QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES DANS $\mathbb{R}^3$

Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET
Département de Mathématiques
Université d'Evry
Bd des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France
e-mail: lemarie@lami.univ-evry.fr

Résumé: Nous présentons un résultat d'existence globale de solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$ pour des données initiales d'énergie infinie.

Abstract: We present a recent result on existence of global weak solutions for the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^3$ when the initial data have non-finite energy.

Depuis 1995, je travaille sur les solutions faibles et les solutions milds des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$, dans la ligne des travaux récents de M. Cannone [CAN] et de F. Planchon [PLA]. En 1997, j'ai obtenu les résultats suivants: l'unicité des solutions milds dans $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ (en collaboration avec mes étudiantes G. Furioli et E. Terraneo [FLT 1], [FLT 2]) et l'existence globale de solutions faibles pour des données initiales dans L^p pour $p \in [2,\infty[$ [LEM 1]. Dans cet exposé, je développerai ce dernier point.

Rappelons que les équations de Navier-Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ décrivant l'évolution de la vitesse d'un fluide newtonien incompressible, homogène et visqueux $\vec{u}(t,x), t \in]0,T[, x \in \mathbb{R}^3$, sont données en l'absence de force extérieure par le système

$$\rho\, \partial_t \vec{u} = \mu\, \Delta \vec{u} - \rho\, \vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla}\varpi \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \tag{2}$$

ρ est la *densité* (constante) du fluide et μ est le *coefficient de viscosité*; nous supposerons ici (sans perte de généralité) que ces deux constantes sont égales à 1: $\rho = \mu = 1$. ϖ est la *pression* (inconnue), dont le rôle est de maintenir la divergence de $\vec{u}$ égale à 0 (cette condition de *divergence nulle* exprimant l'incompressibilité du fluide).

Le théorème sur les solutions faibles à donnée initiale L^p est alors le suivant:

Théorème A : Si $p \in [2,+\infty[$, si $\vec{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)^3$ et si $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$ alors il existe une solution faible $\vec{u}$ sur $]0,+\infty[$ des équations de Navier-Stokes avec $\vec{u}_0$ pour donnée initiale:
a) $\vec{u}$ et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ sont localement de carré intégrable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$
b) $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$
c) $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$ $\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}.\vec{\nabla})\, \vec{u} - \vec{\nabla}\varpi$
d) $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ $\lim_{t\to 0^+} < \vec{u}(t,.) \mid \vec{\phi} > = < \vec{u}_0 \mid \vec{\phi} >$

On peut de plus imposer à $\vec{u}$ de satisfaire les conditions de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [CKN]: pour tout compact K de $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ on a:
e) $\sup_{t>0} \int_{(t,x)\in K} |\vec{u}|^2\, dx < \infty$
f) $\int\int_K |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2\, dx\, dt < \infty$
g) $\int\int_K |\varpi|^{5/3}\, dx\, dt < \infty$

h) pour toute $\phi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$ et $Supp\ \phi \subset K$, on a

$$2\int\int_K |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\ \phi(t,x)\ dx\ dt < \int\int_K |\vec{u}|^2\ (\partial_t\phi + \Delta\phi)\ dx\ dt + \int\int_K (|\vec{u}|^2 + 2\varpi)(\vec{u}.\vec{\nabla})\phi\ \ dx\ dt$$

Les résultats d'existence globale connus concernaient les cas $\vec{u}_0 \in (L^2)^3$ (donnée initiale d'énergie finie) (théorème de Leray [LER], 1934, avec une solution $\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[,(L^2)^3))$ et $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$ avec $\|\vec{u}_0\|_3$ assez petite (théorème de Kato [KAT], 1984, avec une solution $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,\infty[,(L^3)^3))$. Le résultat que nous présentons est en fait une résultante de ces deux théorèmes.

1. Solutions faibles des équations de Navier-Stokes

Nous allons maintenant préciser le sens de solution faible ou de solution mild que nous entendons utiliser lors de cet exposé.

Définition 1: [Solutions faibles et solutions milds]

A) Une *solution faible* des équations de Navier-Stokes sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ est une distribution vectorielle $\vec{u} \in (L^2_{loc}(]0,T^*[\times\mathbb{R}^3))^3$ qui vérifie:
a) $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$
b) $\exists\varpi \in \mathcal{D}'(]0,T^*[\times\mathbb{R}^3)\ \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}\varpi$

B) Une *solution mild* des équations de Navier-Stokes sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ de donnée initiale $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))^3$, $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$, est une distribution vectorielle $\vec{u} \in (\mathcal{D}'((0,T^*)\times\mathbb{R}^3)^3$ telle que:
a) $\vec{u} \in \cap_{T<T^*} L^2((0,T),(L^2_{uloc})^3)$
b) $\vec{u} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t(\vec{\nabla}\otimes O_{t-s}) * (\vec{u}\otimes\vec{u})\ ds$
où O_t est le *noyau d'Oseen* [OSE], [LER] $O_t = (Id - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla})e^{t\Delta} = \left((\delta_{j,k} - \frac{1}{\Delta}\partial_j\partial_k)e^{t\Delta}\right)_{1\leq j\leq 3, 1\leq k\leq 3}$.
Une solution mild est dite *régulière* si $\vec{u} \in \cap_{T<T^*} L^q((0,T),(L^2_{uloc})^3)$ pour un $q > 2$ et si de plus $\vec{u} \in \cap_{0<t<T<T^*} L^\infty([t,T],(L^\infty(\mathbb{R}^3))^3)$ et $\lim_{t\to 0}\sqrt{t}\|\vec{u}\|_\infty = 0$.

Rappelons que L^2_{uloc} est l'espace des fonctions uniformément localement de carré intégrable: $f \in L^2_{uloc}$ si et seulement si: $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{|y-x|\leq 1}|f(y)|^2\ dy\ < +\infty$.

Le noyau O_t est une matrice de convoluteurs $(O_{j,k,t}(x) = \frac{1}{t^{3/2}}O_{j,k}(\frac{x}{\sqrt{t}})\ )_{1\leq j,k\leq 3}$ et $(\vec{\nabla}\otimes O_{t-s}) * (\vec{u}\otimes\vec{u})$ est une notation pour $(\sum_i\sum_k \partial_i\{O_{j,k,t-s}\} * \{u_i(s)u_k(s)\})_{1\leq j\leq 3}$. Le noyau $\partial_i O_{j,k}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^3$ de sorte que $\|(\vec{\nabla}\otimes O_{t-s}) * (\vec{u}\otimes\vec{u})\|_{L^1_{uloc}} \leq C\frac{1}{\sqrt{t-s}}\|u\|^2_{L^2_{uloc}}$. Mais par ailleurs $L^1_{uloc}(\mathbb{R}^3) \subset B^{-3,\infty}_\infty$, et $\frac{1}{\Delta}\partial_i\partial_j\partial_k$ est continu de $B^{-3,\infty}_\infty$ dans $B^{-4,\infty}_\infty$ d'où $\|(\vec{\nabla}\otimes O_{t-s}) * (\vec{u}\otimes\vec{u})\|_{B^{-4,\infty}_\infty} \leq C\|u\|^2_{L^2_{uloc}}$; cette dernière estimation s'intègre de sorte que l'expression sous forme d'équation intégrale a bien un sens.

Il est facile de vérifier qu'à une donnée initiale $\vec{u}_0$ il correspond au plus une solution mild régulière ([LEM 2] pour le cas $q = \infty$). De même, il est facile de voir qu'une solution mild des équations de Navier-Stokes en est une solution faible [FLT 2] et qu'elle appartient à $\mathcal{C}([0,T^*[,(B^{-4,\infty}_\infty)^3)$; la réciproque est vraie pour une solution faible $\vec{u} \in \cap_{T<T^*} L^2((0,T),(L^2_{uloc})^3)$ si l'on rajoute une condition d'annulation à l'infini qui permet de contrôler ϖ à l'aide de $\Delta\varpi = -\sum_k\sum_l \partial_k u_l\ \partial_l u_k$:

Définition 2: L'espace E_2 des fonctions uniformément localement de carré intégrable et nulles à l'infini est défini par: $f \in E_2$ si et seulement si:
a) $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{|y-x|\leq 1}|f(y)|^2\ dy\ < +\infty$
b) $\lim_{x\to\infty}\int_{|y-x|\leq 1}|f(y)|^2\ dy\ = 0$

Il est normé par:

$$||f||_{E_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\int_{|y-x|\leq 1} |f(y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque : E_2 est l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans L^2_{uloc}.

Proposition1 [FLT 2]

Si $\vec{u} \in \cap_{T<T^*} L^2((0,T),(E_2)^3)$, alors $\vec{u}$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle en est une solution mild.

Nous ne considèrerons que des solutions dans $\cap_{T<T^*} L^2((0,T),(E_2)^3)$; c'est une classe assez générale pour contenir les solutions faibles de Leray [LER] ($\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,\infty[,(\dot{H}^1)^3))$, les solutions milds de Kato [KAT] ($\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T^*[,(L^p)^3)$, où $3 \leq p < \infty$), mais également les solutions auto-similaires de Cannone [CAN] ($t^{1/2-3/2p}\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[,(L^p)^3$, où $3 < p < \infty$) et celles de Meyer [MEY] ($\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[,(L^{3,\infty})^3)$.

2. Solutions *milds* des équations de Navier-Stokes

Le formalisme des solutions *milds* de Kato [KAT] permet facilement d'établir le résultat suivant:

Proposition2: (Solutions *milds* dans L^p)

A) Pour $p \in [3,\infty[$, $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$ tel que $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$ il existe un temps $T^* > 0$ et une application $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T^*[,(L^p)^3)$ tels que:

a) $\vec{u}$ et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ sont localement de carré intégrable sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$

b) $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$

c) $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0,T^*[\times\mathbb{R}^3)$ $\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}.\vec{\nabla})\,\vec{u} - \vec{\nabla}\varpi$

d) $\vec{u}(0,.) = \vec{u}_0$

e) pour tout $T < T^*$ on a: $\sup_{0<t<T} \|\vec{u}\|_p + \sqrt{t}\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_p + \sqrt{t}\|\vec{u}\|_\infty \ < +\infty$

f) $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}||\vec{u}||_\infty \ = 0$

B) Pour tous $T_0 \in]0,\infty[$ et $p \in]3,\infty[$ il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si la donnée initiale $\vec{u}_0$ du point A) vérifie $\|\vec{u}_0\|_p < \epsilon_0$ alors le temps d'existence T^* de la solution $\vec{u}$ est supérieur à T_0.

C) Pour $p = 3$ il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si la donnée initiale $\vec{u}_0$ du point A) vérifie $\|\vec{u}_0\|_3 < \epsilon_1$ alors le temps d'existence T^* de la solution $\vec{u}$ vaut $+\infty$ et $\vec{u}$ vérifie:

$$\sup_{t>0} ||\vec{u}||_3 + \sqrt{t}||\vec{\nabla} \otimes \vec{u}||_3 + \sqrt{t}||\vec{u}||_\infty \ < +\infty$$

Rappelons brièvement le principe de la preuve. On cherche la solution $\vec{u}$ comme point fixe de la transformation $\vec{v} \to e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t (\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{v} \otimes \vec{v})\, ds$. Pour $p \geq 3$, on a $L^p \subset B_\infty^{-1,\infty}$ et donc pour tout $T \in]0,\infty[$ si $p \neq 3$ et $T = \infty$ si $p = 3$ on a $\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\ \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_\infty \leq C_{T,p}\|\vec{u}_0\|_p$. On pose alors $E_T = \{\vec{v} \in \mathcal{C}([0,T],(L^p)^3) \ / \ \sup_{0<t<T} \|\vec{v}\|_p + \sqrt{t}\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}\|_p + \sqrt{t}\|\vec{v}\|_\infty \ < +\infty,\ \lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\|\vec{v}\|_\infty \ = 0\}$; on sait que $e^{t\Delta}\vec{u}_0 \in E_T$; on vérifie facilement que l'opérateur bilinéaire $B(\vec{v},\vec{w})(t) = \int_0^t (\vec{\nabla} \otimes O_{t-s}) * (\vec{v} \otimes \vec{w})\, ds$ est continu de $E_T \times E_T$ dans E_T. Plus précisément, on a:

$$\|(B(\vec{v},\vec{v}) - B(\vec{w},\vec{w}))(t,x)\|_{L^p(dx)} \leq C_0 \sup_{0<s<t} \|\vec{v} - \vec{w}\|_p \sup_{0<s<t} \sqrt{s}(\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

$$\sqrt{t}\ \|(\vec{\nabla}\otimes B(\vec{v},\vec{v}) - \vec{\nabla}\otimes B(\vec{w},\vec{w}))(t,x)\|_{L^p(dx)} \leq C_1 \sup_{0<s<t} (\|\vec{v}-\vec{w}\|_p + \sqrt{s}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{v} - \vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_p) \sup_{0<s<t} \sqrt{s}(\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

$$\|(B(\vec{v},\vec{v}) - B(\vec{w},\vec{w}))(t,x)\|_{L^\infty(dx)} \leq C_2 (\sup_{0<s<t} \|\vec{v} - \vec{w}\|_p)^{1/2} \ (\sup_{0<s<t} \sqrt{s}\|\vec{v} - \vec{w}\|_\infty)^{1/2} \sup_{0<s<t} \sqrt{s}(\|\vec{v}\|_\infty + \|\vec{w}\|_\infty)$$

Il suffit alors de fixer $R_0 > \max(\|\vec{u}_0\|_p, \sup_{t>0} \sqrt{t}\ \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_p)$, $\epsilon_0 > 0$ tel que $(C_0 + C_1 + C_2)\epsilon_0 < 1$, $2C_0\epsilon_0 < 1$, $4C_1\epsilon_0 < 1$ et $2C_2^2 R_0\epsilon_0 < 1$, et enfin T tel que $\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_\infty < \epsilon_0$ pour obtenir que l'application $\vec{v} \to e^{t\Delta}\vec{u}_0 - B(\vec{v}, \vec{v})$ laisse invariant le sous-ensemble fermé F_T de E_T défini par $F_T = \{\vec{v} \in E_T/\ \sup_{0<t<T} \|\vec{v}\|_p \leq 2R_0,\ \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\ \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}\|_p \leq 2R_0,\ \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\ \|\vec{v}\|_\infty \leq \epsilon_0\}$ et qu'elle y est contractante. La démonstration est alors achevée.

3. Le cas $2 \leq p \leq 3$.

C'est le cas le plus simple. Si $2 \leq p \leq 3$ et $\vec{u}_0 \in (L^p)^3, \vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$, il est facile de décomposer $\vec{u}_0$ en $\vec{v}_0 + \vec{w}_0$ où $\vec{\nabla}.\vec{v}_0 = \vec{\nabla}.\vec{w}_0 = 0$, $\vec{v}_0 \in (L^2)^3$, $\vec{w}_0 \in (L^3)^3$ et $\|\vec{w}_0\|_3 < \epsilon_1$ (où ϵ_1 est la constante de la proposition 2). Il suffit de décomposer L^p sur L^2 et L^3 sur chaque composante de $\vec{u}_0$ indépendamment des autres composantes, puis de projeter cette décomposition sur les champs de vecteur à divergence nulle, ce projecteur étant continu sur $(L^2)^3$ et $(L^3)^3$. On cherche alors la solution $\vec{u}$ en la décomposant en $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ où:
a) $\vec{w}$ est une solution mild globale des équations de Navier-Stokes avec $\vec{w}_0$ pour donnée initiale (une telle solution existe d'après le théorème de Kato (Proposition 2)):
- $\vec{w} \in \mathcal{C}([0, \infty[, (L^3)^3)$
- $\sup_{t>0} \|\vec{w}\|_3 + \sqrt{t}\|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_3 + \sqrt{t}\|\vec{w}\|_\infty \leq C_4\|\vec{w}_0\|_3$
- $\vec{\nabla}.\vec{w} = 0$
- $\exists \varpi_1 \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)\ \partial_t\vec{w} = \Delta\vec{w} - (\vec{w}.\vec{\nabla})\ \vec{w} - \vec{\nabla}\varpi_1$
- $\vec{w}(0, .) = \vec{w}_0$

b) $\vec{v}$ est une solution faible globale d'équations de Navier-Stokes perturbées avec $\vec{v}_0$ pour donnée initiale (une telle solution sera construite par la méthode de Leray):
- $\vec{v} \in L^\infty(]0, \infty[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, \infty[, (\dot{H}^1)^3)$
- $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$
- $\exists \varpi_2 \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)\ \partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{v}.\vec{\nabla})\ \vec{v} - (\vec{w}.\vec{\nabla})\ \vec{v} - (\vec{v}.\vec{\nabla})\ \vec{w} - \vec{\nabla}\varpi_2$
- $\lim_{t\to 0^+} \|\vec{v} - \vec{v}_0\|_2 = 0$

Comment construit-on $\vec{v}$ et quelles en sont les propriétés? Il suffit de se rapporter à l'article fondateur de Jean Leray [LER]. On commence par atténuer la non-linéarité de l'équation en remplaçant les termes de la forme $(\vec{\alpha}.\vec{\nabla})\vec{\beta}$ par des versions adoucies $(\{\vec{\alpha} * \omega_\epsilon\}.\vec{\nabla})\vec{\beta}$ ou $(\vec{\alpha}.\vec{\nabla})\{\vec{\beta} * \omega_\epsilon\}$ où $\omega_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3}\omega(\frac{x}{\epsilon})$ avec $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \int \omega(x)\ dx = 1$. On définit donc $\vec{v}_\epsilon \in \mathcal{C}([0, \infty[, (L^2)^3)$ comme la solution du système:

$$(3_\epsilon) \qquad \vec{\nabla}.\vec{v}_\epsilon = 0$$

$$(4_\epsilon) \quad \exists \varpi_\epsilon \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)\ \partial_t\vec{v_\epsilon} = \Delta\vec{v_\epsilon} - (\{\vec{v}_\epsilon * \omega_\epsilon\}.\vec{\nabla})\ \vec{v}_\epsilon - (\{\vec{w} * \omega_\epsilon\}.\vec{\nabla})\ \vec{v}_\epsilon - (\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla})\ \{\vec{w} * \omega_\epsilon\} - \vec{\nabla}\varpi_\epsilon$$

$$(5_\epsilon) \qquad \vec{v}_\epsilon(0, .) = \vec{v}_0 * \omega_\epsilon$$

Le problème (3_ϵ) et (4_ϵ) est bien posé dans L^2: pour une donnée initiale L^2, on trouve d'abord une solution $\mathcal{C}([0, T], (L^2)^3)$ pour un $T > 0$; cette solution est de plus $L^2(]0, T[, (H^1)^3)$ puisque $\partial_t\vec{v}_\epsilon - \Delta\vec{v}_\epsilon \in L^2(]0, T[, (H^{-1})^3)$; cela donne $\vec{v}_\epsilon \in L^2(]0, T[, (H^1)^3)$ et $\partial_t\vec{v}_\epsilon \in L^2(]0, T[, (H^{-1})^3)$, d'où:

$$\partial_t\|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 = 2\langle\partial_t\vec{v}_\epsilon|\vec{v}_\epsilon\rangle_{L^2(dx)} = -2\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + 2\langle\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon|\vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\}\rangle_{L^2(dx)}$$

Or on a

$$|\ \langle\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon|\vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\}\rangle_{L^2(dx)}\ | \leq C\|\vec{v}_\epsilon\|_6\ \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2\ \|\vec{w}\|_3 \leq C'\ \epsilon_1\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2$$

C et C' ne dépendent ni de ϵ, ni de $\vec{w}$ ou de $\vec{v}_\epsilon$ (ni de T) et l'on peut choisir ϵ_1 assez petit pour obtenir $\partial_t\|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 \leq 0$. Cela assure que la norme L^2 de $\vec{v}_\epsilon$ n'explose pas, puisque $\|\vec{v}_\epsilon(t, .)\|_2 \leq \|\vec{v}_\epsilon(0, .)\|_2$.On obtient finalement que $\vec{v}_\epsilon$ est défini en tout temps et que $\vec{v}_\epsilon \in L^\infty(]0, \infty[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, \infty[, (\dot{H}^1)^3)$. Le choix d'une donnée initiale régulière dans (5_ϵ) assure de plus que $\vec{v}_\epsilon$ est en fait une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^3$.

Les fonctions $\vec{v}_\epsilon$, $0<\epsilon\leq 1$, vérifient:
a) $\sup_{0<\epsilon\leq 1}\|\vec{v}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3,dx)}<\infty$
b) $\sup_{0<\epsilon\leq 1}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3,dt\ dx)}<\infty$
et donc
c) $\sup_{0<\epsilon\leq 1}\|(Id-\Delta)^{1/2}\vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3,dt\ dx)}<\infty$

d) $\sup_{0<\epsilon\leq 1}\|(Id-\Delta)^{-3/4}\partial_t\vec{v}_\epsilon\|_{L^2(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3,dt\ dx)}<\infty$

Cela entraî ne que la famille $\vec{v}_\epsilon, 0<\epsilon\leq 1$, est bornée dans $H^{2/5}_{loc}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3)$ et qu'on peut donc en extraire une suite $(\vec{v}_{\epsilon_n})$ (avec $\epsilon_n\to 0$) qui converge en norme L^2 sur tout compact de $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on a:
e) $\forall T>0\quad \lim_{R\to\infty}\sup_{0<t<T}\sup_{0<\epsilon\leq 1}\int_{|x|>R}|\vec{v}_\epsilon|^2\ dx=0$
Finalement, la limite $\vec{v}$ de la suite $\vec{v}_{\epsilon_n}$ est dans $L^\infty((L^2)^3)$ et on a pour presque tout $t>0$ $\lim_{\epsilon_n\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{v}_{\epsilon_n}-\vec{v}|^2\ dx=0$. On en conclut que $\vec{v}_{\epsilon_n}$ converge vers $\vec{v}$ fortement dans $L^2_{loc}((L^2)^3)$ et faiblement dans $L^2_{loc}((H^1)^3)$. $\vec{v}$ est alors bien solution du système de Navier-Stokes perturbé et il est facile de vérifier que $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$ vérifie les conditions de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En effet, on a pour tout $\phi\in\mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3)$ et en notant $\vec{w}_{(\epsilon)}=\vec{w}*\omega_\epsilon$ et $\vec{v}_{(\epsilon)}=\vec{v}_\epsilon*\omega_\epsilon$:

$$2\int\int|\vec{\nabla}\otimes(\vec{v}_\epsilon+\vec{w})|^2\ \phi(t,x)\ dx\ dt=$$

$$\int\int|\vec{v}_\epsilon+\vec{w}|^2(\partial_t\phi+\Delta\phi)\ dx\ dt+\int\int(|\vec{v}_\epsilon+\vec{w}|^2+2\varpi_1+2\varpi_\epsilon)(\vec{v}_\epsilon+\vec{w}).\vec{\nabla}\phi\ dx\ dt$$

$$+\int\int\{\vec{v}_\epsilon.(\vec{v}_\epsilon+\vec{w})\}\{(\vec{w}_{(\epsilon)}-\vec{w}+\vec{v}_{(\epsilon)}-\vec{v}_\epsilon).\vec{\nabla}\phi\}\ dx\ dt+\int\int(\vec{w}_{(\epsilon)}-\vec{w}).(\vec{v}_\epsilon+\vec{w})\ (\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla}\phi)\ dx\ dt$$

$$+\int\int(\vec{v}_\epsilon.\{(\vec{w}_{(\epsilon)}-\vec{w}).\vec{\nabla}\ \vec{w}\}+\vec{w}.\{(\vec{w}-\vec{w}_{(\epsilon)}).\vec{\nabla}\ \vec{v}_\epsilon\}+\vec{w}_{(\epsilon)}.\{\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla}\ \vec{w}\}-\vec{w}.\{\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla}\ \vec{w}_{(\epsilon)}\})\ \phi\ dx\ dt$$

$$+\int\int(\vec{v}_\epsilon.\{\vec{v}_{(\epsilon)}.\vec{\nabla}\ \vec{w}\}-\vec{v}_\epsilon.\{\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla}\ \vec{w}_{(\epsilon)}\}+\vec{w}_{(\epsilon)}.\{\vec{v}_\epsilon.\vec{\nabla}\ \vec{v}_\epsilon\}-\vec{w}.\{\vec{v}_{(\epsilon)}.\vec{\nabla}\ \vec{v}_\epsilon\})\ \phi\ dx\ dt$$

Quand ϵ_n tend vers 0, le membre de droite de cette égalité converge vers $\int\int|\vec{u}|^2(\partial_t\phi+\Delta\phi)\ dx\ dt+$ $\int\int(|\vec{u}|^2+2\varpi)\ \vec{u}.\vec{\nabla}\phi\ dx\ dt$. Le membre de gauche ne converge pas; mais si $\phi\geq 0$, on a

$$\int\int|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\ \phi(t,x)\ dx\ dt\leq\liminf_{\epsilon_n\to 0}\int\int|\vec{\nabla}\otimes(\vec{v}_{\epsilon_n}+\vec{w})|^2\ \phi(t,x)\ dx\ dt$$

Le théorème est alors démontré pour $p\in[2,3]$.

4. Le cas $p>3$: A) Résolution sur un intervalle de longueur 2.

Si $p>3$ et $\vec{u}_0\in(L^p)^3,\vec{\nabla}.\vec{u}_0=0$, on décompose $\vec{u}_0$ en $\vec{v}_0+\vec{w}_0$ où $\vec{\nabla}.\vec{v}_0=\vec{\nabla}.\vec{w}_0=0$, $\vec{v}_0\in(L^2)^3$, $\vec{w}_0\in(L^p)^3$ et $\|\vec{w}_0\|_3<\epsilon_0$ (où ϵ_0 est la constante de la proposition 2 associée à $T_0=2$). Il suffit encore de décomposer L^p sur L^2 et L^p avec petite norme sur chaque composante de $\vec{u}_0$ indépendamment des autres composantes, puis de projeter cette décomposition sur les champs de vecteur à divergence nulle, ce projecteur étant continu sur $(L^2)^3$ et $(L^p)^3$. On cherche alors la solution $\vec{u}$ en la décomposant en $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ où:
a) $\vec{w}$ est une solution mild des équations de Navier-Stokes sur $]0,2[\times\mathbb{R}^3$ avec $\vec{w}_0$ pour donnée initiale:
- $\vec{w}\in\mathcal{C}([0,2],(L^p)^3)$
- $\sup_{t>0}\|\vec{w}\|_p+\sqrt{t}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_p+\sqrt{t}\|\vec{w}\|_\infty\leq C_4\|\vec{w}_0\|_p$
- $\vec{\nabla}.\vec{w}=0$
- $\exists\varpi_1\in\mathcal{D}'(]0,2[\times\mathbb{R}^3)\ \partial_t\vec{w}=\Delta\vec{w}-(\vec{w}.\vec{\nabla})\ \vec{w}-\vec{\nabla}\varpi_1$
- $\vec{w}(0,.)=\vec{w}_0$

b) $\vec{v}$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes perturbées avec v_0 pour donnée initiale (construite par la méthode de Leray):

- $\vec{v} \in L^\infty(]0,2[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,2[,(H^1)^3)$
- $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$
- $\exists \varpi_2 \in \mathcal{D}'(]0,2[\times \mathbb{R}^3)\ \partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v}.\vec{\nabla})\ \vec{v} - (\vec{w}.\vec{\nabla})\ \vec{v} - (\vec{v}.\vec{\nabla})\ \vec{w} - \vec{\nabla}\varpi_2$
- $\lim_{t\to 0^+} \|\vec{v} - \vec{v}_0\|_2 = 0$

La construction de $\vec{v}$ se fait à nouveau par la méthode de Leray. On introduit à nouveau le problème (3_ϵ), (4_ϵ) et (5_ϵ) sur $]0,2[\times \mathbb{R}^3$. Le problème reste bien posé dans L^2 et fournit une solution $\mathcal{C}([0,T],(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ pour un $T > 0$; cette solution vérifie

$$\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 = 2\langle \partial_t \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \rangle_{L^2(dx)} = -2\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + 2\langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\}\rangle_{L^2(dx)}$$

Or on a pour $1/q + 1/p + 1/2 = 1$ et $1/q = \alpha/2 + (1-\alpha)/6$

$$|\ \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon | \vec{v}_\epsilon \otimes \{\vec{w} * \omega_\epsilon\}\rangle_{L^2(dx)}\ | \leq C\|\vec{v}_\epsilon\|_q\ \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2\ \|\vec{w}\|_p \leq C'\ \epsilon_0 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^{2-\alpha}\ \|\vec{v}\|_2^\alpha \leq C''\ \epsilon_0(\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2)$$

C, C' et C'' ne dépendent ni de ϵ, ni de $\vec{w}$ ou de $\vec{v}_\epsilon$ (ni de T) et l'on peut choisir ϵ_0 assez petit pour obtenir $\partial_t \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + C''\epsilon_0 \|\vec{v}_\epsilon\|_2^2 + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\epsilon\|_2^2 \leq 0$. Cela assure que la norme L^2 de $\vec{v}_\epsilon$ n'explose pas, puisque $\|\vec{v}_\epsilon(t,.)\|_2^2 \leq e^{C''\epsilon_0 t}\|\vec{v}_\epsilon(0,.)\|_2^2$.On obtient finalement que $\vec{v}_\epsilon$ est défini sur $[0,2[$ et que $\vec{v}_\epsilon \in L^\infty(]0,2[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,2[,(H^1)^3)$. Le choix d'une donnée initiale régulière dans (5_ϵ) assure de plus que $\vec{v}_\epsilon$ est en fait une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,2[\times \mathbb{R}^3$.

On extrait ensuite de cette famille $\vec{v}_\epsilon$ une suite convergeant vers une solution du système de Navier-Stokes perturbé et conduisant ainsi à une solution de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sur$]0,2[\times \mathbb{R}^3$. Le problème est alors d'étendre cette solution en tout temps.

5. Le cas $p > 3$: B) Résultats d'unicité et de régularité.

A priori, étendre la solution au delà de $t = 2$ ne pose pas de problème: puisque $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v}(t,.) \in (L^2)^3$ et $\vec{w}(t,.) \in (L^p)^3$, il suffit à un instant t_0 de redécomposer $\vec{u}(t_0,.)$ en $\vec{V} + \vec{W}$ où $\vec{\nabla}.\vec{V} = \vec{\nabla}W = 0, \vec{V} \in (L^2)^3, \vec{W} \in (L^p)^3, \|\vec{W}\|_p < \epsilon_0$ pour disposer d'une solution sur $]t_0, t_0+2[$. Le problème cependant est de conserver les propriétés de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, c'est-à dire l'inégalité d'énergie locale contrôlant $\int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi(t,x)\ dt\ dx$. Pour cela, il ne suffit pas d'avoir une telle solution sur $[0,t_0]$ et sur $[t_0, t_0+2]$ car il y aurait un problème de recollement en t_0. Il s'agit de montrer le résultat suivant: si $\vec{u}$ est la solution construite sur $[0,2[\times \mathbb{R}^3$ dans la section précédente, il existe $t_0 \in [1,2[$, une solution $\vec{U}$ sur $[t_0, t_0+2[\times \mathbb{R}^3$ ayant pour donnée initiale $\vec{u}(t_0,.)$ et un nombre $\eta > 0$ tel que $\vec{u} = \vec{U}$ sur $]t_0, t_0+\eta[\times \mathbb{R}^3$. On construira alors par récurrence une suite t_n croissante avec $t_n + 1 \leq t_{n+1} < t_n + 2$ et des solutions (régulières au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg) $\vec{u}^{(n)}$ sur $]t_n, t_n+2[\times \mathbb{R}^3$ telles que pour une certaine suite η_n de nombres strictement positifs $\vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{(n+1)}$ sur $]t_{n+1}, t_{n+1}+\eta_n[\times \mathbb{R}^3$ et on conclura par une partition de l'unité (avec des bosses positives...) adaptée aux intervalles $]t_n, t_{n+1}+\eta_n[$. Il s'agit donc de choisir t_0. Il est facile de voir que $\vec{v}$ (et donc $\vec{u}$) est presque partout L^p (en fait $\vec{v} \in L^1(]0,2[,(L^\infty)^3)$); on choisit alors t_0 tel que $\vec{v}(t_0) \in (L^p)^3$ et $\lim_{t\to t_0^+} \|\vec{v} - \vec{v}(t_0)\|_2 = 0$ (ce qui est également vrai presque partout, à cause de l'inégalité d'énergie). En appliquant la méthode de Leray perturbée et celle de Kato à $\vec{u}(t_0)$, on dispose donc de trois solutions de Navier-Stokes sur $]t_0, t_0+\theta[\times \mathbb{R}^3$ pour un $\theta > 0$:

* $\vec{u}$ définie sur $]0,2[\times \mathbb{R}^3$ construite par la méthode de Leray perturbée: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ où $\vec{w} \in \mathcal{C}([0,2],(L^p)^3)$ et $\vec{v} \in L^\infty(]0,2[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,2[,(H^1)^3)$;

* $\vec{U}$ définie sur $]t_0, t_0+2[\times \mathbb{R}^3$ construite par la méthode de Leray perturbée: $\vec{U} = \vec{V} + \vec{W}$ où $\vec{W} \in \mathcal{C}([t_0, t_0+2],(L^p)^3)$ et $\vec{V} \in L^\infty(]t_0, t_0+2[,(L^2)^3) \cap L^2(]t_0, t_0+2[,(H^1)^3)$;

* $\vec{y}$ définie sur $]t_0, t_0+\theta[\times \mathbb{R}^3$ construite par la méthode de Kato: $\vec{y} \in \mathcal{C}([t_0, t_0+\theta],(L^p)^3)$.

$\vec{u}$, $\vec{U}$ et $\vec{y}$ coï ncident en $t = t_0$. Il est facile de vérifier que $\vec{y}$ est $L^\infty((L^2)^3)$ et $L^2((H^1)^3)$. Par ailleurs, $\vec{y} - \vec{w}$ est solution de la même équation de Navier-Stokes perturbée que $\vec{u} - \vec{w}$ sur $]t_0, t_0 + \theta[\times \mathbb{R}^3$, les deux solutions coï ncident en t_0 et vérifient toutes deux la même inégalité d'énergie

$$\|\vec{u} - \vec{w}\|_2^2 + 2\int_{t_0}^{t} \|\vec{\nabla} \otimes (\vec{u} - \vec{w})\|_2^2 \, ds \leq \|\vec{u}(t_0) - \vec{w}(t_0)\|_2^2 + 2\int_{t_0}^{t} \langle (\vec{u} - \vec{w}).\vec{\nabla} \ (\vec{u} - \vec{w}) | \vec{w} \rangle \, ds$$

(et pareil pour $\vec{y} - \vec{w}$). De plus $\vec{y} - \vec{w} \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \theta], (L^p)^3)$. Le théorème d'unicité de Serrin [WAH] permet alors de conclure que $\vec{u} = \vec{y}$. On raisonne de même avec $\vec{y} - \vec{W}$ et $\vec{U} - \vec{W}$. Cela termine la démonstration.

6. Généralisations.

Le théorème A se généralise à d'autres données initiales que L^p [LEM 1]. Bien évidemment, on peut par exemple considérer le cas d'une donnée $L^p + L^2$. Mais on peut considérer d'autres espaces $L^2 + X$ où une donnée dans X permet de trouver une solution mild qui interagisse avec les fonctions dans $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$ pour pouvoir imiter la méthode L^p. Il y a beaucoup d'exemples d'espaces X possibles, y compris des espaces de distributions singulières. Nous traiterons ici d'un exemple simple.

Théorème B:[Solutions localement L^3]
Si $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$ et si $\vec{u}_0$ est localement L^3 et vérifie pour un $\eta > 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \int_{|x-y| \leq 1} |\vec{u}_0(y)|^3 \, dy = 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int |\vec{u}_0(y)| \frac{1}{(1 + |x - y|)^{3-\eta}} \, dy < \infty$$

alors il existe une solution faible $\vec{u}$ sur $]0, +\infty[$ des équations de Navier-Stokes avec $\vec{u_0}$ pour donnée initiale:
a) $\vec{u}$ et $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ sont localement de carré intégrable sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$
b) $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$
c) $\exists \varpi \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}.\vec{\nabla}) \ \vec{u} - \vec{\nabla} \varpi$
d) $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ $\lim_{t \to 0^+} < \vec{u}(t, .) \mid \vec{\phi} >=< \vec{u}_0 \mid \vec{\phi} >$
De plus, on peut imposer à cette solution de satisfaire les conditions de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Nous introduisons l'espace E_3 analogue de E_2 pour la norme L^3 et un espace "technique" $E_{3,\alpha}$:

Définition 2: A) L'espace E_3 des fonctions uniformément localement de puissance troisième intégrable et nulles à l'infini est défini par: $f \in E_3$ si et seulement si:
a) $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 \, dy \ < +\infty$
b) $\lim_{x \to \infty} \int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 \, dy \ = 0$
Il est normé par:

$$||f||_{E_3} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (\int_{|y-x| \leq 1} |f(y)|^3 \, dy)^{\frac{1}{3}}$$

B) Pour $0 < \alpha < 3$, l'espace $E_{3,\alpha}$ est défini par $f \in E_{3,\alpha}$ si et seulement si on a:
a) $f \in E_3$
b) $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} \, dy < \infty$
c) $\lim_{x \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} \, dy = 0$

Il est normé par:

$$||f||_{E_{3,\alpha}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (\int_{|y-x|\leq 1} |f(y)|^3 \, dy)^{\frac{1}{3}} + \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (\int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^{3/2} \frac{1}{(1+|x-y|)^{3-\alpha}} \, dy)^{2/3}$$

Il est facile de voir que la donnée $\vec{u}_0$ du théorème B appartient à $(E_{3,\alpha})^3$ pour α assez petit et que $E_{3,\alpha}$ est bien adapté aux équations de Navier-Stokes:
a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $E_{3,\alpha}$ (par troncature et régularisation)
b) les transformations de Riesz opèrent continument sur $E_{3,\alpha}$: en effet elles opèrent continument (et uniformément par rapport à x_0) sur $L^{3/2}(\frac{1}{(1+|x_0-y|)^{3-\alpha}} \, dy)$ car $\frac{1}{(1+|x_0-y|)^{3-\alpha}}$ est un poids de la classe de Muckenhoupt $A_{3/2}$; pour estimer $\int_{|x-y|\leq 1} |R_j f(y)|^3 \, dy$, on scinde f en $g_x = f(y)1_{|x-y|\leq 2}(y)$ et $h_x(y) = f(y)\, 1_{|x-y|>2}(y)$; $R_j g_x(y)$ s'estime facilement par la continuité L^3 de R_j; par ailleurs $R_j h_x(y)$ est bornée sur $|x-y|\leq 1$ par $(\int_{|w-x|>2} |f(w)|^{3/2} \frac{1}{|x-w|^{3-\alpha}} \, dw)^{2/3} (\int_{|x-w|>2} \frac{1}{|x-w|^{3+2\alpha}} \, dw)^{1/3}$.
c) de a) et b) on tire qu'un champ à divergence nulle dans $(E_{3,\alpha})^3$ se décompose en un champ à divergence nulle appartenant à $(L^2)^3$ et un champ de norme $E_{3,\alpha}$ arbitrairement petite.
d) le formalisme de Kato pour l'existence de solutions milds s'applique sans problème car le produit ponctuel est un opérateur bilinéaire continu de $L^\infty \times E_{3,\alpha}$ dans $E_{3,\alpha}$ et $E_{3,\alpha} \subset B_\infty^{-1,\infty}$
e) le produit ponctuel est bien continu de $L^2 \times E_{3,\alpha}$ dans H^{-1}; en fait, il l'est de $L^2 \times L^3_{uloc}$ dans H^{-1}
f) La fin de la démonstration est similaire (en remplaçant le théorème d'unicité de Serrin par celui de Von Wahl [WAH]).

Bibliographie

[CKN] CAFFARELLI, L., KOHN, R., & NIRENBERG, L., Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), pp. 771-831.

[CAN] CANNONE, M., *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes* , Diderot Editeur, Paris, 1995.

[FLT 1] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G. & TERRANEO, E., Sur l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions "mild" de l'équation de Navier-Stokes, *C.R.Acad.Sci. Paris*, Série 1, 325 (1997) pp. 1253-1256.

[FLT 2] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G. & TERRANEO, E., Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites pour Navier-Stokes, soumis à *Revista Mat. Iberoamer.*.

[KAT] KATO, T., Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* 187 (1984), pp. 471-480.

[LEM 1] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Solutions faibles d'énergie infinie pour les équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$, en préparation.

[LEM 2] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Some remarks on the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, à paraî tre in *Journal Math. Phys.* .

[LER] LERAY, J., Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* 63 (1933), pp. 193-248.

[MEY] MEYER, Y., *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, à paraître comme *Memoir of the AMS.*

[OSE] OSEEN, C.W., *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akademische Verlags–gesellschaft, Leipzig, 1927.

[PLA] PLANCHON, F., *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes.*, Thesis, Ecole Polytechnique, 1996.

[WAH] VON WAHL, W., *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.