$ et $|n| \ge N$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x)| &\le (2N-1) C_1 |h|^{\varepsilon} + (N - \tfrac{3}{2})^{-\varepsilon} 2C_0 \\ &\le 2C_1 N |h|^{\varepsilon} + 4^{\varepsilon} 2C_0 N^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $N = 2[|h|^{-\varepsilon/(\varepsilon+1)}]$. ■

On ne peut remplacer la convergence simple de $\sum \hat{f}(n)$ par sa convergence absolue dans la proposition 2, sous la seule hypothèse que $\widetilde{f}$ est höldérienne. Il faut pour cela une hypothèse supplémentaire, par exemple que son exposant d'höldérianité est strictement plus grand que $1/2$ ou que $\widetilde{f}$ est höldérienne et à variation bornée [5]. Un exemple de fonction périodique $1/2$-höldérienne telle que ses coefficients de Fourier ne soient pas absolument sommables peut se construire facilement à l'aide des polynômes de Rudin–Shapiro [3]. Nous retrouverons ces polynômes dans la section V.

Si au lieu de la condition de Dini, on fait usage de la condition de Dirichlet–Jordan pour la convergence des séries de Fourier, on a un énoncé simple, dont nous ne nous servirons pas dans la suite :

PROPOSITION 3. *Soit f une fonction intégrable, continue et à variation bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\sum f(n)$ est absolument convergente, $\sum \hat{f}(n)$ est simplement convergente (au sens de l'existence de la limite des sommes partielles symétriques $\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)$) et les deux sommes sont égales.*

Preuve. On vérifie facilement que f satisfait le critère de Wiener (4). En effet, $|f(x) - f(y)|$ se contrôle pour x et y dans $[n, n+1]$ par la variation de f sur $[n, n+1]$. Intégrant par rapport à y, on a pour $x \in [n, n+1]$,

$$|f(x)| \le \int_n^{n+1} |f(y)|\, dy + \int_n^{n+1} |df|(y),$$

d'où (4). En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction 1-périodique, continue et à variation bornée, ce qui termine la preuve. ■

II. Le contre-exemple de Katznelson. Le contre-exemple de Katznelson consiste à décomposer $\chi_{]0,1[}$ en une série $\sum \varphi_j$ de fonctions continues positives φ_j dont les transformées de Fourier $\hat{\varphi}_j$ sont intégrables, puis à associer à chaque φ_j une fonction

$$\psi_j(x) = \frac{1}{N_j} \sum_{|n|<N_j} \left(1 - \frac{|n|}{N_j}\right) \varphi_j(x-n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

de sorte que $\hat{\psi}_j$ et $\hat{\varphi}_j$ coïncident sur $\mathbb{Z}$ mais que, par choix de N_j, $\|\hat{\psi}_j\|_1$ soit aussi petit qu'on veut, et enfin à poser

$$f = \sum \psi_j .$$

Cette série converge dans L^1 et les transformées de Fourier de f et de $\chi_{]0,1[}$ coïncident sur $\mathbb{Z}$, donc $\hat{f}(k) = \delta_{0,k}$ (1 pour $k=0$, 0 pour k entier $\neq 0$). Si les N_j sont convenablement choisis, la série $\sum \hat{\psi}_j$ converge aussi dans L^1, donc $\hat{f}$ appartient à L^1 et la série $\sum \psi_j$ converge uniformément. Donc f est continue et, comme tous les ψ_j sont nuls sur $\mathbb{Z}$, f est nulle sur $\mathbb{Z}$. Ainsi $\sum \hat{f}(k) = 1$ et $\sum f(k) = 0$.

Pour rendre les calculs à venir plus clairs nous allons donner une variante de cette construction. Partons de la convolution

$$\omega = \chi_{]0,1[} * \theta ,$$

où θ est une fonction de classe C^∞, portée par $[-1,0]$, d'intégrale égale à 1. Ainsi ω est portée par $[-1,1]$, de classe C^∞,

$$\hat{\omega}(k) = \delta_{0,k} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

et $\hat{\omega}(\xi)$ est une fonction à décroissance rapide. Posons

$$\gamma(x) = \omega(x) - \omega(2x), \quad \gamma_j(x) = \gamma(2^j x) \quad (j \in \mathbb{N}),$$

$$\gamma_{j,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{|n|<N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \gamma_j(x-n).$$

La série $\sum \gamma_j$ converge vers ω dans L^1 et en tout $x \neq 0$, donc

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{\gamma}_j(k) = \delta_{0,k} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'autre part les fonctions γ, γ_j, $\gamma_{j,N}$ sont toutes nulles sur $\mathbb{Z}$, et

$$\hat{\gamma}_{j,N}(k) = \hat{\gamma}_j(k) \quad (j \in \mathbb{N},\ N \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Majorons $\|\hat{\gamma}_{j,N}\|_1$. On a

$$\hat{\gamma}_{j,N}(\xi) = \frac{1}{N} K_N(\xi) \hat{\gamma}_j(\xi), \qquad K_N(\xi) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N\xi}{\sin \pi\xi}\right)^2 .$$

L'important est ici que K_N (le noyau de Fejér) est positif, et que

$$\int_n^{n+1} K_N = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi

$$\|\hat{\gamma}_{j,N}\|_1 \leq \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n\leq\xi<n+1} |\hat{\gamma}_j(\xi)| = \frac{1}{N} \|\hat{\gamma}_j\|_W$$

où $\|\ \|_W$ désigne la norme de Wiener introduite dans la proposition 1 (formule (4)). Comme $\|\hat{\gamma}_j\|_W \leq C$, constante qui ne dépend que de ω,

$$\|\hat{\gamma}_{j,N}\|_1 \leq \frac{C}{N} .$$

Choisissons maintenant une suite N_j telle que $\sum 1/N_j < \infty$, et posons

$$f = \sum \gamma_{j,N_j} .$$

La série converge dans L^1 (cela n'utilise pas l'hypothèse faite sur les N_j), donc

$$\hat{f}(k) = \sum_j \hat{\gamma}_{j,N_k}(k) = \sum_j \hat{\gamma}_j(k) = \delta_{0,k} .$$

De plus la série $\sum \hat{\gamma}_{j,N_j}$ converge dans L^1, donc $\hat{f} \in L^1$. La série qui définit f converge uniformément, donc f est continue et nulle sur $\mathbb{Z}$. On a finalement f et $\hat{f}$ continues, $f \in L^1$, $\hat{f} \in L^1$, $\sum f(k) = 0$, $\sum \hat{f}(k) = 1$.

Nous allons discuter cette construction et voir jusqu'à quel point on peut renforcer les conditions de taille sur f et $\hat{f}$ (du type $x^a f \in L^p$ avec $a > 1/p' = 1 - 1/p$ et $\xi^b \hat{f} \in L^q$ avec $b > 1/q' = 1 - 1/q$) et avoir quand même un contre-exemple à la formule sommatoire de Poisson. Choisissons donc $N_j = [2^{\lambda j}]$ pour un $\lambda > 0$, et cherchons à quelles conditions sur λ on a $x^a f \in L^p$ et $\xi^b \hat{f} \in L^q$.

Pour avoir $x^a f \in L^p$, il suffit que la série $\|x^a \gamma_{j,N_j}\|_p$ soit sommable. Or, le support de γ_{j,N_j} étant contenu dans l'intervalle $[-N_j - 1, N_j + 1]$, on a

$$\|x^a \gamma_{j,N_j}\|_p = O(N_j^a) \|\gamma_{j,N_j}\|_p .$$

Les $\gamma_j(x-n)$ étant à supports disjoints (pour $j \geq 1$),

$$\|\gamma_{j,N_j}\|_p = O(N_j^{-1+1/p}) \|\gamma_j\|_p$$

et enfin $\|\gamma_j\|_p = O(2^{-j/p})$. Donc

$$\|x^a \gamma_{j,N_j}\|_p = O(2^{j(\lambda(a-1+1/p)-1/p)})$$

et la suite est sommable lorsque

$$\lambda\left(a-\frac{1}{p'}\right)-\frac{1}{p}<0\,.$$

Pour avoir $\xi^b\hat{f}\in L^q$, il suffit que la suite $\|\xi^b\hat{\gamma}_{j,N_j}\|_q$ soit sommable. Pour alléger l'écriture, écrivons N au lieu de N_j. On a

$$\int |\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_{j,N}|^q\,d\xi=\int |\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_j|^q\left|\frac{1}{N}K_N\right|^q d\xi$$

et l'important est ici que

$$\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{N}K_N\right)^q d\xi\le\int_n^{n+1}\frac{1}{N}K_N\,d\xi=\frac{1}{N}\,.$$

Donc

$$\int |\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_{j,N}|^q\,d\xi\le\frac{1}{N}\||\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_j|^q\|_{\mathrm{W}}\,.$$

Pour estimer la norme de Wiener, observons que, lorsque f est une fonction continue et de classe C^1 par morceaux,

$$\|f\|_{\mathrm{W}}\le\|f\|_1+\|f'\|_1$$

(comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 3). Or

$$\||\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_j|^q\|_1=\int |\xi|^{bq}2^{-jq}\left|\hat{\gamma}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right|^q d\xi=2^{j(bq+1-q)}\int |\xi|^{bq}|\hat{\gamma}|^q\,d\xi\,,$$

$$\left\|\frac{d}{d\xi}|\xi|^{bq}|\hat{\gamma}_j|^q\right\|_1=\operatorname{var}\left(|\xi|^{bq}2^{-jq}\left|\hat{\gamma}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right|^q\right)=2^{j(bq-q)}\operatorname{var}(|\xi|^{bq}|\hat{\gamma}|^q)$$

et la somme est $O(2^{j(bq+1-q)})$. Finalement,

$$\|\xi^b\hat{\gamma}_{j,N_j}\|_q=O(N_j^{-1/q}2^{j(b-1+1/q)})$$

et cette suite est sommable si

$$-\frac{\lambda}{q}+b-\frac{1}{q'}<0\,.$$

Les calculs ci-dessus supposent p et q finis. En comparant les conditions obtenues sur λ, on obtient un résultat qu'on étend à simple lecture au cas où p ou q est infini.

RÉSULTAT 1. *Si $a>1/p'$ ($p\in[1,\infty]$, $1/p'=1-1/p$) et si $b>1/q'$ ($q\in[1,\infty]$, $1/q'=1-1/q$) et si de plus*

$$\frac{1}{pq}>\left(b-\frac{1}{q'}\right)\left(a-\frac{1}{p'}\right),\tag{8}$$

il existe une f continue telle que $x^af\in L^p$ (donc $f\in L^1$), $\xi^b\hat{f}\in L^q$ (donc $\hat{f}\in L^1$) et qui donne un contre-exemple à la formule de Poisson : $\sum f(k)=0$, $\sum\hat{f}(k)=1$.

Remarque. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\{f\in L^1 : x^af\in L^p,\xi^b\hat{f}\in L^q\}$, le résultat 1 et le théorème de Banach–Steinhaus assurent que sous l'hypothèse (8), on peut trouver f vérifiant $x^af\in L^p$, $\xi^b\hat{f}\in L^q$ et telle que $\sum f(k)$ ou $\sum\hat{f}(k)$ diverge. ∎

III. Le critère de convergence. Le résultat 1, obtenu en discutant le contre-exemple de Katznelson, nous a amené à conjecturer que lorsque $(b-1/q')(a-1/p')>1/(pq)$ la formule sommatoire de Poisson était valable. Pour cela, nous nous efforcerons de nous ramener au critère de Wiener exposé dans les propositions 1 et 2.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $1<p<\infty$, $1<q<\infty$. On considère deux fonctions ω et Ω de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $[-1,1]$ et telles que $\int\omega\,dx=\int\Omega\,dx=1$ et $\int x^k\omega\,dx=\int x^k\Omega\,dx=0$ pour $1\le k\le K_0$ avec $K_0>ap'$ et $K_0>bq'$. Pour $j\ge0$, on note $\omega_j=A^j\omega(A^jx)$ (de transformée de Fourier $\hat{\omega}_j=\hat{\omega}(\xi/A^j)$) et $\Omega_j=B^j\Omega(B^jx)$ (de transformée de Fourier inverse $\check{\Omega}_j=\check{\Omega}(x/B^j)$). On approxime f (telle que $x^af\in L^p$ et $\xi^b\hat{f}\in L^q$) par $f_j=(f*\omega_j)\check{\Omega}_j$. On décompose $f_{j+1}-f_j$ en $g_j+\check{h}_j$, où $g_j=(f*\omega_j)\check{\Gamma}_j$ avec $\Gamma_j=\Omega_{j+1}-\Omega_j=B^j\Gamma(B^j\xi)$, tandis que $\check{h}_j$ a pour transformée de Fourier $h_j=(\hat{f}\hat{\gamma}_{j+1})*\Omega_{j+1}$ avec $\gamma_{j+1}=\omega_{j+1}-\omega_j=A^{j+1}\gamma(A^jx)$. On a

$$f=f_0+\sum_{j=1}^\infty g_j+\sum_{j=0}^\infty\check{h}_j=f_0+G+\check{H}\,.$$

On va montrer que pour un choix de $A,B>1$ et de $\varepsilon\in\,]0,1[$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sup_{[n,n+1]}|x|^\varepsilon|G(x)|<\infty\tag{9}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sup_{[n,n+1]}|\xi|^\varepsilon|H(\xi)|<\infty\,.\tag{10}$$

En conséquence, G et H sont höldériennes : en effet, $G=f-f_0-\check{H}$, où f est höldérienne d'exposant s pour $s<b-1/q'$, f_0 appartient à la classe de Schwartz et $\check{H}$ est höldérienne d'exposant ε par (10) (puisque $|\xi|^\varepsilon H\in L^1$); on raisonne de même pour $H=\hat{f}-\hat{f}_0-\hat{G}$ puisque $\hat{f}$ est höldérienne d'exposant σ pour $\sigma<a-1/p'$ et $\hat{G}$ est höldérienne d'exposant ε par (9). La proposition 2 permet alors de conclure que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{G}(k)$ et que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\check{H}(k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}H(k)$, et donc que f satisfait la formule de Poisson : les deux séries $\sum f(k)$ et $\sum\hat{f}(k)$ convergent et sont de même somme.

Il reste à démontrer (9) et (10). On note x_n et ξ_n deux points de $[n, n+1]$ et on veut majorer

$$I = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{\infty} \int |f(x)| A^j |\omega(A^j(x-x_n)|\, dx\, |x_n|^{\varepsilon} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)|$$

et

$$J = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{\infty} \int |\hat{f}(\xi)| |\hat{\gamma}(\xi/A^j)| B^j |\Omega(B^j(\xi-\xi_n))|\, d\xi\, |\xi_n|^{\varepsilon}$$

par $C(\|x^a f\|_p + \|\xi^b \hat{f}\|_q)$ où C ne dépend ni de f ni du choix des x_n ou des ξ_n.

I se majore simplement. Pour $|n| \le 3$, on écrit $|\check{\Gamma}(x)| \le C|x|$ et donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int |f(x)| A^j |\omega(A^j(x-x_n)|\, dx\, |x_n|^{\varepsilon} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)|$$

$$\le \|f\|_\infty \|\omega\|_1 4^{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4C}{B^j} = C'\|f\|_\infty \le C''(\|x^a f\|_p + \|\xi^b \hat{f}\|_q)$$

(puisque $a > 1/p'$ et $b > 1/q'$, de sorte que $x^a f \in L^p$ et $\xi^b \hat{f} \in L^q \Rightarrow \hat{f} \in L^1$).

Pour $|n| \ge 4$, on remarque que si $x \in \operatorname{Supp} \omega(A^j(x-x_n))$ alors $|x| > \frac{1}{2}|x_n|$ et donc $|x|^{-a} \le 2^a |x_n|^{-a}$, d'où

$$\sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} \int |f(x)| A^j |\omega(A^j(x-x_n))|\, dx\, |x_n|^{\varepsilon} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)|$$

$$\le 2^a \int |x|^a |f(x)| \sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} A^j |\omega(A^j(x-x_n))| |x_n|^{\varepsilon-a} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)|$$

$$\le 2^a \| |x|^a f\|_p \Big\| \sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} A^j |\omega(A^j(x-x_n))| |x_n|^{\varepsilon-a} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| \Big\|_{p'} .$$

Mais on vérifie par Hölder que

$$\Big\{ \sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} A^j |\omega(A^j(x-x_n))| |x_n|^{\varepsilon-a} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| \Big\}^{p'}$$

$$\le \Big(\sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} A^{jp'} |\omega(A^j(x-x_n))|^{p'} |x_n|^{(\varepsilon-a)p'} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} |\chi_{[-1,1]}(A^j(x-x_n))| |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| \Big)^{p'/p} ;$$

à x fixé, seul trois indices n au plus peuvent vérifier $\chi_{[-1,1]}(A^j(x-x_n)) \ne 0$;

de plus, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| < \infty$ puisque $\check{\Gamma}$ décroît rapidement à l'infini et est $O(x^{k_0})$ en 0. On obtient donc

$$I \le C\|f\|_\infty + C\|x^a f\|_p \Big(\sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} A^{jp'-j} |x_n|^{(\varepsilon-a)p'} |\check{\Gamma}(x_n/B^j)| \Big)^{1/p'}$$

$$\le C\|f\|_\infty + C'\|x^a f\|_p \Big(\sum_{j=0}^{\infty} A^{jp'-j} B^{j(\varepsilon-a)p'} B^j \Big)^{1/p'}$$

de sorte que (9) est établi si $A^{p'-1} < B^{(a-\varepsilon)p'-1}$, ou encore $A < B^{(a-1/p'-\varepsilon)p}$.

Les estimations pour J sont similaires. Pour $|n| \le 3$, on majore $|\hat{\gamma}(\xi)|$ par $C|\xi|$ et on trouve que

$$\sum_{|n|\le 3}\sum_{j=0}^{\infty} \int |\hat{f}(\xi)| |\hat{\gamma}(\xi/A^j)| B^j |\Omega(B^j(\xi-\xi_n))|\, d\xi\, |\xi_n|^{\varepsilon} \le C\|\hat{f}\|_\infty .$$

Pour $|n| \ge 4$, on remarque que si $\xi \in \operatorname{Supp} \Omega(B^j(\xi-\xi_n))$ alors $\frac{1}{2}|\xi_n| \le |\xi| \le 2|\xi_n|$ et donc $|\hat{\gamma}(\xi/A^j)| \le \theta(\xi_n/A^j)$ avec $\theta(\xi) = \sup_{|\xi|/2\le|\eta|\le 2|\xi|} |\hat{\gamma}(\nu)|$; on a donc

$$\sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} \int |\hat{f}(\xi)| |\hat{\gamma}(\xi/A^j)| B^j |\Omega(B^j(\xi-\xi_n))|\, d\xi\, |\xi_n|^{\varepsilon}$$

$$\le 2^b \int |\xi|^b |\hat{f}(\xi)| \sum_{|n|\ge 4}\sum_{j=0}^{\infty} B^j |\Omega(B^j(\xi-\xi_n))| |\xi_n|^{\varepsilon-b} \theta(\xi_n/A^j)\, d\xi$$

$$\le C\|\xi^b \hat{f}\|_q \Big(\sum_{j=0}^{\infty} B^{jq'-j} A^{j(\varepsilon-b)q'} A^j \Big)^{1/q'}$$

de sorte que (10) est établi si $B^{q'-1} < A^{(b-\varepsilon)q'-1}$, ou encore $B < A^{(b-1/q'-\varepsilon)q}$.

On peut avoir (9) et (10) simultanément pour un bon choix de ε, A et B dès que $(b-1/q')q(a-1/p')p > 1$. On obtient donc :

RÉSULTAT 2. *Si $a > 1/p'$ ($p \in [1,\infty]$, $1/p' = 1 - 1/p$) et si $b > 1/q'$ ($q \in [1,\infty]$, $1/q' = 1 - 1/q$) et si de plus*

$$\frac{1}{pq} < \Big(b - \frac{1}{q'}\Big)\Big(a - \frac{1}{p'}\Big) \tag{11}$$

alors toute fonction f telle que $x^a f \in L^p$ et $\xi^b \hat{f} \in L^q$ vérifie la formule de Poisson : $\sum f(k)$ converge, $\sum \hat{f}(k)$ converge et les deux sommes sont égales.

Ici, comme dans la proposition 2, la convergence des séries signifie l'existence de la limite pour les sommes partielles $\sum_{-M}^{N}$ quand M et N tendent vers l'infini.

IV. Un critère de convergence absolue. Dans la démonstration du résultat 2, la convergence de $\sum f(k)$ est démontrée de manière indirecte : on décompose f en $f=g+h$ où $\sum|g(k)|<\infty$ est démontré directement tandis que la convergence de $\sum h(k)$ est démontrée à l'aide du critère de Wiener (proposition 2) appliqué à la transformée de Fourier de h. Sous la seule hypothèse (11), on ne peut conclure en général que $\sum|f(k)|$ converge. On dispose cependant d'un critère simple de convergence absolue assez proche du résultat 2 :

PROPOSITION 4. *Si $a>1/p'$ ($p\in[1,\infty]$, $1/p'=1-1/p$) et si $b>1/r$ ($r\in[1,\infty]$) et si de plus, en notant $1/r'=1-1/r$,*

$$\frac{1}{pr'}<\Big(b-\frac{1}{r}\Big)\Big(a-\frac{1}{p'}\Big) \tag{12}$$

alors toute fonction f telle que $x^af\in L^p$ et $f\in B_r^{b,r}$ (espace de Besov) vérifie $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(k)|<\infty$.

Preuve. On considère une fonction $\varphi\in\mathcal{C}^\infty$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x-k)=1$ et que $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-3/4,3/4]$ (de sorte que $\varphi\equiv1$ sur $[-1/4,1/4]$), et une fonction $\omega\in\mathcal{C}^\infty$, paire, à support dans $[-1/4,1/4]$ telle que $\int\omega\,dx=1$ et $\int x^k\omega\,dx=0$ pour $1\le k\le N_0$ avec $N_0>b$.

On pose $\omega_k(x)=|k|^\varepsilon\omega(|k|^\varepsilon x)$ pour un exposant $\varepsilon>0$ qui sera fixé plus bas, $f_1=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(f*\omega_k)\varphi(x-k)$ et $f_2=f-f_1$. On a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f(k)|\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_1(k)|+\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_2(k)|.$$

La première somme se contrôle facilement :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_1(k)|&\le\int|f(x)|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^\varepsilon|\omega(|k|^\varepsilon(x-k))|\,dx\\&\le\|x^af\|_p\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^\varepsilon|\omega(|k|^\varepsilon(x-k))|\,|x|^{-a}\Big\|_{p'}\\&\le C\|x^af\|_p\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{(\varepsilon-a)p'}|k|^{-\varepsilon}\Big)^{1/p'}\end{aligned}$$

et la dernière somme converge pour $(a-\varepsilon)p'+\varepsilon>1$, ou encore $\varepsilon<p(a-1/p')$.

Pour contrôler $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_2(k)|$, on remarque que pour $g\in B_r^{b,r}$ et $k\in\mathbb{Z}^*$,

$$\|g-g*\omega_k\|_\infty\le C|k|^{-\varepsilon(b-1/r)}\|g\|_{B_r^{b,r}}.$$

En effet, on a $B_r^{b,r}\subset B_\infty^{b-1/r,\infty}$ par les inégalités de Bernstein, de sorte que

g est $(b-1/r)$-höldérienne. La preuve de l'inégalité est alors classique. On écrit $b-1/r=m+\varrho$ avec $0<\varrho\le1$ et $m\in\mathbb{N}$ et on écrit

$$\begin{aligned}g(x)-g*\omega_k(x)&=\int(g(x)-g(y))\omega_k(x-y)\,dy\\&=\int\Big(g(x)-g(y)+\sum_{p=1}^m\frac{(y-x)^p}{p!}g^{(p)}(x)\Big)\omega_k(x-y)\,dy;\end{aligned}$$

la formule de Taylor–Lagrange nous assure que

$$g(y)=g(x)+\sum_{p=1}^{m-1}\frac{(y-x)^p}{p!}g^{(p)}(x)+\frac{(y-x)^m}{m!}g^{(m)}(z)\quad\text{pour un } z\in[x,y],$$

de sorte que

$$\Big|g(x)-g(y)+\sum_{p=0}^m\frac{(x-y)^p}{p!}g^{(p)}(x)\Big|\le C|x-y|^{b-1/r}\|g\|_{B_\infty^{b-1/r,\infty}}.$$

Par ailleurs, $f(k)-f*\omega_k(k)$ ne fait intervenir les valeurs de f que sur $[k-1/4,k+1/4]$, où f coïncide avec $f(x-k)$. On obtient donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_2(k)|\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{-\varepsilon(b-1/r)}\|f\varphi(x-k)\|_{B_r^{b,r}}.$$

Mais les normes $\|f\|_{B_r^{b,r}}$ et $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|f\varphi(x-k)\|_{B_r^{b,r}}^r)^{1/r}$ sont équivalentes (on dit que l'espace de Besov $B_r^{b,r}$ est *localisable*) et donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|f_2(k)|\le C'\|f\|_{B_r^{b,r}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{-\varepsilon r'(b-1/r)}\Big)^{1/r'}.$$

Cette dernière somme converge pour $\varepsilon r'(b-1/r)>1$.

On voit qu'on peut choisir C de manière à ce que $\sum|f_1(k)|$ et $\sum|f_2(k)|$ convergent dès que $r'(b-1/r)p(a-1/p')>1$.

Si l'on revient au critère "$x^af\in L^p$, $\xi^b\hat f\in L^q$", on voit que si $q\le2$ la condition $(a-1/p')(b-1/q')>1/(pq)$ entraîne la convergence de $\sum|f(k)|$: en effet, le théorème de Young ($\hat f\in L^q$ et $q\le2\Rightarrow f\in L^{q'}$) appliqué à la décomposition dyadique de f permet de conclure que si $x^af\in L^p$ et $\xi^b\hat f\in L^q$ alors $f\in B_\infty^{b,q'}$ (et même $B_q^{b,q'}$), de sorte que la proposition 3 s'applique (puisque pour tout $\varepsilon>0$, $B_\infty^{b,q'}\subset B_{q'}^{b-\varepsilon,q'}$). Si $q>2$ le théorème de Young ne s'applique plus. Par contre, $\xi^b\hat f\in L^q$ et $\hat f\in L^\infty$ entraîne $\xi^\sigma\hat f\in L^2$ pour tout $\sigma<b-1/q+1/2$, de sorte que si $(\sigma-1/2)(a-1/p)>1/(2p)$ on peut encore appliquer la proposition 4. On obtient donc :

RÉSULTAT 3. *Soient* $a > 1/p'$ $(p \in [1,\infty],\ 1/p' = 1 - 1/p)$ *et* $b > 1/q'$ $(q \in [1,\infty],\ 1/q' = 1-1/q)$. *Alors si de plus*

$$\left(a - \frac{1}{p'}\right)\left(b - \frac{1}{q'}\right) > \max\left(\frac{1}{pq}, \frac{1}{2p}\right) \tag{13}$$

on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)| < \infty .$$

V. Les polynômes de Rudin–Shapiro. Au vu des résultats 1 à 3, il reste à considérer le cas

$$\frac{1}{pq} < \left(a - \frac{1}{p'}\right)\left(b - \frac{1}{q'}\right) < \frac{1}{2p}$$

(où donc $q > 2$) où nous savons que $\sum f(n) = \sum \hat f(n)$ mais où nous n'avons pas montré que $\sum |f(n)|$ était finie. En fait, nous allons voir que $\sum |f(n)|$ peut diverger.

Pour cela, nous considérons les polynômes de Rudin–Shapiro $P_N(\xi) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \varepsilon_n e^{in\xi}$ qui vérifient les propriétés suivantes : pour tout n, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ et $\|P_N\|_\infty \le 2^{(N+1)/2}$.

On pose alors, en choisissant ω $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1/2, 1/2]$ et valant 1 en 0 et en notant $\omega_{j,n}$ la fonction $\omega(A^j(x-n))$ où A est un nombre fixe > 1,

$$f(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}} \varepsilon_{n-2^N}\omega_{N,n} . \tag{14}$$

On a, pour $2^N \le n < 2^{N+1}$, $|f(n)| = |\varepsilon_{n-2^N}|/2^N = 1/2^N$ et donc $\sum |f(n)| = \infty$. Nous allons maintenant voir pour quelles valeurs de A on a $x^a f \in L^p$ et $\xi^b \hat f \in L^q$.

Le calcul de $\|x^a f\|_p$ est immédiat car les $\omega_{N,n}$ sont toutes à supports disjoints deux à deux :

$$\|x^a f\|_p^p = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^{Np}} \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \|x^a \omega_{N,n}\|_p^p \le \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^{Np}} 2^{ap(N+1)} 2^N A^{-N} \|\omega\|_p^p$$

et $x^a f \in L^p$ dès que $2^{ap-p+1} < A$.

Pour le calcul de $\|\xi^b \hat f\|_q$, on remarque que

$$\hat f(\xi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(2A)^N} P_N(e^{-2i\pi\xi}) e^{-2i\pi 2^N \xi} \hat\omega(\xi/A^N)$$

et donc que

$$|\xi|^b |\hat f(\omega)| \le 2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2A})^N} A^{Nb} (|\xi|/A^N)^b |\hat\omega(\xi/A^N)| .$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|\xi^b \hat f\|_q^q &\le 2^q \int \Big(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2A})^{Nq}} A^{Nbq} (|\xi|/A^N)^b |\hat\omega(\xi/A^N)|\Big) \\ &\quad \times \Big(\sum_{N=0}^{\infty} (|\xi|/A^N)^b |\hat\omega(\xi/A^N)|\Big)^{q/q'} d\xi \\ &\le C_A \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2A})^{Nq}} A^{Nbq} A^N\end{aligned}$$

et $\xi^b \hat f \in L^q$ dès que $A^{bq-q+1} < \sqrt{2}^{\,q}$.

On peut alors choisir A vérifiant $2^{ap-p+1} < A$ et $A^{bq-q+1} < \sqrt{2}^{\,q}$ si et seulement si $(ap - p + 1)(bq - q + 1) < \frac12 q$, ou encore $(a - 1/p')(b - 1/q') < 1/(2p)$.

RÉSULTAT 4. *Si* $q > 2$ *et si* $1/(pq) < (a - 1/p')(b - 1/q') < 1/(2p)$, *alors il existe* f *telle que* $x^a f \in L^p$, $\xi^b \hat f \in L^q$ *et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)| = \infty$.

VI. Conclusion. En réunissant les résultats 1 à 4, nous voyons que nous avons obtenu un critère presque optimal de validité pour la formule sommatoire de Poisson à l'aide d'hypothèses de taille sur f et $\hat f$.

THÉORÈME. *Soient* $p, q \in [1,\infty]$, $1/p' = 1 - 1/p$, $1/q' = 1 - 1/q$, *et soient* $a > 1/p'$ *et* $b > 1/q'$.

(i) *Si* $(a - 1/p')(b - 1/q') < 1/(pq)$, *il existe* f *continue telle que* $x^a f \in L^p$, *donc* $f \in L^1$, $\xi^b \hat f \in L^q$, *donc* $\hat f \in L^1$, *et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \ne \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)$.

(ii) *Si par contre* $(a - 1/p')(b - 1/q') > 1/(pq)$ *alors pour toute fonction* f *continue vérifiant* $x^a f \in L^p$, $\xi^b \hat f \in L^q$, *on a* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)$, *les deux séries étant simplement convergentes (au sens de l'existence de la limite des sommes* $\sum_{-M}^{N}$ *quand* $M, N \to \infty$*).*

(iii) *Si* $q > 2$ *et si* $1/(pq) < (a - 1/p')(b - 1/q') < 1/(2p)$ *alors il existe une fonction* f *continue vérifiant* $x^a f \in L^p$, $\xi^b \hat f \in L^q$ *et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)| = \infty$.

(iv) *Si par contre* $(a - 1/p')(b - 1/q') > \max(1/(2p), 1/(pq))$ *alors toute fonction* f *continue vérifiant* $x^a f \in L^p$, $\xi^b \hat f \in L^q$ *vérifie* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)| < \infty$.

Références

[1] N. Bourbaki, *Théories spectrales*, chapitre II, Hermann, Paris, 1967.

[2] Y. Katznelson, *Une remarque concernant la formule de Poisson*, Studia Math. 19 (1967), 107–108.

[3] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, 1968.
[4] N. Wiener, *The Fourier Integral*, Cambridge University Press, 1933.
[5] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1959.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Received November 17, 1993 (3195)